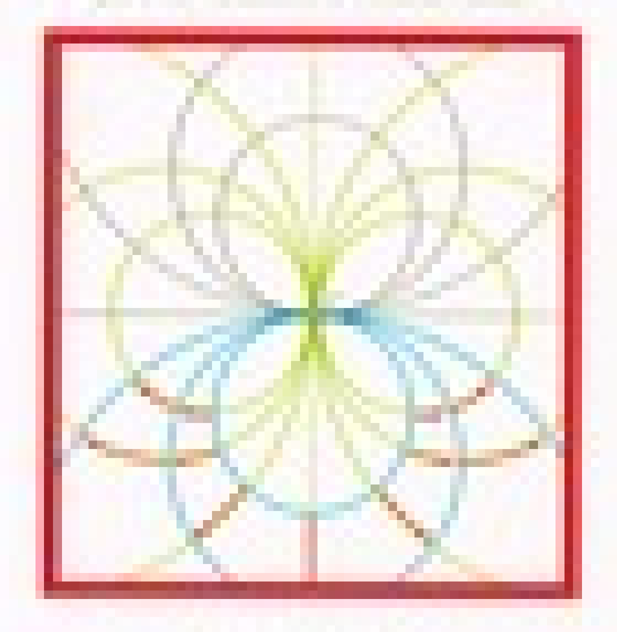
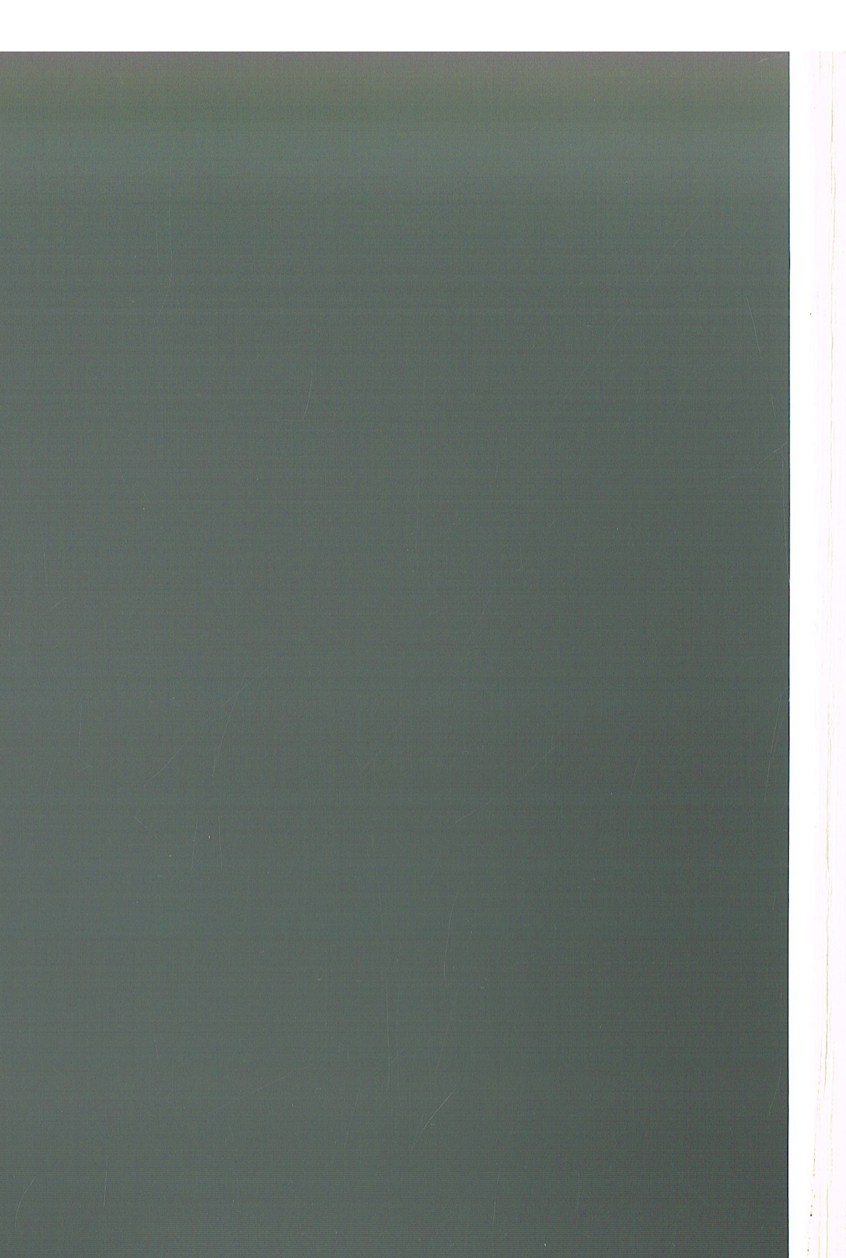


ATLAS DES MATHÉMATIQUES

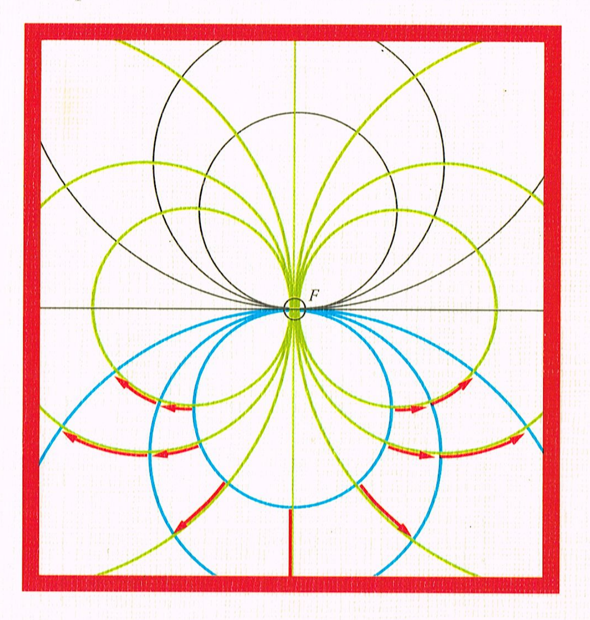




ENCYCLOPÉDIES LIVRE DE POCHE D'AUJOURD'HUI

ATLAS DES MATHÉMATIQUES

par Fritz Reinhardt et Heinrich Soeder



La Pochothèque

ATLAS
DES
MATHÉMATIQUES

Dans Le Livre de Poche :

Atlas de l'écologie
Atlas de la philosophie
Atlas de la biologie
Atlas de l'astronomie
Atlas de la psychologie
Atlas de la physique

ENCYCLOPÉDIES D'AUJOURD'HUI

Fritz Reinhardt *et* Heinrich Soeder

ATLAS DES MATHÉMATIQUES

Conception graphique de Gerd Falk

La Pochothèque
LE LIVRE DE POCHE

La version française de ce livre, revue et augmentée, a été dirigée par M. Jean Cuenat, professeur de mathématiques spéciales honoraire, et M. Jacques Dablanc, inspecteur général honoraire de l'Education Nationale.
La traduction est de Mmes et MM. Eric Anvar, Jérémie Avérous, Damien Bourgeois, Isabelle Durvye, Thomas Duzan, Nicolas Fournier, Xavier Grison, Cyril Legrand, Nathalie Mercier, Emmanuel Normant, Guillaume Sauvé, Anne Souquière, anciens élèves de l'Ecole Polytechnique ou de l'Ecole Centrale.

Les compléments ont été réalisés par MM. Thierry Aubin, professeur de mathématiques à l'Université de Paris VI, Jean Cuenat, Jacques Dablanc, Alain Guichardet, professeur de mathématiques à l'Ecole Polytechnique et Fabrice Lefebvre, ingénieur de l'armement.

AVANT-PROPOS

Cet *Atlas des mathématiques* est la version française en un volume du livre de poche allemand *Atlas zur Mathematik,* édité en deux tomes. Les pages frangées de gris séparent les deux tomes fictifs réunis en un seul ouvrage. Elles contiennent des compléments à certains chapitres de l'édition allemande, ainsi qu'un aperçu concernant quelques branches des mathématiques dont l'importance est grande à la fin de ce dernier quart de siècle. On a pu ainsi consacrer un petit chapitre à la géométrie fractale, source de figures étonnantes et merveilleuses, que l'ordinateur d'aujourd'hui peut réaliser à la perfection.

La science mathématique inspire des réflexions philosophiques diverses, des méthodes pédagogiques qui peuvent différer selon le patrimoine culturel de ceux qui la pratiquent. L'équipe de traduction a essayé d'en tenir compte. Un public de langue française, intéressé par l'*Atlas des mathématiques* de la *Pochothèque*, aura, dans sa majorité géographique, suivi un enseignement secondaire et peut-être un enseignement supérieur tels qu'on les conçoit en France. Dans cette optique certaines explications ont été approfondies, voire modifiées. Cette adaptation ne change évidemment pas la façon dont les auteurs ont pensé l'enchaînement constructif de l'ouvrage.

Une partie importante de ce livre est réservée à la géométrie et à ses fondements. Il s'agit là de travaux historiques, principalement des écoles allemandes (KLEIN, BACHMANN, XIX[e] et XX[e] siècles) et françaises (DESARGUES, PASCAL, XVI[e] et XVII[e] siècles), qui illustrent la construction d'un vaste édifice mathématique à partir seulement de quelques lignes d'axiomes. La valeur intrinsèque en est grande, même si aujourd'hui, à l'approche du troisième millénaire, les centres d'intérêt se sont déplacés. C'est dans une soixantaine de pages (pages 129 à 189) qu'on rencontre, avec un vocabulaire peu connu de nos jours (plan métrique, géométrie absolue, antiappariement, mobilité libre, élation, plan idéal, etc.), les résultats de ces travaux, illustrés de géométries non euclidiennes et de leurs cortèges de calculs trigonométriques. Le lecteur se souviendra que « plan métrique » a un deuxième sens aujourd'hui.

L'écriture mathématique utilise plusieurs alphabets et de nombreux signes ou symboles particuliers. Il est regrettable que l'emploi de ceux-ci ne soit pas complètement normalisé et varie d'un pays à l'autre, quand ce n'est pas d'un document à l'autre au sein d'un même groupe de mathématiciens. On trouve à la fin de l'ouvrage une liste des signes et symboles utilisés avec leurs significations. Ils sont, dans leur ensemble, d'un usage commun dans la littérature mathématique de langue française. On trouvera également, en complément, une liste des abréviations usuelles ou exceptionnelles que l'on peut rencontrer. Les tableaux A et B de la page 16 donnent quelques exemples classiques du rôle joué par les symboles de logique fondamentaux. Le lecteur gagnera à se familiariser avec leur emploi, qui apporte précision et concision. Il rencontrera en effet régulièrement ces symboles dans cet ouvrage.

La présentation matérielle du livre est celle de la série *Atlas* : les illustrations, toujours en page de gauche, font largement appel aux couleurs. On sait que celles-ci sont d'un usage courant et agréable pour distinguer différentes parties d'une même figure. Mais, *dans cet Atlas*, leur intérêt ne s'arrête pas là : les couleurs participent aux étapes de la construction mathématique des objets géométriques, en obéissant à des règles strictes, signalées page 8.

On rappelle enfin qu'un *Atlas* n'est pas un livre où l'on peut trouver l'étude d'une théorie poussée dans ses moindres détails. En particulier dans celui-ci les démonstrations des théorèmes sont la plupart du temps omises. Celles qui sont proposées ont l'avantage d'être assez courtes et d'illustrer simplement des types de raisonnement. Le but de l'*Atlas des mathématiques* est d'apporter une vue d'ensemble du développement de cette science, en tenant compte des liens existant entre les différentes branches.

Les tableaux des pages 12, 18, 70, 128, 206, 274, 328 donnent, avec le sommaire, la conception du contenu mathématique du livre dans le cadre décrit aux pages 11 et 13 par les auteurs.

Un index, qui trouve sa place en fin de volume, reprend les termes mathématiques rencontrés, avec les pages de référence. Une bibliographie adaptée au lecteur de langue française fournit une liste d'ouvrages, non exhaustive bien sûr, que l'on peut consulter ou même étudier en profondeur, en liaison avec un ou plusieurs chapitres de l'*Atlas des mathématiques*.

Jean CUENAT

Indications particulières concernant les figures

P n'est pas dans le « rouge »

P est dans le « rouge »

P n'est ni dans le « rouge », ni dans le « vert »

P est à la fois dans le « rouge » et dans le « vert »

P n'est pas dans le « rouge », mais il est dans le « vert »



sans le bord

Ruban des couleurs pour les constructions géométriques (les étapes de la construction correspondent à la suite des couleurs de gauche à droite ; le résultat final est en général rouge).

Sauf indication contraire, le lieu d'édition est Paris. La liste des éditeurs est donnée en fin de bibliographie.

1. Généralités
Abrégé d'Histoire des Mathématiques, J. Dieudonné, HER, 1978.
Dictionnaire des mathématiques, A. Bouvier, M. George, F. Le Lionnais, PUF, 1993.
Fondement des mathématiques, M. Combes, PUF, 1971.
Les Mathématiciens de A à Z, B. Hauchecorne, D. Surrateau, ELL, 1996.
Histoire des Mathématiques, J.-P. Colette, VUI, 1979.
Vie et Œuvre des grands mathématiciens, J.-L. Audirac, MAG, 1990.

2. Logique mathématique, théorie des ensembles
Logique mathématique, R. Cori, D. Lascar, MAS, 1994.
Logique et fondement de l'informatique, R. Lassaigne, M. de Rougemont, HER, 1993.
Éléments de logique mathématique, G. Kreisel, J.-L. Krivine, DUN, 1967.
Théorie axiomatique des ensembles, J.-P. Krivine, PUF, 1972.

3. Relations et structures
Cours d'algèbre, R. Godement, HER, 1969.
Arithmétique et théorie des nombres, J. Itard, PUF, 1963.
Leçons d'algèbre moderne, P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, DUN, 1961.
Structures algébriques finies, A. Warusfel, HAC, 1971.

4. Algèbre
Algèbre générale, B. Charles, D. Allouch, PUF, 1984.
Algèbre, S. Mac-Lane, C. Birkoff, GAU, 1970 (2 tomes).
Leçons d'algèbre moderne, P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, DUN, 1961.
Structures algébriques finies, A. Warusfel, HAC, 1971.
Cours d'algèbre, R. Godement, HER, 1969.
Algèbre commutative, J.-P. Lafon, HER.
Sur les groupes classiques, J. Dieudonné, HER.
Algèbre, Bourbaki, HER.
Algèbre générale, E. Artin, GAU, 1972.
Arithmétique et algèbre moderne, A. Chatelet, PUF, 1966 (3 tomes).
Formes quadratiques et groupes classiques, R. Deheuwels, PUF, 1981.
Algèbre commutative, M.-P. Malliavin, MAS, 1985.
Algèbre linéaire et géométrie classique, J.-E. et M.-J. Bertin, MAS, 1981.
Théorie des groupes et de leurs représentations, A. Guichardet, ELL.

5. Les nombres
Éléments de théorie des nombres, R. Descombes, PUF, 1986.
Cours d'arithmétique, J.-P. Serre, PUF, 1970.
Théorie algébrique des nombres, P. Samuel, HER, 1967.
Théorie des nombres, Z.-I. Borevitch, I.-R. Chafarevitch, GAU, 1967.
Les Nombres premiers, J. Itard, PUF, 1969.

6. Géométrie, Géométrie analytique
Méthodes modernes en géométrie, J. Fresnel, HER.
Mathématiques, cours et exercices, algèbre et géométrie, P. Sauser, ELL, 1983.
Géométrie, M. Berger, FEN, 1977 (5 tomes).
Géométrie projective, P. Samuel, PUF, 1986.
Groupes, algèbres et géométries, J.-M. Arnaudies, J. Bertin, ELL (2 tomes).
Géométrie affine, projective et euclidienne, C. Tisseron, HER.
Groupes et géométries, B. Sénéchal, HER.
Géométrie analytique, J. Françoise, PUF, 1995.
Géométrie, M. Carral, ELL, 1995.
L'Enseignement de la géométrie, G. Choquet, HER, 1964.

7. Topologie
Cours d'analyse, Topologie, G. Choquet, MAS, 1964.
Topologie générale, Bourbaki, HER.
Topologie générale, J. Dixmier, PUF, 1981.
Éléments d'analyse, J. Dieudonné, GAU (4 tomes).
La Topologie, A. Delachet, PUF, 1978.

8. Topologie algébrique
Topologie des surfaces, A. Gramain, PUF, 1971.
Géométrie et topologie des surfaces, D. Lehmann, C. Sacré, PUF.
Topologie algébrique élémentaire, M. Zisman, ACO, 1972.

9. Théorie des graphes
Théorie des graphes et ses applications, C. Berge, DUN.
Graphes et programmation linéaire, M. Sakarovitch, HER.
Des points et des flèches... la théorie des graphes, A. Kaufmann, DUN, 1968.

10. Analyse réelle
Suites et séries, J. Combes, PUF, 1982.
Cours d'analyse, G. Valiron, MAS, 1950 (2 tomes).
Analyse réelle, S. Lang, INT, 1977.
Cours d'analyse, L. Schwartz, HER (4 tomes).
Compléments d'analyse, J. Avignan, E. Azouley, MCG, 1990.
Cours de mathématiques, tomes 2 et 3, J.-M. Arnaudies, H. Fraysse, DUN.
Cours de mathématiques spéciales, tome 2, B. Gostiaux, PUF, 1993.

11. Calcul différentiel
Cours de calcul différentiel, H. Cartan, HER.
Calcul infinitésimal, J. Dieudonné, HER.
Fondements du calcul différentiel, P. Ver Ecke, PUF, 1983.
Applications du calcul différentiel, P. Ver Ecke, PUF, 1985.
Calcul différentiel, A. Avez, MAS, 1995.

Équations différentielles, J. Geoffroy, PUF, 1983.
Mathématiques pour l'informatique, tome 2, *équations différentielles*, N. Gastinel, ACO, 1970.

12. Géométrie différentielle
Géométrie différentielle, M. Berger, B. Gostiaux, ACO.
Calcul différentiel et géométrie, D. Leborgne, PUF, 1982.
Géométrie différentielle, J. Lelong-Ferrand, MAS, 1963.
Géométrie différentielle intrinsèque, P. Malliavin, HER, 1972.

13. Tenseurs
Les Tenseurs, L. Schwartz, HER.
Éléments de calcul tensoriel, A. Lichnérowicz, ACO.

14. Théorie des fonctions
Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, H. Cartan, HER.
Calcul différentiel complexe, D. Leborgne, PUF, 1982.
Les Fonctions analytiques, M. Hervé, PUF, 1982.

15. Calcul intégral
L'Intégrale, P. Deheuwels, PUF, 1980.
Intégration, R. Descombes, HER.
Intégration, analyse hilbertienne, A. Guichardet, ELL.
Intégration, A. Gramain, HER.
Intégrale de Lebesgue, Mesure et Intégration, M. Bouyssel, CEP, Toulouse.
Leçons sur l'intégration, H. Lebesgue, GAU, 1950.

16. Analyse fonctionnelle
Analyse fonctionnelle, théorie et applications, H. Brézis, MAS, 1992.
Mathématiques pour l'informatique, tome 1, *analyse fonctionnelle,* J.-P. Bertrandias, ACO, 1970.
Analyse fonctionnelle appliquée, J.-P. Aubin, PUF, 1970.
Analyse fonctionnelle, W. Rudin, EDI, 1995.

17. Analyse combinatoire
Analyse combinatoire, L. Comtet, PUF (2 tomes).
Mathématiques combinatoires, H.-J. Ryser, DUN, 1969.
Principes de combinatoire, C. Berge, DUN, 1960.

18. Calcul des probabilités et statistiques
Probabilités et statistiques, D. Dacunha-Castelle, M. Duflo, MAS, 1993.
Notions fondamentales de la théorie des probabilités, M. Métivier, DUN, 1968.
Calcul des probabilités, A. Tortrat, MAS.
Éléments de calcul des probabilités, J. Bass, MAS, 1962.
La probabilité, le hasard, la certitude, P. Deheuwels, PUF.
Principes de statistique mathématique, A. Tortrat, « Monographies » DUN, 1961.

19. Optimisation linéaire
La Programmation linéaire par l'exemple, Droesbeke, ELL.
Programmation linéaire, Teghem, ELL.
Des points et des flèches... la théorie des graphes, A. Kaufmann, DUN, 1968.

20. Suppléments
Les Objets fractals, B. Mandelbrot, FLA, 1989.
Algèbre linéaire et applications, H. Mascart, M. Stoka, PUF, 1985.
Analyse de Fourier et applications, R. Dalmasso, C. Gasquet, P. Witombski, MAS, 1990.
Mesure, intégration, convolution et analyse de Fourier, Vo Khac, ELL.
Transformation de Fourier, M. Hervé, PUF, 1986.
Théorie des distributions, L. Schwartz, HER.
Distributions et équations aux dérivées partielles, C. Zuily, HER.
Géométrie différentielle et mécanique, C. Godbillon, HER.
Formes différentielles, H. Cartan, HER.
Groupes de Lie, G. Pichon, HER.
Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, R. Mneimné, F. Testard, HER.
Non Linear Analysis on Manifolds Monge-Ampère Equation, T. Aubin, Grundlehren 252, Springer-Verlag, New York, 1982.

21. Cours de mathématiques
Classes préparatoires, A. Doneddu, VUI.
Classes préparatoires, J.-M. Arnaudies, H. Fraysse, DUN, 1988 (4 tomes).
Cours de mathématiques spéciales, E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, MAS, 1977 (5 tomes).
Cours de mathématiques spéciales, B. Gostiaux, PUF, 1993 (4 tomes).
Cours de mathématiques, J. Bass, MAS, 1971.
Notions fondamentales de mathématiques modernes, R. Saint-Guilhem, ELL, 1989 (2 tomes).
Algèbre et Géométrie, P. Sauser, ELL (2 tomes)
On consultera utilement les ouvrages de Bourbaki, aux Éditions Hermann.

Liste des éditeurs :

ACO	Armand Colin
CEP	Cépaduès
DUN	Dunod
EDI	Ediscience International
ELL	Ellipses
FEN	Fernand Nathan
FLA	Flammarion
GAU	Gauthier-Villard
HAC	Hachette
HER	Hermann
INT	Interéditions
MAG	Magnard
MCG	McGraw-Hill
MAS	Masson
PUF	Presses Universitaires de France
VUI	Vuibert

Évolution des mathématiques

Si l'activité mathématique remonte fort loin dans l'histoire de l'humanité, la conception des mathématiques a, elle, fortement évolué au cours des siècles.

Babyloniens, Égyptiens, Phéniciens et autres peuples de l'époque préhellénique sont amenés au concept de nombre et à la construction de figures géométriques, essentiellement par des problèmes pratiques et par l'observation de l'environnement. Au Ve siècle avant l'ère chrétienne les mathématiques s'émancipent sous la poussée de la pensée grecque et sont étudiées pour elles-mêmes. Cette évolution, caractéristique, fait apparaître, pour toute théorie mathématique, une construction partant d'un petit nombre de notions fondamentales (définitions) et d'assertions considérées comme évidentes (axiomes), en usant de raisonnements fondés sur la logique (méthode déductive).

La géométrie traitée dans les « Éléments d'EUCLIDE » offre la plus belle illustration de cet effort créateur.

Le concept de nombre, dans le même ouvrage, n'est malheureusement pas abordé avec la même rigueur, bien que le problème des rapports irrationnels de segments géométriques eût pu servir d'aiguillon.

Plus tard Hindous et Arabes développent l'usage des nombres (trigonométrie, algèbre), accordant beaucoup de place à la résolution d'équations en vue d'applications.

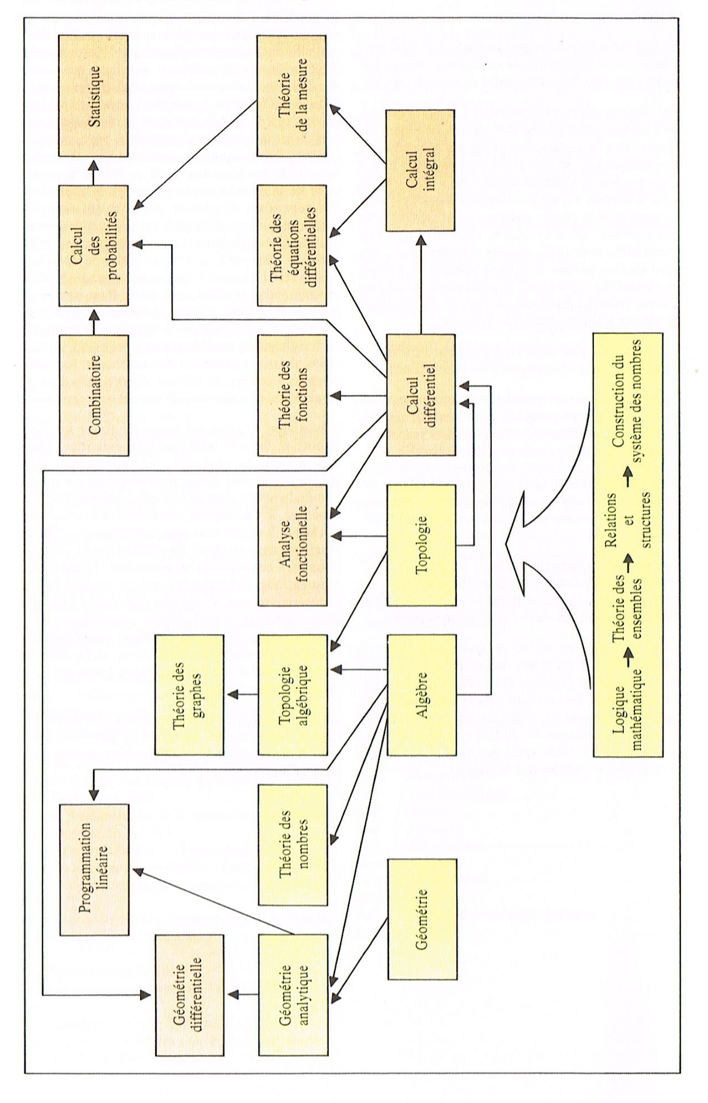
Les calculs intéressent toujours les XVIIe et XVIIIe siècles (calcul infinitésimal, géométrie analytique). Ils sont souvent conçus, avec succès d'ailleurs, dans l'idée d'apporter des outils aux sciences physiques.

C'est seulement au XIXe siècle qu'on peut observer, dans toutes les branches des mathématiques, un renforcement de l'étayage axiomatique des théories. Le dégagement des structures relatives aux différentes parties constituant les mathématiques est d'ailleurs l'aspect dynamique de cette évolution. Il s'est poursuivi au XXe siècle grâce aux travaux de l'équipe connue sous le pseudonyme BOURBAKI.

Bien entendu l'être mathématique ne peut être conçu uniquement dans une construction structurelle. Aujourd'hui, comme toujours, son développement subit l'influence des problèmes techniques que posent de nombreuses sciences. À côté de l'abstraction et de la déduction, l'intuition et la méthode inductive ont leur place à égalité dans la recherche mathématique. On peut parler de mouvement oscillatoire entre ces deux sources dynamiques, la tendance récente ayant favorisé la mathématique pure au détriment provisoire de la mathématique appliquée. N'apparaît-il pas cependant de plus en plus que les théories mathématiques peuvent venir en aide non seulement aux sciences physiques et aux autres sciences, mais encore à l'économie et à toutes sortes de domaines concernant l'humanité, les résultats auxquels elles aboutissent se révélant utilisables. Pour mettre en pratique cet aspect utilitaire, il faut mathématiser la situation, c'est-à-dire passer au langage mathématique, en imaginant un modèle portant d'une part sur des objets abstraits représentant convenablement les objets concrets à étudier, et reflétant d'autre part, dans sa structure, les relations mutuelles de ces objets concrets.

L'intuition n'a jamais cessé de jouer un rôle important dans la réflexion mathématique. Bien entendu elle ne peut être reconnue comme une justification ; elle dirige toutefois dans une large mesure la pensée vers de nouvelles connaissances en apportant, le cas échéant, des indications concernant le chemin à suivre dans une démonstration. Elle se répercute dans le choix du vocabulaire et dans de nouvelles conceptions structurelles. La méthode axiomatique, précisément, qui ne permet aucun énoncé concernant le contenu d'un terme primitif, laisse une grande latitude aux associations subjectives : celles-ci peuvent donner au mathématicien chercheur de nouvelles impulsions, et faciliter la compréhension d'une théorie achevée à celui qui veut acquérir des connaissances.

On peut assigner aux représentations graphiques un objectif analogue, non seulement en géométrie, mais aussi là où des relations même abstraites peuvent faire l'objet d'illustrations.



La recherche fondamentale en mathématiques montre que les notions d'ensemble et d'application jouent un rôle capital dans la construction et le développement de la plupart des disciplines mathématiques.
La **logique mathématique** (logique bivalente) formalise le langage dans lequel on exprime une proposition mathématique ; elle établit les règles concernant la déduction de nouveaux énoncés à partir d'énoncés antérieurs ; elle analyse les formes d'assertion et élabore les procédés de démonstration.
La **théorie des ensembles** montre comment la notion d'ensemble est le moyen de construction le plus important de la mathématique pure, en établissant en particulier des relations entre ensembles. Le symbolisme et les propriétés de l'algèbre des ensembles permettent une représentation unifiée des différentes disciplines mathématiques ; ils jouent également un rôle capital dans les applications (conception et construction des ordinateurs par ex.).
Les **relations** permettent d'établir des liaisons entre éléments d'un même ensemble (par ex. une classification à l'aide d'une relation d'équivalence) ou d'ensembles différents. Les applications sont des relations particulières. Les **structures** sur des ensembles (par ex. structure algébrique, structure topologique, structure d'ordre) sont obtenues également à partir de relations particulières.
Toutes les disciplines mathématiques font appel à des domaines numériques appropriés. La construction du **système des nombres** passe d'abord par une définition claire de la notion d'entier naturel, puis par des extensions successives de cette notion. C'est ainsi qu'on aborde le problème (signification et résolution) de la complétion d'un espace relativement à des propriétés structurelles déterminées.
Manipuler des objets aussi différents que sont par ex. les nombres, les objets géométriques, les structures, conduit nécessairement à découper les mathématiques en plusieurs secteurs. Cette opération, liée au contenu de la science mathématique, est également conditionnée par l'histoire des mathématiques et les influences exercées par les autres sciences (physique, science des matériaux, géodésie, etc.).
Dans ces conditions si en **algèbre** on étudie les ensembles à structure algébrique (groupes, anneaux, corps, modules, espaces vectoriels...), on propose également des méthodes de résolution d'équations et de systèmes d'équations. Ainsi dans le cadre de l'algèbre linéaire apparaissent matrices et déterminants, et leurs applications aux systèmes d'équations linéaires. De même l'exposé de la théorie de Galois est illustré par des équations algébriques liées à des problèmes géométriques.
Dans la **théorie des nombres** on peut s'intéresser aussi bien à la divisibilité et à ses applications dans l'anneau des entiers qu'à des calculs dans le corps des nombres réels. Ses moyens d'action appartiennent à l'analyse comme à l'algèbre.
La **géométrie** est consacrée à l'étude des formes et des grandeurs des figures. Les concepts sont empruntés à l'espace visuel. Par axiomatisation on aboutit, selon le système d'axiomes choisi, à des espaces abstraits présentant des différences notables.

La **géométrie analytique** puise ses ressources dans les espaces vectoriels et les conséquences qui en découlent, en particulier l'usage des coordonnées : elle met l'algèbre au service de la géométrie.
La **topologie** étudie les structures topologiques que l'on peut attribuer à des ensembles. Les notions fondamentales utilisées (voisinages, parties ouvertes...) appartiennent à l'analyse. La définition axiomatique d'une topologie permet de mettre une topologie sur tout ensemble. Mais le vrai problème est de mettre une topologie performante : cette qualité appartient souvent aux topologies métriques.
La **topologie algébrique** (appelée autrefois *analysis situs*) fait appel à des moyens algébriques (groupes, modules) pour résoudre des problèmes topologiques. Les deux théories de l'homotopie et de l'homologie sont développées dans ce sens.
La **théorie des graphes** est issue de la topologie. Elle est consacrée à l'étude de problèmes théoriques et pratiques, que l'on peut ramener à des problèmes concernant un ensemble de points dont certains sont liés par des segments.
Le calcul infinitésimal, c'est-à-dire le **calcul différentiel et intégral**, repose sur la notion de limite. Il permet de faire apparaître des propriétés particulières de certaines fonctions réelles de la variable réelle : différentiabilité, en liaison avec la notion de tangente à une courbe, et intégrabilité, en liaison avec la notion d'aire limitée par une courbe. Le calcul différentiel et intégral s'adapte également aux dimensions supérieures.
Une généralisation de la théorie de l'intégration est la **théorie de la mesure** : celle-ci a pour objet d'étudier si et comment l'on peut associer à un ensemble de points un nombre réel représentant la valeur de son contenu.
De nombreux problèmes pratiques conduisent à des équations différentielles portant sur des fonctions à une ou plusieurs variables. La **théorie des équations différentielles** propose des méthodes permettant d'étudier et de résoudre de telles équations dans des cas aussi généraux que possible.
Si l'on applique les méthodes topologiques à certains ensembles de fonctions (espaces fonctionnels), on aboutit à une généralisation, dont la portée est considérable, du calcul infinitésimal : c'est là l'objet de l'**analyse fonctionnelle**. Les topologies qui interviennent sont celles d'espaces vectoriels normés particuliers.
La **géométrie différentielle** traite des figures géométriques abordables par le calcul infinitésimal. Les théories des courbes et surfaces en constituent des chapitres importants.
L'adaptation des méthodes du calcul infinitésimal aux fonctions complexes de la variable complexe conduit à une théorie particulièrement élégante, qu'on appelle simplement la **théorie des fonctions**. Le procédé du prolongement analytique conduit à l'importante notion de surface de Riemann.
Grâce à la **combinatoire** on peut résoudre un certain nombre de problèmes de dénombrement d'ensembles finis, que ce soit en géométrie, en théorie des nombres, en théorie des graphes ou en **calcul des probabilités**. Ce dernier fournit des théorèmes concernant la réalisation d'un événement aléatoire et contribue au fondement de la **statistique.**

A_1 Le rosier est une plante	$v(A_1) = V$
A_2 La baleine est un poisson	$v(A_2) = F$
A_3 $2 + 4 = 6$	$v(A_3) = V$
A_4 4 est un nombre premier	$v(A_4) = F$
A_5 Tout nombre pair plus grand que 2 est somme de deux nombres premiers (Conjecture de GOLDBACH)	$v(A_5)$ inconnu
A_6 Il existe des fonctions continues non dérivables	$v(A_6) = V$
A_7 5 est un nombre premier si et seulement si deux droites parallèles et disjointes n'ont aucun point en commun	$v(A_7) = V$
A_8 Si 5 est pair, alors la somme des angles d'un triangle plan vaut 180°	$v(A_8) = V$
A_9 Tout quadrilatère ayant deux côtés opposés égaux et deux angles opposés égaux est un parallélogramme	$v(A_9) = F$

A

Exemples de propositions

$v(A)$	$v(B)$	$v(\neg A)$	$v(A \wedge B)$	$v(A \vee B)$	$v(A \Rightarrow B)$	$v(A \Leftrightarrow B)$
V	V	F	V	V	V	V
V	F		F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F		F	F	V	V

B

Table de vérité des principaux connecteurs

		$v(A \circ_i B)$															
$v(A)$	$v(B)$	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
Symbole habituel de connexion			$\vee$			$\Rightarrow$		$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\mid$						$\triangledown$	

On observe une antisymétrie dans le sens suivant : la deuxième partie du tableau s'obtient par réflexion à partir de la première en échangeant simultanément V et F, c.-à-d. que $v(A \circ_i B) = v(\neg(A \circ_{17-i} B))$. Il suffit donc de connaître les 8 premiers connecteurs et le symbole $\neg$.

Le connecteur $\circ_6$ est indépendant de A, $\circ_4$ de B, $\circ_1$ de A et B. Ils sont donc inutiles. $\circ_3$ se retrouve dans $\circ_5$ car $v(A \circ_3 B) = v(B \circ_5 A)$. Les connecteurs présentés dans le tab. B suffisent donc à décrire tous les connecteurs en deux variables.

C

Table de vérité pour tous les connecteurs en deux variables

$\neg A$	$A \mid A$	$A \triangledown A$
$A \wedge B$	$(A \mid B) \mid (A \mid B)$	$(A \triangledown A) \triangledown (B \triangledown B)$
$A \vee B$	$(A \mid A) \mid (B \mid B)$	$(A \triangledown B) \triangledown (A \triangledown B)$
$A \Rightarrow B$	$A \mid (A \mid B)$	$(B \triangledown (A \triangledown B)) \triangledown (B \triangledown (A \triangledown B))$

D

Description des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ à partir de nand et nor

Propositions et valeurs de vérité

Comme pour toute autre science, les résultats mathématiques doivent pouvoir être formulés par oral ou par écrit. Du fait de la multiplicité des langues et du risque de malentendu dû à l'utilisation du langage courant, on a finalement fait le choix en mathématiques de traduire les propositions en un langage artificiel et formel ne contenant que les termes logiques significatifs du langage courant. Dans un premier temps, il est d'ailleurs nécessaire de définir le terme même de *proposition*. On impose aux propositions d'appartenir soit à la classe des propositions vraies, soit à la classe des propositions fausses (*Principe de la double valeur*). Une proposition est alors toute forme écrite à laquelle on associe soit la valeur du vrai V, soit la valeur du faux F. La façon dont est déterminée cette valeur de vérité n'a ici aucune importance. La valeur de vérité d'un certain nombre de conjectures mathématiques n'est, jusqu'à aujourd'hui, pas déterminée. Seule l'opinion s'autorise parfois à les considérer soit comme vraies, soit comme fausses. Si A est une proposition, $v(A)$ est sa valeur de vérité (tab. A).

Formes propositionnelles

Toute suite cohérente de signes ou de lettres n'est pas forcément une proposition. Ainsi :

Tous mes vœux !
Le chiffre 5 est plus grand.
$x + 3 = 8$
$P(3)$
$S(7, 3, 4)$
ne sont pas des propositions.

Les trois derniers contre-exemples sont néanmoins d'un intérêt particulier en mathématiques, car ils contiennent ce que l'on appelle des variables. Celles-ci sont certes limitées à un domaine précis d'objets. Mais si l'on remplace x dans $x + 3 = 8$ par un nombre naturel, on obtient une proposition du type $11 + 3 = 8$ (F) ou $5 + 3 = 8$ (V). En remplaçant $P(\cdot)$ par ce que l'on appelle un *prédicat*, comme « … est un nombre premier » ou « … est un nombre pair », on obtient la proposition suivante « 3 est un nombre premier » (V) ou « 3 est un nombre pair » (F). De même $S(7, 3, 4)$ où S représente « … est la somme de … et … » ou « … est situé entre … et … » devient soit « 7 est la somme de 3 et 4 » (V), soit « 7 est situé entre 3 et 4 » (F). De telles structures sont appelées *formes propositionnelles*.

Connexion des propositions

De nombreuses propositions et formes propositionnelles sont constituées de parties qui sont elles-mêmes des propositions ou des formes propositionnelles. On introduit alors des mots intermédiaires tels que : non, et, ou, si … alors, si et seulement si. Il est habituel d'utiliser pour ceux-ci des symboles particuliers (*connecteurs logiques*). Cette symbolique n'est malheureusement pas universelle. Néanmoins, l'écriture suivante semble peu à peu s'imposer, aussi sera-t-elle utilisée par la suite : $\neg A$ pour « non A », $A \wedge B$ pour « A et B », $A \vee B$ pour « A ou B », $A \Rightarrow B$ pour « si A alors B », $A \Leftrightarrow B$ pour « A si et seulement si B ». En logique des propositions, ces connecteurs sont définis de telle manière que la valeur de vérité d'une proposition puisse être déterminée par la connaissance des valeurs de vérité de ses parties, sans qu'il y ait forcément un contenu logique commun aux sous-propositions (A_7 et A_8 dans tab. A). Par *assignation* de valeurs de vérité aux sous-propositions, on obtient la valeur de vérité de la proposition globale à l'aide de ce que l'on appelle des *tables de vérité* (tab. B). On peut remarquer que les valeurs ainsi définies ne correspondent pas toujours à l'usage courant d'une langue peu précise et non universelle. Ainsi $\vee$ n'est utilisé que pour le « ou inclusif ». Attention aussi à la table de vérité pour $\Rightarrow$: comme une proposition fausse peut conduire par une implication logiquement correcte soit à une proposition vraie, soit à une proposition fausse, il est préférable d'affirmer que $v(A \Rightarrow B)$ est toujours égale à V lorsque $v(A) = F$. Par exemple, il est clair que l'égalité de deux nombres implique l'égalité de leurs carrés. Les propositions suivantes de la forme $A \Rightarrow B$ sont donc vraies :

$2 = 3 \Rightarrow 4 = 9$
$2 = -2 \Rightarrow 4 = 4$

Dans le premier cas, on a aussi $v(B) = F$, alors que dans le second $v(B) = V$.

On peut facilement se convaincre qu'il est possible de construire 16 connecteurs logiques, se ramenant néanmoins tous aux 5 précédents (tab. C). Le même principe est valable pour toute connexion de plus de deux propositions. Le système précédent à 5 connecteurs peut lui aussi être simplifié. Ainsi $A \Leftrightarrow B$ a même valeur de vérité que $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, ce qui est facile à prouver. L'utilisation du connecteur $A \mid B$ (A nand B, non (A et B), SHEFFER), ou $A \triangledown B$ (A nor B, non (A ou B), conduit même à un système à un connecteur (tab. D).

Des relations très différentes s'obtiennent lorsque l'on abandonne le principe de la double valeur et que l'on autorise alors plus de deux valeurs de vérités. Malgré des applications intéressantes en mathématique intuitionniste (p. 19) ou en mécanique quantique, la logique à plus de deux valeurs joue un rôle de second plan.

Les lettres A, B, C, … ont été utilisées précédemment en tant que *variables propositionnelles* pour une proposition quelconque. Une expression écrite avec de telles variables s'appelle de même une forme propositionnelle, car elle devient une proposition par substitution. Une forme propositionnelle est dite *satisfiable* lorsqu'elle devient une proposition vraie par une substitution appropriée. Les formes propositionnelles *identiques* ou *tautologiques* constituent un cas particulier. Elles sont en effet vraies pour toute substitution. Par exemple : $A \Rightarrow A$, ou $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$. Par contre les formes propositionnelles $((A \Rightarrow B) \wedge A) \wedge \neg B$ ou $\neg A \wedge A$ sont fausses pour toute substitution (formes propositionnelles *contradictoires* ou *insatisfiable*).

(1)	$A \vee \neg A$	Principe du tiers exclu
(2)	$\neg(A \wedge \neg A)$	Loi de non-contradiction
(3)	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	Loi de la double négation
(4)	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	Lois de DE MORGAN
(5)	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	
(6)	$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$	Règle de contraposition
(7)	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	Règle du modus ponens
(8)	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	Règle du modus tollens
(9)	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	Règle du modus barbara
(10)	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Règles de distributivité
(11)	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	

A

Théorèmes fondamentaux du calcul propositionnel

(1)	$\neg \forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$	Règles de négation
(2)	$\neg \forall x \neg A(x) \Leftrightarrow \exists x\, A(x)$	
(3)	$\neg \exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$	
(4)	$\neg \exists x \neg A(x) \Leftrightarrow \forall x\, A(x)$	
(5)	$\forall x\, \forall y\, A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\, A(x, y)$	Règles d'échange
(6)	$\exists x\, \exists y\, A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\, A(x, y)$	
(7)	$\exists x\, \forall y\, A(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x\, A(x, y)$	
(8)	$\forall x\ \ A(x) \Rightarrow A(x)$	
(9)	$A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	

B

Attention au signe $\Rightarrow$ dans (7), (8) et (9) (et non $\Leftrightarrow$)

Théorèmes fondamentaux du calcul des prédicats

Expression : $P(x, y) \wedge Q(x, z, t) \Rightarrow R(u)$
Ensemble d'individus : $\omega = \mathbb{N}$

$\mathfrak{B}_\omega(x) = 2,\quad \mathfrak{B}_\omega(y) = 7,\quad \mathfrak{B}_\omega(z) = 1,\quad \mathfrak{B}_\omega(t) = 3,\quad \mathfrak{B}_\omega(u) = 16$

$\mathfrak{B}_\omega(P) = \{(1, 2), (2, 7), (7, 10)\}$

$\mathfrak{B}_\omega(Q) = \{(2, 3, 4), (3, 4, 5)\}$

$\mathfrak{B}_\omega(R) = \{16, 32, 48, 64, 80\}$

$(\mathfrak{B}_\omega(x), \mathfrak{B}_\omega(y)) \in \mathfrak{B}_\omega(P)$, d'où $\mathfrak{B}^*_\omega(P(x, y)) = V$

$(\mathfrak{B}_\omega(x), \mathfrak{B}_\omega(z), \mathfrak{B}_\omega(t)) \notin \mathfrak{B}_\omega(Q)$, d'où $\mathfrak{B}^*_\omega(Q(x, z, t)) = F$

$\mathfrak{B}_\omega(u) \in \mathfrak{B}_\omega(R)$, d'où $\mathfrak{B}^*_\omega(R(u)) = V$

La valeur de vérité induite par l'assignation $\mathfrak{B}_\omega$ est donc $\mathfrak{B}^*_\omega(P(x, y) \wedge Q(x, z, t) \Rightarrow R(u)) = V$.

C

Exemple d'une ω-assignation

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (A(x, y) \wedge A(y, z) \Rightarrow A(x, z)) \wedge \forall x \exists y\, A(x, y) \Rightarrow \exists x\, A(x, x)$$

L'expression écrite ci-dessus signifie qu'une relation transitive sur ω, pour laquelle tout élément peut être pris comme élément initial, est valable pour au moins une paire d'éléments égaux. Cette propriété est vraie lorsque ω est fini. Par contre, la propriété n'est plus vraie pour tout ω infini, par ex. lorsque $\omega = \mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels), A étant assignée à « est plus petit que », la propriété est fausse.

D

Exemple d'une expression ω-identique pour tout ω fini, mais non universelle

Principes et règles du calcul propositionnel

Les formes propositionnelles tautologiques s'appellent *théorèmes du calcul propositionnel*. Ceux-ci sont en mathématiques d'un intérêt tout particulier, car ils permettent de déterminer des *règles de raisonnement*, grâce auxquelles on construit de nouvelles propositions vraies à partir de propositions vraies. Quelques théorèmes particulièrement importants du calcul propositionnel sont présentés dans le tableau A. Pour simplifier l'écriture, certaines parenthèses ont été supprimées, avec la convention suivante : les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ont, dans cet ordre, une priorité croissante. On déduit de (7) et (9) les règles fondamentales suivantes :

Si $A \Rightarrow B$ et A sont vraies, B est vraie (*modus ponens* ou *principe du syllogisme*).

Si $A \Rightarrow B$ et $\neg B$ sont vraies, $\neg A$ est vraie (*modus tollens*).

Si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ sont vraies, $A \Rightarrow C$ est vraie (*modus barbara* ou *règle de transitivité*).

Une formulation plus simple s'obtient à partir des *figures de dérivation* suivantes :

$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
A	$\neg B$	$B \Rightarrow C$
----	----	----
B	$\neg A$	$A \Rightarrow C$

Il est toujours possible de déterminer la validité d'une forme propositionnelle en un nombre fini d'étapes, donc de savoir si elle constitue un théorème du calcul propositionnel. Il suffit en effet d'assigner aux variables propositionnelles toutes les valeurs de vérité autorisées. Cela revient à considérer les connecteurs comme des fonctions opérant sur les valeurs de vérité. Cette méthode est appelée *procédé sémantique*.

Il existe une autre méthode dite *syntaxique* visant à constituer un système complet de théorèmes du calcul propositionnel. Les formes propositionnelles sont alors considérées comme des suites de signes sans préoccupation d'une quelconque cohérence du contenu. Des règles prédéfinies permettent en un nombre fini d'étapes de construire, à partir de ces premières formes, de nouvelles formes propositionnelles. Il est alors possible de constituer un système de formes propositionnelles (*axiomes*) et de règles de dérivation à partir desquelles on peut *déduire* les théorèmes du calcul propositionnel cités ci-dessus.

Calcul des prédicats du premier ordre

Le calcul propositionnel n'est pas suffisant pour formaliser les théories mathématiques. Une analyse plus poussée des propositions conduit aux notions d'*individus*, de *prédicats*, de *termes de quantification* comme « pour tout » et « il existe ». Un individu est un objet d'un certain ensemble prédéfini. Un prédicat est une relation sur cet ensemble d'individus. Un prédicat à un argument s'appelle également *une propriété* (par exemple p. 15). On introduit enfin les quantificateurs $\forall x$ pour « quel que soit x » (quantificateur universel) et $\exists x$ pour « il existe x » (quantificateur existentiel), x étant une variable associée à un élément d'un ensemble d'individus. En remplaçant le prédicat à un argument « est un nombre premier » par P, la proposition « il existe un nombre premier entre 5 et 9 » peut s'écrire sous la forme $\exists x, P(x) \wedge 5 < x < 9$, x parcourant l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On peut l'écrire de manière plus concise sous la forme $\exists x \in \mathbb{N}, P(x) \wedge 5 < x < 9$. On peut remarquer qu'il s'agit ici d'une proposition et non d'une forme propositionnelle comme pourrait le faire supposer la présence de la variable x : x n'est en effet ici qu'une variable muette. On dit que x est *liée* au quantificateur. Les variables utilisées jusqu'à présent étaient par contre des variables *libres*.

Comme autres exemples, on peut citer pour l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$\forall x, \forall y, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow Pe(x, y) \vee Pe(y, x)$

$\forall x, \forall y, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists z, z \in \mathbb{R} \wedge S(z, x, y)$

où $Pe(x, y)$ signifie « x inférieur ou égal à y » et $S(z, x, y)$ « z est la somme de x et y ». Pe est donc un prédicat à deux arguments, S un prédicat à trois arguments.

Théorèmes du calcul des prédicats

Pour aboutir aux théorèmes du calcul des prédicats, il existe comme pour le calcul propositionnel deux méthodes.

La première méthode est dite sémantique. Elle consiste à appliquer l'ensemble des expressions dans l'ensemble {V, F} des valeurs de vérité à l'aide de la notion de *ω-assignation*, ω étant un ensemble d'individus donnés. Une ω-assignation $\mathfrak{B}_\omega$ est une application qui associe à toute variable d'individu un élément de ω et à toute variable de prédicat à n arguments une relation à n arguments dans ω (p. 31). $\mathfrak{B}_\omega$ induit alors une valeur de vérité $\mathfrak{B}^*_\omega$ à $P(x_1, \ldots, x_n)$. Celle-ci est égale à V si et seulement si $(\mathfrak{B}_\omega(x_1), \ldots, \mathfrak{B}_\omega(x_n)) \in \mathfrak{B}_\omega(P)$ (tab. C). Les variables liées doivent être traitées selon la signification du quantificateur. Une expression A est dite *ω-satisfiable* s'il existe $\mathfrak{B}_\omega$ tel que $\mathfrak{B}^*_\omega(A) = V$. A est dite *ω-identique* si $\mathfrak{B}^*_\omega(A) = V$ quelle que soit $\mathfrak{B}_\omega$. A est une forme propositionnelle *tautologique* ou *universellement vraie* ou un *théorème du calcul des prédicats*, si A est ω-identique quel que soit l'ensemble ω. Le théorème de LÖWENHEIM-SKOLEM, selon lequel une expression est tautologique s'il existe ω dénombrable pour lequel elle est ω-identique, est ici d'une utilité remarquable (cf. tab. D). Une ω-assignation pour laquelle tout un ensemble M d'expressions est satisfiable s'appelle un modèle de M selon ω.

La deuxième méthode (syntaxique) procède comme pour le calcul propositionnel par des axiomes et des règles de raisonnement. Il est ici également possible de fabriquer un système duquel dérivent tous les théorèmes du calcul des prédicats (*théorème de complétude* de GÖDEL). Par contre il n'est pas possible pour toutes les expressions de déterminer en un nombre fini d'étapes s'il s'agit ou non d'un théorème du calcul des prédicats (*Théorème d'indécidabilité* de CHURCH).

Logique des ordres
Moyens d'expression supplémentaires :
Pas de limitation dans la construction des niveaux
Caractéristiques particulières :
Incomplétude, Indécidabilité

Calcul des prédicats à l'ordre n ($n \geq 2$)
Moyens d'expression supplémentaires :
Variables (et constantes) pour des prédicats élargis
(Prédicats de prédicats (2e ordre),
Prédicats de prédicats de prédicats (3e ordre, etc.))
Quantificateurs portant sur des prédicats au sens étroit ou élargi
Limitation dans la construction des niveaux
(Prédicats élargis juqu'à l'ordre n, quantification
des variables jusqu'à l'ordre n-1)
Caractéristiques particulières :
Incomplétude, Indécidabilité

Calcul des prédicats à l'ordre 1 avec identité et variables fonctorielles
Moyens d'expression supplémentaires :
variables et constantes fonctorielles

Calcul des prédicats à l'ordre 1 avec identité
Moyen d'expression supplémentaire :
Signe d'égalité

Calcul des prédicats à l'ordre 1
Moyens d'expression supplémentaires :
Variables et constantes d'individu
Variables et constantes de prédicat
Quantificateurs portant sur des variables d'individu
Caractéristiques particulières :
Complétude, Indécidabilité

Calcul propositionnel
Moyens d'expression :
Variables et constantes propositionnelles
Connecteurs
Caractéristiques particulières :
Complétude, décidabilité

Construction de la logique mathématique

Extensions du calcul des prédicats du premier ordre
Pour élargir les applications du calcul des prédicats, on procède comme toujours à quelques extensions. La première consiste à introduire le *signe d'égalité* « = » pour exprimer *l'identité*. A travers l'identité, chaque élément est en relation avec lui-même mais ne l'est avec aucun autre. Comme c'est le cas pour d'autres symboles mathématiques, il n'est pas possible de définir le symbole d'égalité. Il semble alors sensé de ranger le signe d'égalité parmi les constantes logiques (*calcul des prédicats avec identité*).

Les prédicats ont été définis comme des relations sur un ensemble d'individus ω (p. 17). Soit alors une fonction à n variables sur ω (cf. p. 33). Elle définit une relation à $n + 1$ arguments toute particulière. Ainsi, l'application qui à toute paire ordonnée $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associe la somme $x + y = z \in \mathbb{R}$ est d'une part une fonction à 2 variables, mais d'autre part a été définie page 17 comme un prédicat à 3 arguments $S(z, x, y)$. L'écriture à l'aide de fonctions est donc une simplification. C'est pour cela que l'on autorise l'utilisation de variables dites *fonctorielles* ou *opératrices* dans l'écriture des formes propositionnelles. Le terme *foncteur* ou *opérateur* est utilisé ici au sens de fonction (à ne pas confondre avec les foncteurs de la page 249). L'expression $x + y$ ne forme néanmoins qu'un seul terme lorsque l'on utilise l'opérateur +. Par substitution, cette expression devient un nombre et non une proposition. L'extension terminologique ainsi décrite n'a alors d'intérêt qu'avec l'utilisation simultanée du signe d'égalité (*calcul des prédicats avec identité et variables fonctorielles*).

Calcul des prédicats d'ordre supérieur
La quantification ne portait jusqu'à présent que sur des variables d'individu. Cela suffit pour de vastes domaines en mathématiques, comme par exemple pour la théorie générale des structures. Par contre, lorsque l'on cherche à caractériser de manière axiomatique les nombres naturels (p. 53), il devient nécessaire de quantifier les variables de prédicat. Un prédicat à n arguments sur ω correspond à un sous-ensemble du produit cartésien de ω effectué n fois avec lui-même. La quantification nécessite alors l'usage de l'ensemble de tous les sous-ensembles de ce produit (calcul des prédicats au deuxième ordre). En introduisant et en quantifiant des prédicats de prédicats (et ainsi de suite), on est amené à construire une logique des prédicats par niveau, chaque niveau pouvant être défini à partir de la connaissance des niveaux inférieurs. S'il n'apparaît que des prédicats jusqu'à un niveau n, on parle de calcul des prédicats à l'ordre n. Lorsque l'on n'impose aucune limite dans la construction des niveaux, on dit simplement *logique des ordres*. Les possibilités offertes par les calculs des prédicats d'ordre supérieur sont illustrées par l'exemple du deuxième ordre suivant. On peut définir l'identité par $x = y \Leftrightarrow \forall P, P(x) \Leftrightarrow P(y)$, en supposant que la quantification porte sur tous les prédicats à un argument. Le signe d'égalité n'a plus alors à être introduit comme une constante logique.
Malheureusement, pour des logiques d'ordre supérieur à un, il n'est plus possible d'obtenir une concordance entre la construction sémantique et la construction syntaxique (*incomplétude* du calcul des prédicats élargi). En théorie élémentaire des nombres, cela signifie que l'on obtient grâce au calcul des prédicats au premier ordre un calcul logique complet, mais qu'il n'est pas possible de caractériser univoquement les nombres naturels. Cette caractérisation est certes possible au second ordre, mais il n'y a plus alors de procédé pour obtenir tous les théorèmes régissant les nombres naturels par une méthode syntaxique.

Le problème de la *consistance absolue* d'une théorie mathématique construite sur certains axiomes est étroitement lié à cette question. Cela consiste à démontrer qu'une formule contradictoire du type $A \wedge \neg A$ n'est pas dérivable. Une telle démonstration nécessite systématiquement des outils dérivant des calculs par lesquels sont formulés les axiomes. La consistance absolue de nombreux domaines mathématiques n'a, jusqu'à présent, pas encore été démontrée.

Intuitionnisme
Entre autres problèmes posés par le calcul des prédicats élargis, l'incomplétude a conduit à un certain nombre de critiques concernant les fondements de la logique dite classique présentée jusqu'ici, en particulier en ce qui concerne la notion d'infini. *La perception de l'infini actuel*, habituellement formulée, permet d'étudier l'ensemble des nombres naturels avec leurs propriétés comme on étudie un ensemble fini perçu comme un tout. *La perception de l'infini potentiel* n'autorise par contre à considérer que ce que l'on est capable de construire en un nombre fini d'étapes. L'ensemble des nombres naturels ne doit plus alors être perçu comme un tout, mais comme un domaine ouvert. Or, il existe des théorèmes concernant les nombres naturels qui ne peuvent être dérivés selon certaines règles en un nombre fini d'étapes (incomplétude du calcul des prédicats élargis). Il n'est plus alors possible de savoir si les propriétés des nombres naturels découlant de ces théorèmes sont valables ou non. On est ainsi obligé de rejeter le principe du tiers exclu lorsqu'il est utilisé sur des ensembles infinis, de même que le principe de la double valeur logique. L'intuitionnisme construit une toute autre logique sur ces bases. Son utilisation en mathématiques exclut toute démonstration d'existence non constructive, de même que les démonstrations indirectes (p. 21). Elle rejette de plus la méthode axiomatique, qui consiste justement à dépasser l'aspect constructif. On a ainsi tenté de diverses manières de s'éloigner du cadre très étroit de la logique classique. Les mathématiques modernes se basent toutefois encore généralement sur ses résultats.

Justifier la relation $\forall x\,(x + 0 = x)$ à partir des quatre axiomes :

(1) $\forall (x, y)\,((x = y) \Rightarrow (y = x))$

(2) $\forall (x, y)\,((x = y) \Rightarrow (A(x) \Rightarrow (A(y)))$

(3) $\forall (x, y)\,(x + y = y + x)$

(4) $\forall x\,(0 + x = x)$

Démonstration :

(1)	$\forall (x, y)\,\big((x = y) \Rightarrow (y = x)\big)$	
(2)	$\forall (x, y)\,\big((x = y) \Rightarrow A(x) \Rightarrow A(x)\big)$	
(3)	$\forall (x, y)\,(x + y = y + x)$	
(4)	$\forall x\,(0 + x = x)$	
(5)	$A(u) \Leftrightarrow u = z + 0$	
(6)	$0 + z = z + 0$	par définition
(7)	$A(0 + z)$	de (3) avec $x\vert 0,\ y\vert z$
(8)	$0 + z = z$	de (5) et (6)
(9)	$z = z + 0$	de (4)
(10)	$z + 0 = z$	de (7), (8) et (2)
(11)	$\forall x\,(x + 0 = x)$	de (9) et (1)

A

Exemple d'une démonstration directe formalisée

Justifier la relation :

$$\forall n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Démonstration :

La formule $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ est désignée par $A(n)$.

(1) Début de la récurrence

$A(0)$ est vraie, car $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$ signifie ici $0 \cdot 1$ qui est égal au second membre $\frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{3}$.

(2) Passage de n à $n + 1$

On suppose $A(n)$ vraie.

On en déduit, puisque :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \left(\sum_{k=0}^{n} k(k+1)\right) + (n+1)(n+2),$$

soit par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{(n+1)(n+2)\cdot 3}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3},$$

c.-à-d. $A(n+1)$.

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$ se généralise en $\forall n, A(n) \Rightarrow A(n+1)$. De (1) et (2), on déduit le résultat demandé.

B

Exemple d'une démonstration par récurrence

Démonstration

Une **démonstration** consiste à déduire une proposition à partir d'autres propositions suivant certaines règles logiques de raisonnement. Il est clair que toutes les propositions mathématiques ne sont pas démontrables, sinon on aboutirait à un cercle vicieux. Certaines propositions ne peuvent donc être déduites d'aucune autre. Le mathématicien fonde, de ce fait, ses théories sur des propositions postulées comme vraies qu'il appelle *axiomes*, et n'utilise que des démonstrations dérivant de ces axiomes. Tous les résultats mathématiques se ramènent donc d'une façon ou d'une autre à des axiomes (exemples de systèmes axiomatiques p. 39, 53, 133). Ce que l'on peut déduire d'un système donné d'axiomes dépend alors plutôt de la logique choisie, c'est-à-dire des règles de raisonnement adoptées.

Le calcul propositionnel et le calcul des prédicats permettent de construire facilement des systèmes de règles de raisonnement pour bien formaliser le contenu des résultats habituels. Néanmoins, même dans l'enseignement des mathématiques supérieures, on autorise des démonstrations exactes au niveau du contenu mais non totalement formalisées.

La méthode de démonstration la plus connue est celle de la **démonstration directe**, reposant sur le modus ponens (p. 17). Les règles fondamentales de la démonstration directe sont d'une part celles qui concernent l'introduction et l'élimination de connecteurs et de quantificateurs, d'autre part celle de la substitution. Ainsi, $y\,|\,z$, dans l'exemple A, signifie qu'on a le droit de remplacer y par z si y est variable libre.

D'un autre côté, il est bon de remarquer qu'on peut introduire dans une démonstration des hypothèses non axiomatiques qui seront éliminées par la suite. Ainsi, lorsque l'on veut dériver une proposition A d'un ensemble d'axiomes M, il est parfois plus judicieux de supposer la négation $\neg A$, d'en déduire une proposition B, dont la négation $\neg B$ peut être dérivée de M. De $\neg A \Rightarrow B$ et de $\neg B$ on en déduit à l'aide du modus tollens (p. 17) $\neg\neg A$ et ainsi A (**démonstration indirecte ou par l'absurde**).

Si l'affirmation A est du type $C \Rightarrow D$, la négation $\neg A$ est équivalente à $C \wedge \neg D$. Des cas particuliers de démonstration indirecte peuvent être construits lorsque de la supposition $\neg A$, c'est-à-dire $C \wedge \neg D$, on peut déduire soit $\neg C$, soit D.

Un procédé similaire consiste à démontrer la contraposition $\neg D \Rightarrow \neg C$ (p.16) à la place de $C \Rightarrow D$. L'exemple le plus connu de démonstration indirecte est celui de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (p. 58).

Les règles de raisonnement du modus ponens et du modus tollens justifient d'autre part les dénominations couramment utilisées de *condition nécessaire* ou *suffisante*. Quand $A \Rightarrow B$ est vraie, on dit que A est une condition suffisante pour B ; B est alors une condition nécessaire pour A.

Démonstration par récurrence

Lorsque la proposition à démontrer est du type $\forall n, A(n)$, où $A(n)$ est une fonction sur l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$, on peut faire reposer la démonstration sur une propriété particulière des nombres naturels décrite dans le 5[e] axiome de PEANO (p. 53). Le procédé consiste à démontrer tout d'abord $A(0)$ (début de la récurrence), puis à démontrer $\forall n, A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (déduction de $n + 1$ à partir de n). En particulier les propositions $A(0) \Rightarrow A(1)$, $A(1) \Rightarrow A(2)$, etc. sont alors vraies. En utilisant de manière répétitive le modus ponens, on en déduit $A(1), A(2)$, etc. et donc $\forall n, A(n)$ (tab. B).

L'*induction transfinie* (p. 49) permet d'étendre le procédé.

Méthode axiomatique

Lorsque l'on construit des systèmes axiomatiques, on impose la *consistance absolue* comme citée plus haut (p. 19), de même que l'*indépendance* (aucun axiome ne peut être dérivé de ceux qui le précèdent). D'autre part, une question intéressante est de savoir si toutes les propositions vraies d'une théorie peuvent être déduites des axiomes. La réponse est négative pour de nombreuses théories utilisant des outils logiques (p. 19).

Définition

La **définition** est la délimitation précise d'un concept dans un cadre plus général en utilisant d'autres concepts. Les problèmes sont analogues à ceux de la démonstration. On aboutit nécessairement à des concepts de base, qui ne peuvent pas être définis par la méthode citée ci-dessus. Pour préciser les *définitions explicites*, abordées en premier, on introduit les notions de *definiendum*, le concept à définir, et de *definiens*, le ou les concept(s) permettant de l'expliquer.

On écrit :

Definiendum : = Definiens ou

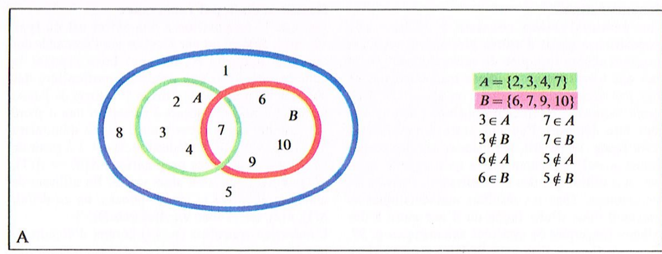
Definiendum : ⇔ Definiens

suivant que le definiens est un mot ou une proposition. L'écriture est alors simplifiée, le definiendum pouvant d'ailleurs toujours être remplacé par le definiens lorsque le besoin s'en fait sentir.

Un certain nombre de concepts, en particulier bien sûr les concepts de base Nombre, Point, Droite, Intervalle, Aire d'une surface, etc., ne sont pas définis de manière explicite, mais de manière *implicite*, grâce aux relations réciproques pouvant être formulées dans un système axiomatique approprié.

Selon le théorème de définissabilité de BETH, il est possible de formuler sous forme explicite toute définition implicite d'une relation ou d'une fonction obtenue à l'aide des outils du calcul des prédicats au premier ordre.

De manière analogue à celle de la démonstration par récurrence, on peut introduire la définition *par récurrence* ou *récursive*. Ainsi $n!$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $0! = 1$ et $(n+1)! = n!\,(n+1)$.



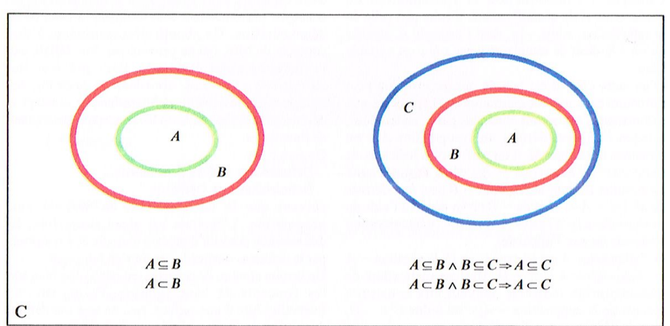
Ensembles et éléments, représentation des ensembles

$M_1 := \{3, 5, 7\}$
$M_2 := \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0\}$
M_3 est l'ensemble des nombres premiers impairs à un chiffre
M_4 est l'ensemble des diviseurs premiers de 315
M_5 est l'ensemble des nombres impairs compris entre 2 et 8

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5$$

B

Diverses descriptions possibles d'un même ensemble



Sous-ensembles

$A_0 = \emptyset$ $\mathfrak{P}(A_0) = \{\emptyset\}$
$A_1 = \{a_1\}$ $\mathfrak{P}(A_1) = \{\emptyset, \{a_1\}\}$
$A_2 = \{a_1, a_2\}$ $\mathfrak{P}(A_2) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}\}$
$A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ $\mathfrak{P}(A_3) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$
....
$A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $\mathfrak{P}(A_n) = \mathfrak{P}(A_{n-1}) \cup \{\{a_n\}\} \cup \{\{a_1, a_n\}, \{a_2, a_n\}, \ldots, \{a_{n-1}, a_n\}\} \cup$
$\cup \{\{a_1, a_2, a_n\}, \{a_1, a_3, a_n\}, \ldots, \{a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\}\} \cup \ldots \cup \{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\}$

D

Ensemble des parties d'un ensemble

La notion d'**ensemble** joue un rôle fondamental en mathématiques modernes. Le maniement des ensembles a, de plus, considérablement influencé la recherche fondamentale, car des paradoxes résultaient de la définition originelle des ensembles formulée par CANTOR (déf. 1). Néanmoins, cette définition est encore couramment utilisée aujourd'hui, à condition toutefois d'éviter la formation des ensembles qui se sont révélés paradoxaux. Cette *théorie naïve des ensembles* est exposée ci-dessous. La rigueur souhaitable dans le développement d'une théorie contenant une définition précise mais restrictive de la notion d'ensemble, permettant de préserver les propriétés à signification mathématique, sera abordée par la suite dans la *théorie axiomatique des ensembles* (p. 29).

Notions initiales

Déf. 1 : Un *ensemble* est une collection d'objets issus de notre perception ou de notre pensée, tous déterminés et distincts. Ces objets s'appellent *éléments* de l'ensemble.

On utilise les lettres a, b, c, ... pour désigner des éléments d'un ensemble, les lettres A, B, C, ... pour désigner des ensembles. $a \in A$ signifie que a est un élément de A, $b \notin M$ signifie que b n'est pas un élément de M (fig. A).

Les principaux objets mathématiques que l'on réunit au sein d'ensembles sont les nombres, les figures géométriques, les applications, etc. Mais il est tout aussi sensé de vouloir former des ensembles à partir des chaises d'une salle de concert, des pièces d'une machine, des accidents de la route durant une année en France, des habitants d'une grande ville. Les ensembles peuvent être finis ou infinis (p. 35). Les ensembles finis peuvent être décrits en répertoriant tous leurs éléments, généralement entre accolades, comme par exemple $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Des ensembles quelconques peuvent être décrits par des propriétés caractéristiques. On écrit alors de manière simplifiée $\{x \mid E(x)\}$ pour l'ensemble des x vérifiant $E(x)$. Ceci signifie que $y \in \{x \mid E(x)\}$ si et seulement si $E(y)$ est vraie (tab. B). Si $P(x)$ signifie « x est un nombre premier », $\{x \mid P(x) \wedge x < 10\}$ est l'ensemble des nombres premiers plus petits que 10, ce que l'on peut aussi écrire sous la forme $\{2, 3, 5, 7\}$. Par contre $\{x \mid P(x)\}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres premiers, ne peut plus être décrit en répertoriant tous les éléments, car il s'agit d'un ensemble infini.

Certains ensembles particulièrement importants ont une notation symbolisée. Ainsi les symboles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont utilisés pour représenter respectivement les ensembles des nombres naturels, entiers relatifs, rationnels, réels, complexes.

Déf. 2 : Deux ensembles sont dits *égaux* s'ils contiennent exactement les mêmes éléments, $A = B :\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

L'ordre des éléments n'a donc aucune importance. Ainsi $\{2, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 2, 7\}$. La relation d'égalité entre les ensembles est une relation d'équivalence (p.31). Une condition irréalisable du type $\{x \mid P(x) \wedge 31 < x < 37\}$ introduit la notion d'*ensemble vide*, symbolisé par $\emptyset$. La définition de l'égalité permet de conclure à l'unicité de l'ensemble vide, que l'on peut alors

définir de manière simple par :

Déf. 3 : $\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$.

Représentation des ensembles

Pour se représenter une collection d'éléments, on peut imaginer ceux-ci sous forme de points d'un plan entourés d'un cercle ou de toute autre courbe fermée (*Représentation* d'EULER ou de VENN) (fig. A).

Sous-ensemble et ensemble des parties d'un ensemble

Lorsque tous les éléments d'un ensemble A sont éléments d'un ensemble B, on dit que A est un *sous-ensemble* de B, ce que l'on symbolise par $A \subseteq B$.

Déf. 4 : $A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

On définit aussi de manière plus forte un *sous-ensemble strict* :

Déf. 5 : $A \subset B :\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Cela signifie qu'il existe des éléments de B qui ne sont pas éléments de A (fig. C).

La relation binaire $\subseteq$ vérifie les propriétés suivantes :

$A \subseteq B$	Réflexivité,
$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$	Antisymétrie,
$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B$	Transitivité (fig. C).

C'est ce que l'on appelle une relation d'ordre (p. 31 et p. 43).

Il est important de ne pas confondre $\in$ et $\subset$. On a ainsi $2 \in \{2, 3, 4\}$, mais non $2 \subset \{2, 3, 4\}$. Par contre $\{2\} \subset \{2, 3, 4\}$.

Pour tout ensemble A, $\emptyset \subseteq A$. Si $A \neq \emptyset$, la propriété plus forte $\emptyset \subset A$ est vérifiée.

Les ensembles eux-mêmes peuvent être éléments d'un ensemble (*ensemble d'ensembles*). Un ensemble d'ensembles particulier est l'ensemble des parties d'un ensemble A, noté $\mathfrak{P}(A)$.

Déf. 6 : $\mathfrak{P}(A) := \{x \mid x \subseteq A\}$ (tab. D).

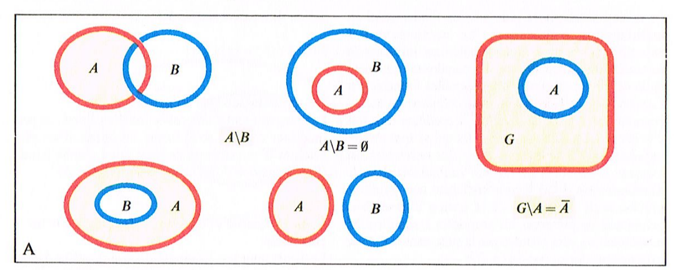
On a la propriété suivante :

Théorème : *L'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments contient 2^n éléments ($n \in \mathbb{N}$).*
La démonstration s'obtient par récurrence sur n.

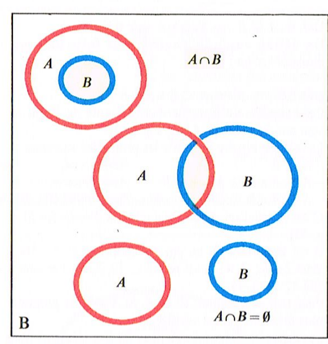
Construction d'ensembles paradoxaux

La construction d'ensemble d'ensembles nécessite des précautions particulières. Ainsi, peut-on concevoir qu'un ensemble se contienne, ou ne se contienne pas, lui-même comme élément ? Dans l'affirmative, RUSSELL propose l'étude de l'ensemble R des ensembles ne se contenant pas comme élément, c'est-à-dire $R := \{x \mid x \notin x\}$. On a donc $x \in R \Leftrightarrow x \notin x$. Cette propriété de définition devrait être en particulier vérifiable pour R ; mais si $R \in R$, alors $R \notin R$, et si $R \notin R$, alors $R \in R$. C'est le *paradoxe de* RUSSELL.

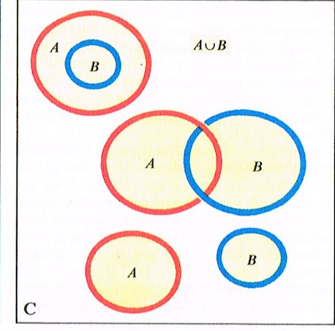
L'ensemble de tous les ensembles (*ensemble universel*) est également une notion paradoxale. En évitant de telles constructions, on tente alors, en théorie naïve des ensembles, d'échapper à ces paradoxes.



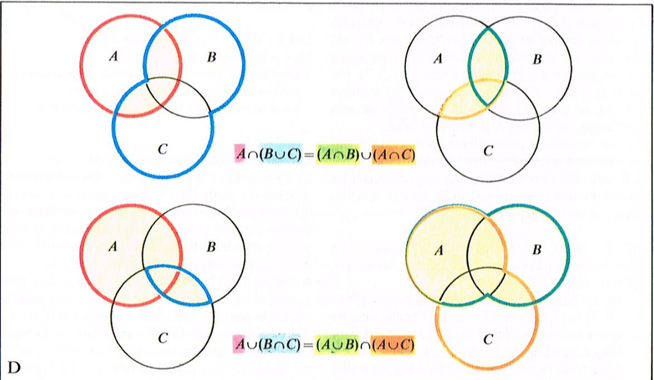
Partie restante, complémentaire



Intersection



Réunion



Distributivité de ∩ et de ∪

Opérations algébriques sur les ensembles

Les opérations algébriques sur les ensembles sont d'une grande importance pour les applications. Elles ont des propriétés comparables à celles des opérations du calcul propositionnel ou de l'arithmétique (p. 39).

Déf. 1 : $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (fig. A).

$A \setminus B$ se lit A moins B. Cet ensemble contient exactement les éléments de A qui ne sont pas éléments de B.

Si $A \subseteq G$, $G \setminus A$ est également appelé le *complémentaire de A dans G* (fig. A), ce que l'on note aussi par $\complement_G A$, ou $\complement A$ lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur l'ensemble G. Il est ainsi possible d'écrire $\complement A$ lorsque dans une théorie donnée, G représente l'ensemble des individus sur lequel repose la théorie, c'est-à-dire *l'ensemble fondamental*. Comme la notion d'ensemble universel est paradoxale (p. 23), il n'est pas possible d'éviter de mentionner l'ensemble G lors de la construction du complémentaire.

Les notions de complémentaire et de négation sont liées par $x \in G \Rightarrow (x \in G \setminus A \Leftrightarrow \neg\, x \in A)$.

Les opérations algébriques entre ensembles les plus importantes sont *l'intersection* et *la réunion* de deux ensembles.

Déf. 2 : $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (fig. B).

$A \cap B$ (*intersection* de A et B) est donc l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Le symbole $\cap$ rappelle $\wedge$. Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont *disjoints*.

Déf. 3 : $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (fig. C).

$A \cup B$ (*réunion* de A et B) est donc l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A ou à B (ou inclusif !). Le symbole $\cup$ rappelle $\vee$. Les propriétés fondamentales de $\cap$ et de $\cup$ se déduisent de celles de $\wedge$ et de $\vee$:

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{array}\right\} \textit{Commutativité}$$

$$\left.\begin{array}{l} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{array}\right\} \textit{Associativité}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\} \textit{Distributivité}$$

On peut retrouver ces propriétés à l'aide de diagrammes (fig. D).

Du fait de la grande similitude formelle entre ces opérations et les règles d'addition et de multiplication dans les ensembles de nombres (structures algébriques, p. 39), le domaine des mathématiques qui étudie les opérations entre ensembles s'appelle *algèbre des ensembles*.

Autres propriétés :

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{array}\right\} \textit{Absorption}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{array}\right\} \textit{Idempotence}$$

Il est possible de définir la réunion et l'intersection pour plus de deux ensembles. Soit I un ensemble fini ou infini d'indices. On associe à chaque $i \in I$ un ensemble A_i. Par définition, on a alors :

Déf. 4 : $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall\, i, i \in I \Rightarrow x \in A_i\}$.

Déf. 5 : $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists\, i, i \in I \wedge x \in A_i\}$.

L'ensemble vide et l'ensemble fondamental ont encore les propriétés suivantes :

$A \cap \varnothing = \varnothing$, $\quad A \cup \varnothing = A$,

$A \cap G = A$, $\quad A \cup G = G$,

$A \cap (G \setminus A) = \varnothing$, $\quad A \cup (G \setminus A) = G$.

D'autre part, on vérifie les *lois* de DE MORGAN :

$G \setminus (A \cap B) = (G \setminus A) \cup (G \setminus B)$ et $G \setminus (A \cup B) = (G \setminus A) \cap (G \setminus B)$.

Applications

Les opérations algébriques sur les ensembles apparaissent dans tous les domaines mathématiques. En voici quelques exemples tirés des mathématiques élémentaires : l'intersection de l'ensemble T_2 des multiples de 2 et de l'ensemble T_3 des multiples de 3 s'identifie à l'ensemble T_6 des multiples de 6. De manière plus générale, on a $T_a \cap T_b = T_{ab}$ si a et b sont premiers entre eux. On en déduit alors des règles de divisibilité.

En algèbre, *l'ensemble des solutions d'un système d'équations* est l'intersection des ensembles des solutions de chacune des équations. Une solution graphique permet de le visualiser comme section commune des graphes des fonctions respectivement associées à chacune des équations. Cela explique d'ailleurs la terminologie intersection.

Il est possible de construire d'autres exemples à partir des inéquations. L'ensemble des solutions d'une inéquation linéaire à deux inconnues est représenté graphiquement par un demi-plan. Lorsque plusieurs contraintes sont imposées sous formes d'inéquations, l'ensemble des solutions est un domaine polygonal obtenu comme intersection de demi-plans (programmation linéaire, p. 479). Ainsi soit à résoudre $|x+2| > 7$ dans l'ensemble des nombres réels. On a l'équivalence suivante :
$|x+2| > 7 \Leftrightarrow x > 5 \vee x < -9$. L'ensemble des solutions s'obtient alors comme réunion des ensembles des solutions des inéquations reliées par $\vee$. D'autre part, par $|x+2| > 7 \Leftrightarrow \neg\, |x+2| \leq 7$, on peut d'abord construire le complémentaire de l'ensemble des solutions de $|x+2| \leq 7$, et passer ensuite à l'ensemble demandé.

Partition

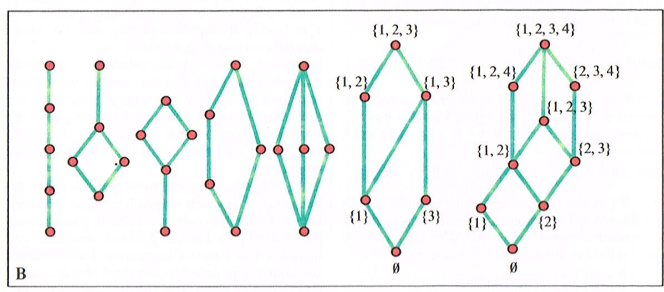
Déf. 6 : Si $\bigcup_{i \in I} A_i = G$ et si tous les A_i sont supposés $\neq \varnothing$ et disjoints deux à deux, l'ensemble $\{A_i\}$ s'appelle une *partition* de G.

Les partitions les plus importantes en mathématiques sont celles obtenues sous forme de classes d'équivalence selon une relation d'équivalence (p. 31). Les nombres rationnels, les vecteurs et de nombreuses autres notions mathématiques sont ainsi définies sous forme de classes d'équivalence. C'est ainsi que dans un problème de construction géométrique, il importe simplement de mettre en place un représentant d'une classe de figures congruentes données.

(1)	$\forall a\ \forall b\ (a \overline{\cap} b = b \overline{\cap} a)$	Commutativité
	$\forall a\ \forall b\ (a \underline{\cup} b = b \underline{\cup} a)$	
	$\forall a\ \forall b\ \forall c\ ((a \overline{\cap} b) \overline{\cap} c = a \overline{\cap} (b \overline{\cap} c))$	Associativité
	$\forall a\ \forall b\ \forall c\ ((a \underline{\cup} b) \underline{\cup} c = a \underline{\cup} (b \underline{\cup} c))$	
	$\forall a\ \forall b\ (a \overline{\cap} (a \underline{\cup} b) = a)$	Absorption
	$\forall a\ \forall b\ (a \underline{\cup} (a \overline{\cap} b) = a)$	
(2)	$\exists n\ \forall a\ (a \overline{\cap} n = n \wedge a \underline{\cup} n = a)$	Existence d'un élément nul *n* et d'un élément universel *e*
	$\exists e\ \forall a\ (a \overline{\cap} e = a \wedge a \underline{\cup} e = e)$	
(3)	$\forall a\ \exists a'\ (a \overline{\cap} a' = n \wedge a \underline{\cup} a' = e)$	Complémentation
(4)	$\forall a\ \forall b\ \forall c\ (a \overline{\cap} (b \underline{\cup} c) = (a \overline{\cap} b) \underline{\cup} (a \overline{\cap} c))$	Distributivité
	$\forall a\ \forall b\ \forall c\ (a \underline{\cup} (b \overline{\cap} c) = (a \underline{\cup} b) \overline{\cap} (a \underline{\cup} c))$	

A

Axiomes constitutifs des treillis



Diagrammes de HASSE pour tous les treillis à 5 éléments et pour deux treillis d'ensembles

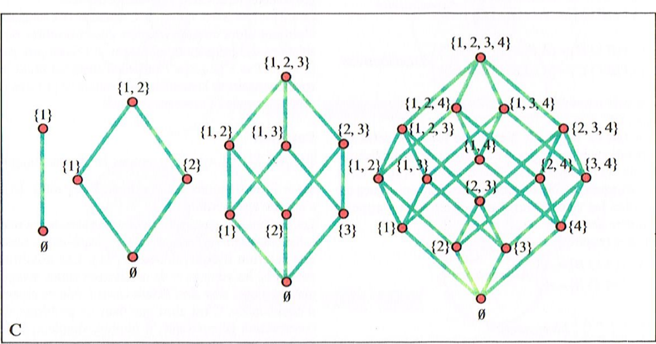


Diagramme de HASSE pour des treillis booléens

On a pu observer précédemment une forte analogie entre les opérations ∩, ∪ et – de la théorie des ensembles et certains résultats du calcul propositionnel. D'autres branches des mathématiques font intervenir également des opérations similaires. Cette constatation a conduit à développer une théorie abstraite et axiomatique d'une telle structure, appelée *théorie des treillis*.

Treillis, treillis d'ensembles

Déf. 1 : Un *treillis* est un ensemble T dans lequel sont définies deux lois internes $\overline{\cap}$ et $\underline{\cup}$ vérifiant les axiomes (1) du tableau A. Si (1) et (2) sont vérifiés, on dit que T contient un élément nul et un élément universel ; si (1), (2) et (3) sont vérifiés, T est dit *complémenté* ; si (1) et (4) sont vérifiés, T est dit *distributif* ; si (1) à (4) sont vérifiés, T est dit *booléen*.

Exemples :

a. L'ensemble $\mathfrak{P}(M)$ des parties d'un ensemble M est un treillis booléen pour les lois ∩, ∪, – avec ∅ comme élément nul et M comme élément universel.

b. Soit la relation d'équivalence $(A_1 \Leftrightarrow A_2)$ définie sur l'ensemble des propositions du calcul propositionnel. L'ensemble des classes d'équivalence $\{a, b, \ldots\}$ pour cette relation est un treillis booléen, où les lois internes sont définies de la manière suivante : $a \overline{\cap} b$, $a \underline{\cup} b$, a' sont respectivement les classes de $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$ lorsque $A \in a$ et $B \in b$. n est la classe des propositions contradictoires, e celle des propositions tautologiques.

c. L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels constitue un treillis distributif et non complémenté, $a \overline{\cap} b$ étant la borne inférieure et $a \underline{\cup} b$ la borne supérieure de a et b pour la relation ≤ (p. 45).

d. $\mathbb{N}$ forme également un treillis distributif pour les lois $a \overline{\cap} b = \text{pgcd}(a, b)$ et $a \underline{\cup} b = \text{ppcm}(a, b)$ (p. 118).

e. L'ensemble des sous-espaces d'un espace projectif (p. 141) constitue un treillis complémenté non distributif, $a \overline{\cap} b$ étant soit ∅, soit le sous-espace projectif intersection, au sens de la théorie des ensembles, des sous-espaces a et b, et $a \underline{\cup} b$ le plus petit espace projectif contenant à la fois a et b. L'espace lui-même est alors l'élément universel, l'ensemble vide l'élément nul.

L'exemple a. conduit à définir :

Déf. 2 : Un ensemble N de sous-ensembles d'un ensemble M, contenant M et ∅, et tel que N contienne aussi l'intersection et la réunion de toute paire d'éléments de N s'appelle un *treillis d'ensembles*.

On peut remarquer la dualité du système axiomatique du tableau A dans le sens que tout axiome du système se transforme en un autre axiome du système par échange simultané de $\overline{\cap}$ et $\underline{\cup}$ et de n et e. Chaque démonstration de la théorie des treillis fournit alors une démonstration duale. Ainsi, les axiomes définissant l'absorption permettent de déduire $a \overline{\cap} (a \underline{\cup} a) = a$ et $a \underline{\cup} \big(a \overline{\cap} (a \underline{\cup} a)\big) = a$ en substituant dans le premier axiome a à b et dans le second $a \underline{\cup} a$ à b. Par substitution, on en déduit le théorème d'idempotence $a \underline{\cup} a = a$. Par dualité, on en déduit $a \overline{\cap} a = a$. Les treillis distributifs ont la propriété suivante :

Théorème d'unicité pour un treillis distributif

$a \overline{\cap} c = b \overline{\cap} c \wedge a \underline{\cup} c = b \underline{\cup} c \Rightarrow a = b.$

Démonstration : de $a \overline{\cap} c = b \overline{\cap} c$, on en déduit :

$a \underline{\cup} (a \overline{\cap} c) = a \underline{\cup} (b \overline{\cap} c)$,

ce qui par absorption et distributivité devient :

$a = (a \underline{\cup} b) \overline{\cap} (a \underline{\cup} c)$.

Par échange de a et b et par commutativité, on en déduit :

$b = (a \underline{\cup} b) \overline{\cap} (b \underline{\cup} c)$.

D'autre part, on a $a \underline{\cup} c = b \underline{\cup} c$, ce qui entraîne que les seconds membres des deux égalités précédentes sont égaux et donc que $a = b$.

Une conséquence de ce théorème est l'unicité du complémentaire dans un treillis booléen.

Lien avec les relations d'ordre

Soit T un treillis. La relation binaire dans T définie par $a \leqslant b :\Leftrightarrow a = a \overline{\cap} b$ vérifie toutes les propriétés d'une relation d'ordre (p. 43). Selon cette relation d'ordre, $a \overline{\cap} b$ est la borne inférieure de a et b, $a \underline{\cup} b$ la borne supérieure de a et b (p. 45). De même, si on considère un ensemble ordonné M (p. 43) dans lequel toute paire d'éléments possède une borne inférieure et une borne supérieure, on constate qu'un tel ensemble vérifie les axiomes de la théorie des treillis : $a \overline{\cap} b$ est la borne inférieure de a et b, $a \underline{\cup} b$ la borne supérieure de a et b. Lorsque M contient un plus petit élément et un plus grand élément, ceux-ci jouent respectivement le rôle d'élément nul et d'élément universel.

Ce lien avec les relations d'ordre permet de visualiser les treillis finis à l'aide de *diagrammes de* HASSE (p. 43) (fig. B).

L'ensemble des parties d'un ensemble à p éléments constitue un treillis booléen à 2^p éléments. On appelle *atome* d'un treillis booléen fini T tout élément minimal de $T \setminus \{n\}$ pour la relation d'ordre $\leqslant$. Alors tout élément a de $T \setminus \{n\}$ est de la forme $\underline{\cup}\, \alpha_i$, où les α_i sont des atomes. Cela signifie que tout treillis booléen fini est isomorphe (p. 37) à l'ensemble des parties d'un ensemble fini (fig. C). Son cardinal est donc toujours une puissance de 2. De façon plus générale, tout treillis distributif est isomorphe à un treillis d'ensembles.

Anneaux booléens

Les deux opérations définies par

$a \cdot b := a \overline{\cap} b$

$a + b := (a \overline{\cap} b') \underline{\cup} (a' \overline{\cap} b)$

introduisent les propriétés les plus intéressantes des treillis booléens. On démontre en effet qu'on structure ainsi un tel treillis en anneau commutatif unitaire (p. 41). De plus, $\forall a\ (a \cdot a = a)$ (*anneau idempotent*), et $\forall a\ (a + a = n)$. Réciproquement, il est possible de construire à partir d'un anneau commutatif unitaire et idempotent un treillis booléen, avec les conventions suivantes :

$a \overline{\cap} b := a \cdot b$;

$a \underline{\cup} b : a + b + a \cdot b$;

$a' := e + a$.

(1) Épiménide (vers 600 avant J.-C.)
Le Crétois Épiménide affirme : « Ce que je dis présentement est un mensonge. »
Si É. ment, son affirmation est fausse et il n'a donc pas menti. S'il dit la vérité, alors son affirmation est vraie et il a donc menti.

(2) Proklos (vers 450 après J.-C.)
Protagoras enseigne le droit à un disciple. Il est convenu que celui-ci n'aura à payer les frais d'études qu'après avoir gagné son premier procès. Comme le disciple ne se charge d'aucun procès après ses études, P. décide de porter plainte pour l'obliger à payer les frais de celles-ci. Son argument est le suivant : si je gagne mon procès, je récupère mon argent du fait du jugement prononcé ; si je perds mon procès, je récupère mon argent du fait de l'accord passé. Le disciple argumente de manière inverse : dans tous les cas, il n'a pas à payer, soit du fait de l'accord passé, soit du fait du jugement.

(3) Grelling (1908)
On sépare l'ensemble des adjectifs français (mots caractérisant une propriété) en deux classes :
a) Adjectifs hétérologiques : ce sont ceux qui ne sont pas ce qu'ils signifient. Par ex. l'adjectif « long » qui est court, l'adjectif « allemand » qui est français, l'adjectif « unisyllabique » qui est multisyllabique.
b) Adjectifs autologiques : ce sont ceux qui sont ce qu'ils signifient. Par ex. les adjectifs « court », « français », « multisyllabique ».
Le problème de la classe de l'adjectif « hétérologique » est paradoxal. Lorsqu'on suppose qu'il appartient à a), on en déduit qu'il appartient à b) et inversement.

A

Exemples d'antinomies sémantiques

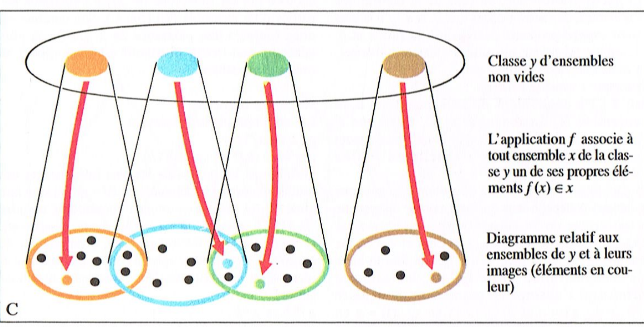
(1) Burali-Forti (1897)
On considère l'ensemble B, s'il existe, de tous les ordinaux. Comme tout ensemble d'ordinaux est bien ordonné, B a un ordinal B' évidemment supérieur à tous les éléments de B. D'après la déf. de B, $B' \in B$. Or $B' \cup \{B'\}$ est un ordinal strictement supérieur à B', alors qu'il appartient lui aussi à B. Il y a contradiction (cf. p. 49).

(2) Cantor (1899)
On considère l'ensemble C, s'il existe, de tous les ensembles (ensemble universel). En particulier toute partie de C est un élément de C, et donc $\mathfrak{P}(C) \subset C$. Par suite, Card. $(\mathfrak{P}((C)) \leq$ Card. (C). Mais Card. $(\mathfrak{P}(C)) >$ Card. (C) (p. 35). Il y a contradiction.

(3) Russel (1903)
On considère l'ensemble R, s'il existe, de tous les ensembles E tels que $E \notin E$. Si $R \notin R$, alors $R \in R$, et si $R \in R$, alors $R \notin R$. Il y a contradiction (p. 23).

B

Exemples d'antinomies syntaxiques



Axiome du choix

La théorie naïve des ensembles engendre des contradictions. Les cheminements suivis pour aboutir à celles-ci s'appellent des **antinomies** (p. 23). Leur analyse a imposé une révision de la construction originelle de la théorie des ensembles.
On distingue deux types d'antinomies. Une *antinomie syntaxique* mène à la contradiction par déduction purement formelle (tab. B). Une *antinomie sémantique* a par contre un contenu contradictoire (tab. A). Si on analyse une antinomie sémantique, on découvre un abus de langage, puisqu'il n'est fait aucune distinction entre significations courantes et significations plus élaborées (A_1), entre propriétés triviales et propriétés affinées (A_3).
L'application aux mathématiques, en particulier à la théorie des ensembles à laquelle appartiennent toutes les antinomies syntaxiques, signifie qu'il faudra par exemple organiser les relations entre objets mathématiques dans le sens suivant : après avoir défini un ensemble fondamental M, faire la distinction entre éléments de M, ensembles d'éléments de M, ensembles d'ensembles d'éléments de M, etc. Pour éviter toute confusion, il importe évidemment de noter différemment les variables à chacun des niveaux. Dans une telle théorie, une expression du type $x \in y$ serait valable uniquement lorsque le niveau de y dépasse d'une unité celui de x. Russell a basé sa *théorie des types* sur ces réflexions. Comme des expressions de la forme $x \in x$ ou $\neg x \in x$ y sont interdites, cette théorie empêche la formation des antinomies précédemment citées. Plus tard a été développée la **théorie axiomatique des ensembles**. Cette théorie découle du même principe en n'appelant ensembles que certaines classes d'objets ayant des propriétés caractéristiques définies de manière axiomatique.
Divers systèmes axiomatiques ont été formulés. Il est cependant toujours nécessaire de considérer des objets notés par les variables $x, y, z\ldots$ et appelés classes. On peut alors définir entre eux la relation binaire $x \in y$. Les classes qui sont éléments d'au moins une classe seront par la suite appelées ensembles.

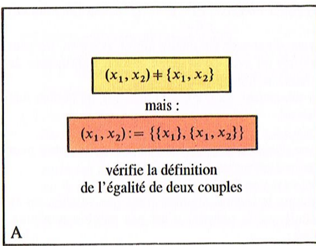
Déf. 1 : Ens $x :\Leftrightarrow \exists y, x \in y$.
Deux ensembles sont dits égaux lorsqu'ils sont éléments de la même classe tout en ayant les mêmes éléments.

Déf. 2 : $x = y \Leftrightarrow \forall z\,(x \in z \Leftrightarrow y \in z) \wedge \forall z\,(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$.
On impose alors pour les ensembles ainsi définis les axiomes suivants :

(1) $\exists x$, Ens x (*axiome d'existence*)
(2) $\forall z\,(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$ (*axiome d'extension*)
(3) $\forall x\,(A(x) \Rightarrow \text{Ens}\,x) \Rightarrow \exists y\,\forall x\,(x \in y \Leftrightarrow A(x))$ (*axiome de compréhension*)
(4) Ens $\varnothing$ (*axiome de l'ensemble vide*)
(5) Ens $x \Rightarrow$ Ens $\{x\}$ (*axiome des singletons*)
(6) Ens $x \wedge$ Ens $y \Rightarrow$ Ens $(x \cup y)$ (*1[er] axiome de réunion*)
(7) *Ens* $x \Rightarrow$ *Ens* $\bigcup_{y \in x} y$ (*2[e] axiome de réunion*)

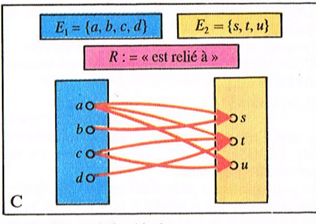
Avant d'énoncer les quatre autres axiomes, on peut montrer qu'avec ce système partiel, l'antinomie de Russell se transforme.
En substituant $\neg x \in x$ à $A(x)$ dans (3), on obtient tout d'abord :
$\forall x(\neg x \in x \Rightarrow \text{Ens}\,x) \Rightarrow \exists y\,\forall x\,(x \in y \Leftrightarrow \neg x \in x)$,
et en choisissant $x = y$ dans le second membre pour étudier la situation de y, on aboutit à :
$\forall x(\neg x \in x \Rightarrow \text{Ens}\,x) \Rightarrow (y \in y \Leftrightarrow \neg y \in y)$.
Comme le second membre n'est pas valable, on en déduit que le premier n'est pas valable non plus. D'où :
$\neg \forall x\,(\neg x \in x \Rightarrow \text{Ens}\,x)$, c'est-à-dire :
$\exists x(\neg x \in x \wedge \neg\,\text{Ens}\,x)$.
Au lieu d'une simple contradiction, on obtient donc l'affirmation qu'il existe une classe qui n'est pas un ensemble.
L'axiome suivant justifie l'existence d'ensembles infinis, en particulier l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels :
(8) $\exists x\big(\text{Ens}\,x \wedge \varnothing \in x \wedge (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\big)$ (*axiome de l'infini*)
En effet, l'ensemble x contient, outre $\varnothing$, les éléments $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, etc. On dit que l'ensemble est infini.
On peut maintenant définir des couples de classes, puis construire des relations et des fonctions entre classes. Lorsque le domaine de définition d'une telle fonction est un ensemble, on exige qu'il en soit de même pour l'image.
(9) Ens $x \wedge f : x \to y \Rightarrow$ Ens y (*axiome fonctionnel*)
Enfin, il est possible d'associer à tout ensemble x l'ensemble $\mathfrak{P}(x)$ de ses parties.
(10) Ens $x \Rightarrow$ Ens $\mathfrak{P}(x)$ (*axiome de l'ensemble des parties d'un ensemble*)
Le dernier axiome pose le plus de difficultés :
(11) Quelle que soit la classe y d'ensembles non vides x, il existe une fonction f tel que $f(x) \in x$ pour tout $x \in y$. (*axiome du choix*)

La fonction f choisit dans chaque ensemble un élément de cet ensemble (*axiome du choix*, fig. C). L'axiome (11) n'indique pas comment construire une telle fonction ; il n'assure que son existence. L'intuitionnisme (p. 19) rejette de ce fait cet axiome et toutes les conséquences qui en résultent (p. 45, axiome du bon ordre, lemme de Zorn). En supposant la consistance de la théorie axiomatique des ensembles, on peut démontrer que l'axiome du choix est indépendant des autres axiomes. Il existe des modèles vérifiant les dix premiers axiomes pour lesquels (11) n'est pas vérifié. Il est donc tout à fait possible de développer une *théorie des ensembles sans axiome du choix*, tout autant qu'une *théorie avec axiome du choix*. La seconde théorie est néanmoins adoptée par la plupart des mathématiciens.

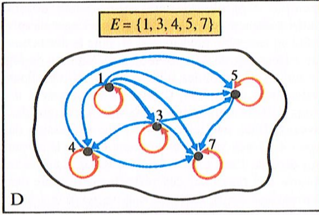


Définition du couple selon la théorie des ensembles

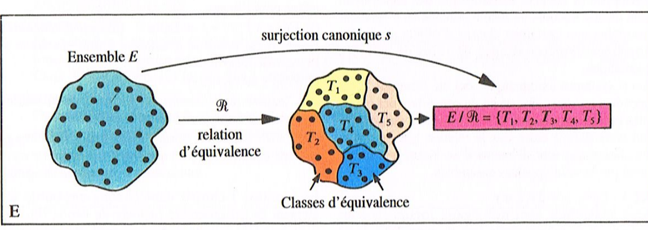
Produit cartésien



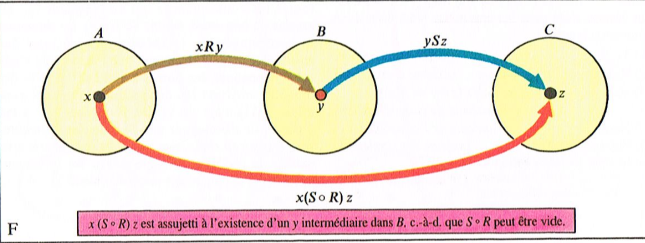
Graphe d'une relation binaire



Relation d'égalité (en rouge), relation d'ordre (en bleu)



Relation d'équivalence et ensemble quotient



Composition de relations

La notion de relation fait partie des notions fondamentales des mathématiques. Elle est basée sur le produit cartésien d'ensembles. Les relations établissent des liens entre éléments soit d'un même ensemble, soit d'ensembles différents. Elles permettent ainsi d'une part de construire les applications (p. 33), qui sont des relations particulières, et d'autre part de donner des structures aux ensembles (p. 37 sqq.).

Produit cartésien, relation

Quand l'ordre de deux éléments x_1, x_2 intervient, on utilise la notion de *couple* (x_1, x_2) (x_1 est appelé première composante du couple, x_2 deuxième composante). L'*égalité* de deux couples est définie par :

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2.$$

La définition du couple selon la théorie des ensembles est rappelée au tableau A. Par récurrence, on définit le *n-uplet* comme une généralisation du couple :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \big((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n\big).$$

De même que pour le couple, l'égalité de deux n-uplets équivaut à l'égalité de leurs composantes de même indice.

Déf. 1 : $E_1 \times \ldots \times E_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in E_i\}$ est appelé *produit cartésien* des ensembles $E_1, \ldots, E_n$. Dans le cas où $E_1 = \ldots = E_n = E$, on écrit également E^n.

Le produit cartésien sert d'une part à définir de nouveaux objets mathématiques (voir fig. B), et d'autre part à définir la notion de relation.

Déf. 2 : Tout sous-ensemble $R \subseteq E_1 \times \ldots \times E_n$ est appelé *relation n-aire*.

Les *relations binaires* $R \subseteq E_1 \times E_2$ sont particulièrement importantes. Elles peuvent être interprétées comme une correspondance (des éléments de E_2 correspondent selon un critère déterminé à des éléments de E_1). Cette correspondance peut être représentée par un graphe (*graphe de la relation*, voir fig. C). On écrit alors $x_1 R x_2$ au lieu de $(x_1, x_2) \in R$. Si $E_1 = E_2 = E$, on a alors une *relation binaire sur E* : $R \subseteq E \times E$.

Ex. : Relation d'égalité « = », relation d'ordre « ≤ » dans ℕ (voir fig. D), relation d'inclusion « ⊆ » entre les parties d'un ensemble, orthogonalité « ⊥ » dans l'ensemble des droites d'un espace euclidien.

Propriétés des relations binaires

a) $\boldsymbol{R \subseteq E_1 \times E_2}$
(1) *R surjective à gauche* : $\Leftrightarrow \forall x_1 \exists x_2 (x_1 R x_2)$
(2) *R surjective à droite* : $\Leftrightarrow \forall x_2 \exists x_1 (x_1 R x_2)$
(3) *R doublement surjective* : $\Leftrightarrow$ (1) $\wedge$ (2)
(4) *R injective* : $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z (xRy \wedge zRy \Rightarrow x = z)$
(5) *R univoque* : $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z (xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z)$
(6) *R bijective (ou biunivoque)* : $\Leftrightarrow$ (3) $\wedge$ (4) $\wedge$ (5)

Ces propriétés sont fondamentales pour la définition des applications (voir p. 33).

b) $\boldsymbol{R \subseteq E \times E}$
(7) *R réflexive* : $\Leftrightarrow \forall x (xRx)$
(8) *R symétrique* : $\Leftrightarrow \forall x \forall y (xRy \Rightarrow yRx)$
(9) *R asymétrique* : $\Leftrightarrow \forall x \forall y \big(xRy \Rightarrow \neg (yRx)\big)$
(10) *R antisymétrique* : $\Leftrightarrow \forall x \forall y (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$
(11) *R totale* : $\Leftrightarrow \forall x \forall y (xRy \vee yRx)$
(12) *R transitive* : $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$.

Relation d'équivalence, ensemble quotient

Déf. 3 : Une relation $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ est appelée *relation d'équivalence* si, et seulement si, elle est réflexive, symétrique et transitive.

Ex. : Parallélisme de deux droites dans un espace affine, égalité de fractions arithmétiques, équipotence de deux parties d'un même ensemble (voir p. 35).
Toute relation d'équivalence partage E en des sous-ensembles non vides, deux à deux disjoints (partition de E en classes d'équivalence).

Déf. 4 : L'ensemble de tous les éléments de E en relation avec $x \in E$ est appelé *classe d'équivalence* $[\![x]\!]$ de x :
$[\![x]\!] = \{z \mid x \in E \wedge z \in E \wedge xRz\}$.

La réflexivité de $\mathcal{R}$ entraîne $[\![x]\!] \neq \varnothing$. La symétrie et la transitivité assurent $\big([\![x]\!] = [\![y]\!] \Leftrightarrow xRy\big)$ et $\big(z \in [\![x]\!] \wedge z \in [\![y]\!] \Rightarrow [\![x]\!] = [\![y]\!]\big)$, c'est-à-dire que chaque élément de E appartient à une et une seule classe d'équivalence. Ces classes d'équivalence sont donc deux à deux disjointes.
Une relation d'équivalence bâtit donc un nouvel ensemble : l'ensemble des classes d'équivalences de E.

Déf. 5 : $E / \mathcal{R} = \{[\![x]\!] \mid x \in E\}$ est appelé *ensemble quotient* de E par $\mathcal{R}$ (voir fig. E). Un élément $y \in [\![x]\!]$ est appelé *représentant* de la classe $[\![x]\!]$. T est appelé *système de représentants* de $E / \mathcal{R}$ si T contient exactement un élément de chaque classe de $E / \mathcal{R}$.

$E / \mathcal{R}$ est le résultat d'un « processus d'abstraction » : la propriété permettant de constituer une classe d'équivalence peut être identifiée à cette classe, les éléments de celle-ci perdant leur originalité propre. A chaque partition de E, on peut associer une application surjective $s : E \to E / \mathcal{R}$ (*surjection canonique*) (p. 33).

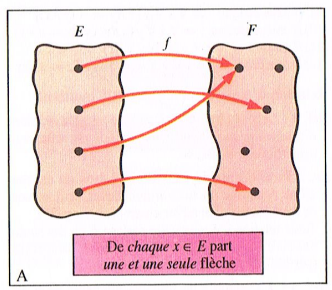
Ex. : La propriété commune à deux droites parallèles d'un espace affine est leur « direction », celle à des segments congrus d'un plan euclidien leur « longueur », celle commune à deux sous-ensembles équipotents leur « cardinal », celle à deux sous-ensembles bien ordonnés isomorphes leur « type ordinal ».

Composition de relations

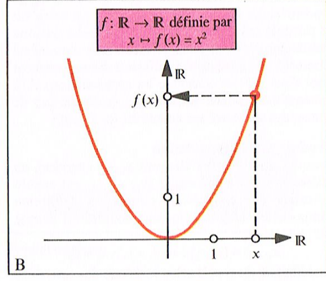
Si $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$, alors R et S permettent de définir une relation $S \circ R \subseteq A \times C$ (*composition de R par S*) par :
$x (S \circ R) z :\Leftrightarrow \exists y (xRy \wedge ySz)$ (voir fig. F).

Relation inverse

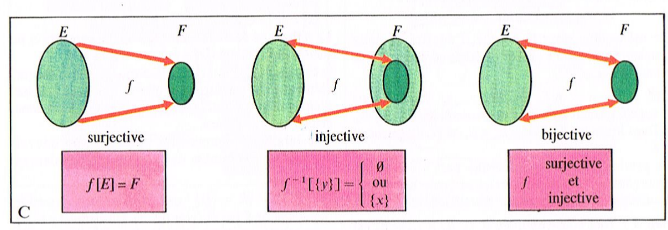
Pour toute relation $R \subseteq E_1 \times E_2$, on peut définir une *relation inverse* $R^{-1} \subseteq E_2 \times E_1$ par
$R^{-1} := \{(x_2, x_1) \mid (x_1, x_2) \in R\}$, c'est-à-dire
$x_2 R^{-1} x_1 \Leftrightarrow x_1 R x_2$ (cela correspond à l'inversion des flèches dans le graphe de R).



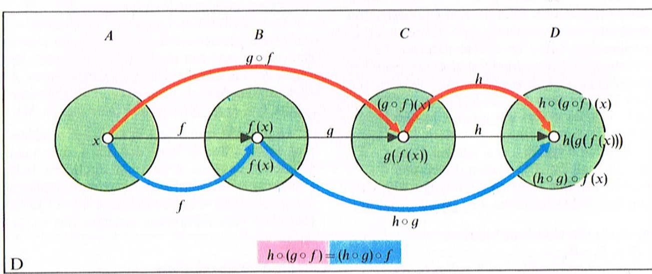
Application



Graphe d'une application



Types d'applications



Associativité de la composition d'applications

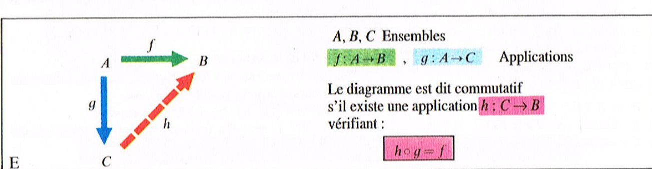


Diagramme commutatif

On étudie ici des relations $f \subseteq E \times F$ univoques. On les appelle fonctions de E dans F.

Définition d'une application

Déf. 1 : Une relation $f \subseteq E \times F$, surjective à gauche et univoque est appelée *application* (voir fig. A).

On convient de la terminologie suivante :

a) Comme à chaque $x \in E$ correspond *exactement un* $y \in F$, au lieu de $(x, y) \in f$ on écrit $x \mapsto y$ ou $x \mapsto f(x)$ avec $y = f(x)$. De même, au lieu de $f \subseteq E \times F$, on écrit $f : E \to F$.

b) $x \mapsto y$ est appelée *représentation écrite de l'application*. Dans certains cas, celle-ci peut être une expression (équation de fonction) : par ex. $y = 2x + 5$.

c) E est appelé *domaine de définition*, F *ensemble d'arrivée* de f. $f[T] = \{f(x) \mid x \in T \subseteq E\}$ est l'*image de T* par f, $f^{-1}[S] = \{x \mid f(x) \in S \subseteq F\}$ l'*image réciproque de S* par f (f^{-1} est ici un symbole et non pas une application, voir plus bas).

d) $\{(x, f(x)) \mid x \in E\} \subseteq E \times F$ est appelé *graphe de l'application*. Pour les ensembles numériques, le graphe peut se représenter dans un système de coordonnées (voir fig. B). On emploie alors le terme de *représentation graphique* de f.

Rem. : Deux applications $f, g : E \to F$ sont dites égales si l'on a, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. Une fonction de E dans F est une application d'une partie de E dans F.

Types d'applications

a) **Application surjective :** $f : E \to F$ est dite *surjective* (f est une *surjection*) si $f[E] = F$ (voir fig. C).

Ex. : $p_i : E_1 \times \ldots \times E_n \to E_i$ définie par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ est surjective. Cette application est la *i-ème projection*. $s : E \to E / \mathfrak{R}$ définie par $x \mapsto [\![x]\!]$ est également surjective. s est appelée *surjection canonique* (voir p. 31).

b) **Application injective :** $f : E \to F$ est dite *injective* (f est une *injection*) si pour tout $y \in F$, $f^{-1}[\{y\}] = \{x\}$, c.-à-d. un singleton ou $f^{-1}[\{y\}] = \varnothing$ (voir fig. C).

Ex. : Pour $S \subseteq E$, l'application $i : S \to E$ définie par $u \mapsto i(u) = u$ est injective. i est l'*injection canonique de S dans E*.

c) **Application bijective :** $f : E \to F$ est dite *bijective* si f est surjective et injective (voir fig.C). Les isomorphismes (voir p. 37) sont des applications bijectives particulièrement importantes.

Ex. : L'injection canonique $E \to E$ est bijective. Elle est appelée *application identique* et est notée 1_E.

Applications particulières

a) **Application constante :** $f : E \to F$ est dite *constante* si $f(x) = f(y)$ pour tout $(x, y) \in E \times E$.

b) **Restriction :** $g : S \to F$ est appelée *restriction* de $f : E \to F$ si $S \subseteq E$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in S$. On écrit alors f / S (f restreinte à S) au lieu de g.

c) **Prolongement :** $g : G \to F$ est appelée *prolongement* de $f : E \to F$ si $E \subseteq G$ et $g / E = f$.

d) **Suite :** Toute application dont le domaine de définition est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est appelée *suite*. Habituellement, on note une suite sous la forme $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

Composition d'applications

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Alors il existe une application composée $g \circ f$ analogue à celle définie par la composition des relations (voir p. 31) : $g \circ f : A \to C$, définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. $g \circ f$ est une application.

La loi de composition est *associative* : pour trois applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (voir fig. D).

La composition avec une application identique donne : $1_B \circ f = f$ et $f \circ 1_A = f$.

On vérifie également que : f, g surjectives (resp. injectives, bijectives) $\Rightarrow g \circ f$ surjective (resp. injective, bijective).

Dans de nombreux cas, il est utile d'employer la caractérisation d'une bijection comme suit :

$f : A \to B$ bijective $\Leftrightarrow$

$$\exists g \, (g : B \to A \wedge g \circ f = 1_A \wedge f \circ g = 1_B.$$

Rem. : $g \circ f = 1_A$ garantit l'injection, $f \circ g = 1_B$ la surjection.

Application inverse

La relation inverse f^{-1} d'une application $f : E \to F$ n'est pas en général une application (voir fig. A).

Mais on vérifie que:

f^{-1} est une application de F dans E si, et seulement si, f est bijective. f^{-1} est alors une bijection et $f^{-1} \circ f = 1_E$, $f \circ f^{-1} = 1_F$.

Applications et opérations sur les ensembles

Pour toutes applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

$f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ pour tous $A, B \subseteq E$

$f\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$ où $A_i \subseteq E$

$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ pour tous $A, B \subseteq E$

$f\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$ où $A_i \subseteq E$

$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ pour tous $A, B \subseteq F$

$f^{-1}\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[A_i]$ où $A_i \subseteq E$

$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ pour tous $A, B \subseteq F$

$f^{-1}\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i]$ où $A_i \subseteq E$

$f\left[f^{-1}[A]\right] \subseteq A$, $f^{-1}\left[f[B]\right] \supseteq B$ pour tous $A \subseteq F$, $B \subseteq E$

$f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$ pour tous $A, B \subseteq F$

$(g \circ f)^{-1}[A] = f^{-1}\left[g^{-1}[A]\right]$ pour tous $A \subseteq G$

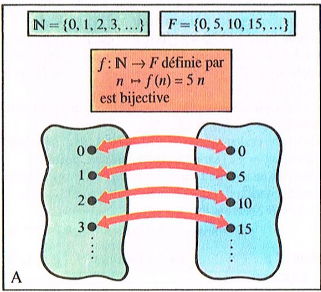
Rem. : $f^{-1}[P]$ désigne ici l'image réciproque de P par f, et non l'image de P par f^{-1}, dont l'existence n'est pas assurée dans le cas général.

Diagramme commutatif

Soit deux applications $f : A \to B$ et $g : A \to C$ ayant le même domaine de définition A. Une question fréquente est de savoir si l'on peut expliciter une application $h : C \to B$ telle que f soit égale à l'application composée $h \circ g$. Si cela est possible, on parle alors de *diagramme commutatif* (voir fig. E).

Fonctions à n variables

Quand le domaine de définition E d'une fonction $f : E \to G$ est un sous-ensemble du produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ des ensembles $E_1, \ldots, E_n$, on dit que f est une *fonction à n variables*. On écrit en général $f(x_1, \ldots, x_n)$ au lieu de $f((x_1, \ldots, x_n))$.

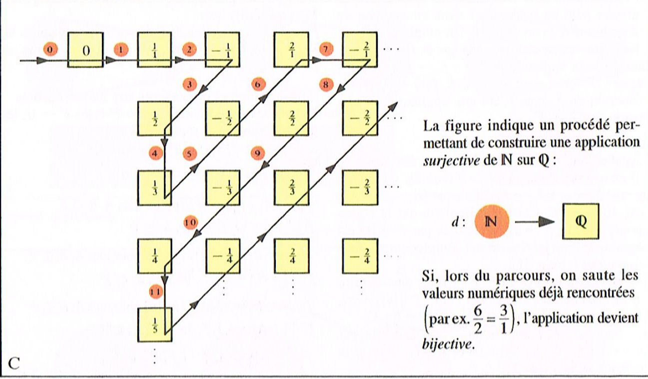


Équipotence

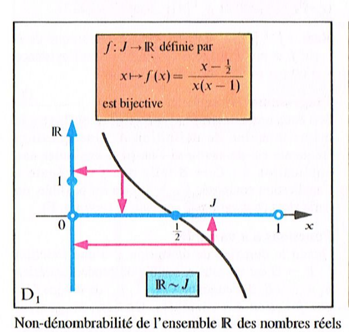
1) card (A) + card (B) = card $(A \cup B)$
si $A \cap B = 0$
(2) card $(A) \cdot$ card (B) = card $(A \times B)$
(3) card $(A)^{\text{card}(B)}$ = card (A^B)
si $A^B := \{f \mid f : B \to A\}$
(4) card $(E) \geq \aleph_0 \wedge$ card $(A) \leq \aleph_0$
$\Longrightarrow$ card $(E \cup A)$ = card (E),
c.-à-d. card $(E) + n$ = card $(E) + \aleph_0$
= card (E)

B

Opérations sur les cardinaux



Dénombrabilité de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels



Hypothèse : J est dénombrable

Alors il existe une application bijective $\mathbb{N} \to J$

$0 \leftrightarrow r_0 = 0, z_{00} z_{01} z_{02} z_{03} \cdots$
$1 \leftrightarrow r_1 = 0, z_{10} z_{11} z_{12} z_{13} \cdots$
$2 \leftrightarrow r_2 = 0, z_{20} z_{21} z_{22} z_{23} \cdots$
$3 \leftrightarrow r_3 = 0, z_{30} z_{31} z_{32} z_{33} \cdots$
⋮ ⋮
$(z_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\})$

Le nombre $r = 0, \hat{z}_0 \hat{z}_1 \hat{z}_2 \ldots$
où $\hat{z}_i = 2$ si $z_{ii} = 1$
et $\hat{z}_i = 1$ si $z_{ii} \neq 1$
n'est pas atteint.

Contradiction

D_2

Non-dénombrabilité de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Quand on considère des ensembles, il est intéressant de comparer les « quantités » d'éléments qu'ils contiennent ; qu'en est-il par exemple des ensembles {0, 1, 2, 3, …} et {0, 5, 10, 15, …}. La réponse à cette question nécessite de définir exactement la notion de « nombre » (ce qui mène à la puissance) ; on va voir qu'on opère sans utiliser l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Équipotence

Déf. 1 : Soit A et B deux ensembles. S'il existe une bijection $A \to B$, A et B sont dits *équipotents* (on notera dans la suite $A \sim B$).

Selon cette définition, les ensembles {1, 5, 7, 8, 9} et {a, c, f, g, h} par exemple sont équipotents, ainsi que les ensembles {0, 1, 2, 3, …} et {0, 5, 10, 15, …} (voir fig. A).

Puissance, cardinal

L'équipotence d'ensembles a été définie sans parler de la puissance des ensembles elle-même. La puissance apparaît clairement comme une propriété qui doit être commune à une classe d'ensembles équipotents. La notion de puissance est alors le résultat d'un processus d'abstraction, fondé sur une relation d'équivalence. Or l'équipotence « ~ » est effectivement une relation d'équivalence dans un système d'ensembles $\mathfrak{E}$ donné, ce qui se démontre facilement, à l'aide des propriétés des applications bijectives (voir p. 33).

L'ensemble quotient $\mathfrak{E}/\sim$ est donc constitué de classes d'ensembles équipotents.

Déf. 2 : Un élément de l'ensemble quotient $\mathfrak{E}/\sim$ est appelé *cardinal* ou *puissance*.

À tout ensemble A du système d'ensembles, on peut associer un cardinal (surjection canonique, voir p.31). On définit l'application card : $\mathfrak{E} \to \mathfrak{E}/\sim$ par $A \mapsto \text{card}(A) = [\![A]\!]$.

Rem. : La notion de puissance est *relative* au système d'ensembles choisi, car elle ne peut pas être fondée sur l'« ensemble de tous les ensembles », logiquement contradictoire (voir p. 28).

Ensembles finis, ensembles infinis

La notion d'équipotence rend possible une définition des ensembles finis et infinis qui n'utilise pas l'ensemble des entiers naturels.

Déf. 3 : Un ensemble E est dit *infini* s'il existe un sous-ensemble strict $S \subset E$ vérifiant $E \sim S$. Dans le cas contraire, E est dit *fini*.

Ex. : $\mathbb{N}$ est un ensemble infini (voir fig. A) ; ∅, {0}, {0, 1}, {0, 1, 2} etc. sont des ensembles finis.

Déf. 4 : Le cardinal d'un ensemble fini est dit *cardinal fini*, celui d'un ensemble infini *cardinal infini* (ou *transfini*).

Les cardinaux finis, qui peuvent être représentés par ∅, {0}, {0, 1},… permettent de construire l'ensemble des entiers naturels à partir de la théorie des ensembles (voir p. 53).

Opérations sur les cardinaux

On peut définir une addition, une multiplication, et une exponentiation dans l'ensemble des cardinaux d'un système d'ensembles. Ainsi, l'addition est associée à l'union d'ensembles, la multiplication à leur produit cartésien et l'exponentiation de card (A) par card (B) à l'ensemble des applications de B dans A (voir tab. B / 1, 2, 3). L'associativité, la commutativité, la distributivité relatives aux deux premières opérations et les lois usuelles sur les exposants restent vérifiées.

Comparaison de cardinaux

On peut définir, dans l'ensemble des cardinaux d'un système d'ensembles, une relation d'ordre totale (voir p. 43) par :
card $(A) \leq$ card $(B) :\Leftrightarrow \exists C\,(C \subseteq B \wedge A \sim C)$.
À l'aide du théorème de Zermelo (voir p. 45) et de la théorie des ordinaux (voir p. 49), on montre que « ≤ » est un bon ordre.

Dénombrabilité, non-dénombrabilité

Les cardinaux des ensembles infinis ne sont pas tous identiques ; au contraire, l'exemple des cardinaux infinis montre la multiplicité des ensembles infinis. Par exemple, on a le théorème suivant : Le cardinal de tout ensemble E est plus petit que celui de l'ensemble de tous ses sous-ensembles $\mathfrak{P}(E)$, c'est-à-dire card $(E) <$ card $(\mathfrak{P}(E))$. Ainsi, on peut construire à partir de $\mathbb{N}$ un ensemble de puissance plus élevée : $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

En revanche, l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ a la même puissance que $\mathbb{N}$ (ceci se prouve par exemple à l'aide du procédé diagonal de Cantor, voir fig. C). De même, $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}$ et $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ avec, card (E_i) = card $(\mathbb{N})$ ont également la même puissance que $\mathbb{N}$.

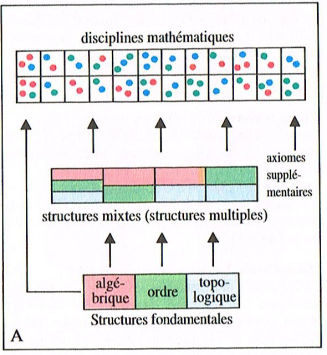
Déf. 5 : Un ensemble E est dit *au plus dénombrable* si card $(E) \leq \aleph_0$, où $\aleph_0$ = card $(\mathbb{N})$, *dénombrable* si card $(E) = \aleph_0$ et *non dénombrable* si card $(E) > \aleph_0$.

Rem. : Si E est un ensemble *non dénombrable* et A un ensemble *dénombrable*, on a $E \cup A \sim E$. On en déduit une règle de calcul importante sur les cardinaux (voir fig. B / 4).

Ex. : Voir plus haut pour les ensembles dénombrables. Pour les ensembles non dénombrables, on peut citer, si card $(E) \geq \aleph_0$, outre $\mathfrak{P}(E)$, l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. La non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$ peut être prouvée en la démontrant pour le sous-ensemble $J = \{x \mid 0 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$, car $\mathbb{R}$ est équipotent à J (voir fig. D_1). La non-dénombrabilité de J se démontre par l'absurde (voir tab. D_2). $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ est de même puissance que $\mathbb{R}$ (donc également $\mathbb{C}$, ainsi que l'ensemble des quaternions). Par conséquent, l'ensemble des points d'une droite et l'ensemble des points d'un espace euclidien de dimension trois sont équipotents, ce qui signifie que la dimension n'est pas invariante par une application bijective quelconque.

Déf. 6 : Le cardinal de $\mathbb{R}$ est noté $\mathfrak{c}$: $\mathfrak{c}$ = card $(\mathbb{R})$. $\mathfrak{c}$ est aussi appelé *puissance du continu*.

$\aleph_0$ est le plus petit cardinal infini, car tout ensemble infini contient une partie infinie dénombrable, et tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable. L'hypothèse du continu affirme que $\mathfrak{c}$ est le plus petit cardinal supérieur à $\aleph_0$. Il a été démontré que cette hypothèse était indécidable.

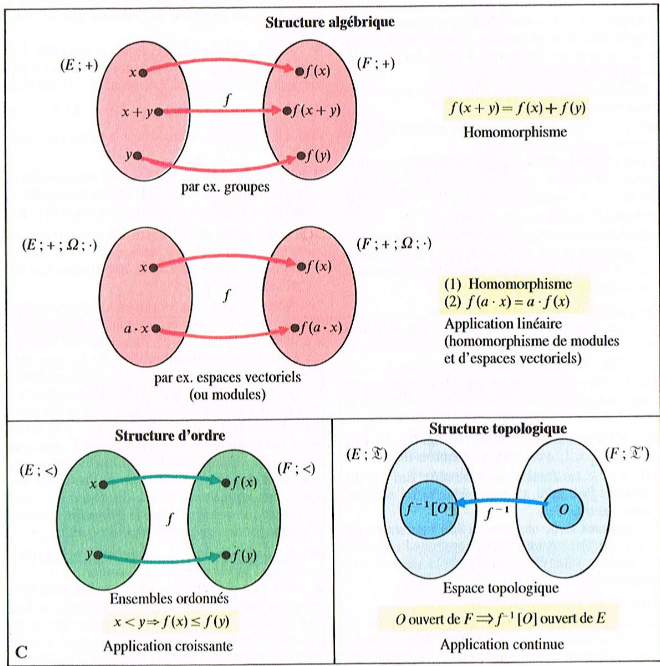


Construction à partir des structures

Corps	Ensemble totalement ordonné	Espace topologique particulier
(ℝ; +, ·)	(ℝ; ≤)	(ℝ; 𝔑)
Composition d'éléments	Comparaison d'éléments	Convergence de suites
Structure algébrique	Structure d'ordre	Structure topologique

B

Structures de l'ensemble ℝ des nombres réels



Applications compatibles avec les structures (morphismes)

La conception bourbakiste a fait disparaître le cloisonnement entre les différentes disciplines mathématiques. L'examen des constructions axiomatiques des différentes théories fait apparaître des structures fondamentales communes. Les disciplines traditionnelles se développent alors à partir de ces structures fondamentales et des structures mixtes construites à partir de celles-ci, avant d'utiliser des axiomes et définitions supplémentaires (tab. A).

Structures fondamentales

a) **Structure algébrique :** Un ensemble est muni d'une *structure algébrique* si une ou plusieurs lois de composition (internes ou externes, voir p. 39) sont définies sur cet ensemble, comme l'addition et la multiplication dans les ensembles de nombres, ou la multiplication d'un vecteur par un scalaire. Les structures algébriques les plus importantes sont : le demi-groupe, le groupe, l'anneau, le corps, le module et l'espace vectoriel (p. 39).

b) **Structure d'ordre :** Un ensemble est muni d'une *structure d'ordre* si une relation d'ordre (p. 43) est définie sur cet ensemble. Cela signifie dans le cas le plus général que dans cet ensemble, il existe des éléments comparables selon une règle définie, comme c'est le cas en particulier dans les ensembles de nombres réels avec la relation « ≤ ». Parmi les structures d'ordre, on peut citer : les ensembles ordonnés, totalement ordonnés, ordonnés inductifs, bien ordonnés (p. 43).

c) **Structures topologiques :** Un ensemble est muni d'une *structure topologique* si on a choisi dans cet ensemble un système de sous-ensembles $\mathfrak{T}$ vérifiant certaines propriétés (voir p. 51). La structure topologique est fondamentale pour définir la notion de convergence qui, grâce à celle de filtre, peut être appréhendée d'une manière plus générale qu'en analyse classique. Un ensemble muni d'une structure topologique est appelé espace topologique (voir p. 207). Le mot espace peut être également employé pour d'autres ensembles structurés.

Structures multiples (structures mixtes)

Une *structure multiple* est une structure mixte composée de plusieurs des trois structures fondamentales. Parmi les structures multiples, on trouve entre autres : les groupes topologiques, les espaces vectoriels topologiques, les corps ordonnés (voir tab. B).

Système de relations

Les structures fondamentales peuvent se ramener aux relations qui produisent ces structures. Un ensemble structuré est alors un ensemble E sur lequel est définie une famille de relations $\{R_i\}$. Si E est muni des relations $R_1, \ldots, R_n$, on note $(E ; R_1, \ldots, R_n)$ l'espace structuré associé. Le couple formé de E et de $(R_1, \ldots, R_n)$ est appelé *système de relations*. Quand $n \geq 2$, les relations qui fournissent les structures doivent être *compatibles* entre elles. Le choix des conditions de compatibilité est déterminant pour bâtir une théorie particulière (par exemple, la distributivité pour construire les anneaux, voir p. 41).

Structures dérivées

À partir des structures fondamentales, on peut construire les trois importants types de structures suivants.

a) **Sous-structure (sous-système de relations) :** Lorsque le rôle des relations qui engendrent la structure est restreint à un *sous-ensemble*, on crée une *sous-structure*. Parmi les sous-structures, on trouve : les sous-groupes, les sous-anneaux, les sous-corps, les sous-modules, les sous-espaces topologiques, les ordres induits (voir p. 43).

b) **Structure produit (système de relations produit) :** Si $(E_1, R_1), \ldots, (E_n, R_n)$ sont des espaces structurés de façon analogue, par ex. par des relations toutes p-aires, $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ sera muni de la structure produit par la relation R p-aire, satisfaite par p éléments de E si, et seulement si, pour tout $i = 1, \ldots, n$ leurs p composantes d'indice i satisfont à R_i.

c) **Structure quotient (système de relations quotient) :** On crée une *structure quotient* quand on transfère à un espace quotient $E / \mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}$ relation d'équivalence) la structure de E, à l'aide de $\mathfrak{R}$ et des relations qui engendrent cette structure. Parmi les structures quotient, on trouve : les groupes (resp. anneaux, corps, modules) quotients, les espaces topologiques quotients.

Applications compatibles avec les structures

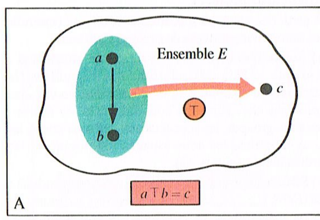
Les applications permettent également de construire des liens entre les éléments d'ensembles munis de *structures analogues*. Il est important que ces applications soient compatibles avec les structures des ensembles qu'elles relient. De telles applications (voir fig. C) sont appelées *morphismes*, et créent en général une image « réduite » de la structure de départ (domaine de définition) dans la structure de l'ensemble d'arrivée. Les caractéristiques essentielles des structures sont conservées : par exemple le « groupe » par les homomorphismes de groupes (voir p. 73), l'« ensemble ordonné » par les applications croissantes (voir p. 47), la « convergence » par les applications continues (voir p. 225).

Si l'on a affaire à des structures multiples, les morphismes doivent être compatibles avec chacune des structures fondamentales contenues dans ces structures multiples. Ainsi, les morphismes des groupes topologiques sont les homomorphismes continus.

Isomorphismes

Deux espaces de structures analogues sont considérés comme équivalents relativement aux structures considérées s'il existe entre eux un morphisme *bijectif*, dont l'application réciproque est aussi un morphisme. On parle alors d'*isomorphisme*, et les deux espaces sont dits *isomorphes*.

On appelle *automorphismes* les isomorphismes d'un ensemble structuré sur lui-même. L'ensemble de tous les automorphismes d'un ensemble structuré, muni de la composition des applications, est un groupe (groupe des automorphismes). Ce groupe est important par exemple dans la théorie de GALOIS, et en géométrie.



Loi de composition interne

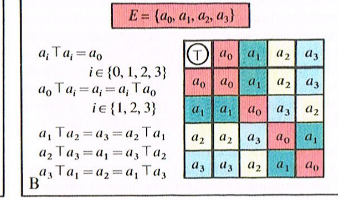
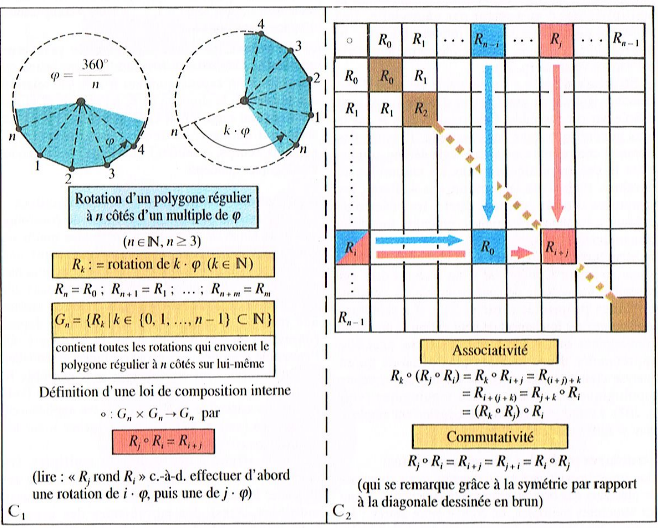
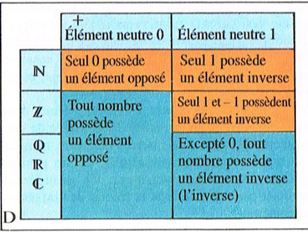


Table d'opération

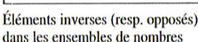


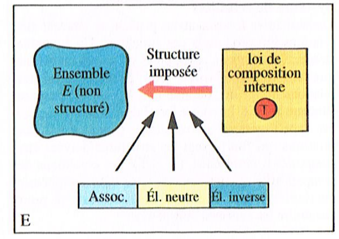
Groupe de rotations



	+ Élément neutre 0	Élément neutre 1
$\mathbb{N}$	Seul 0 possède un élément opposé	Seul 1 possède un élément inverse
$\mathbb{Z}$	Tout nombre possède un élément opposé	Seul 1 et – 1 possèdent un élément inverse
$\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$		Excepté 0, tout nombre possède un élément inverse (l'inverse)

D


Éléments inverses (resp. opposés) dans les ensembles de nombres



Structure de groupe

On peut faire la somme ou le produit de deux nombres réels. Ces deux opérations sont des « lois de composition internes » dans $\mathbb{R}$. Ce chapitre développe cette notion.

Lois de composition internes

Dans un ensemble non vide E, le signe le plus souvent utilisé pour représenter une loi de composition interne est « ⊤ » ; il peut donc signifier « + », « · », ou toute autre opération.

Déf. 1 : ⊤ est appelée *loi de composition interne sur* un ensemble E si pour tout couple $(a, b) \in E \times E$ il existe un unique $c \in E$ vérifiant $a \top b = c$ (voir fig. A). Un ensemble *sur* lequel est définie une loi de composition interne est désigné par $(E \,;\, \top)$ et est appelé *magma*.

Rem. : S'il existe une opération ⊤ qui n'est pas possible pour tout $(a, b) \in E \times E$, on dit loi de composition *dans* E (ex. : la division dans $\mathbb{R}$).

Rem. : Toute loi de composition interne peut être définie comme une application. Soit $T \subseteq E \times E$; on définit alors $\top : T \to E$ par $(a, b) \mapsto a \top b$. Dans le cas d'une loi de composition interne *sur* E, $T = E \times E$.

Dans le cas d'un ensemble fini, une loi de composition se représente commodément à l'aide d'une table d'opération (voir ill. B).

Ex. de lois de composition *sur* E :
a) « + », « · » sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
b) La composition des rotations autour d'un point dans le plan euclidien (voir fig. C_1).
c) Addition, produit vectoriel sur un espace vectoriel euclidien de dimension 3 (voir pp. 191, 193).
d) $\cap$ et $\cup$ sur $\mathfrak{P}(E)$ (voir p. 25).
e) « + » sur l'ensemble des matrices (n, m) (voir p. 89).
f) « · » sur l'ensemble des matrices (n, n) (voir p. 89).

Ex. de lois de composition *dans* E :
g) « - », « : » dans $\mathbb{N}$, « : » dans $\mathbb{Z}$.
h) « + », « · » dans $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Associativité

La loi de composition interne n'a été définie que pour deux éléments. On peut l'étendre à plusieurs éléments.

Déf. 2 : On pose dans $(E \,;\, \top)$: $\forall\, a_i \in E$:
$a_1 \top a_2 \top a_3 := (a_1 \top a_2) \top a_3$
$a_1 \top \ldots \top a_n := (a_1 \top \ldots \top a_{n-1}) \top a_n \,;\, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$
Si l'on posait $a_1 \top a_2 \top a_3 := a_1 \top (a_2 \top a_3)$, les résultats pourraient être modifiés.

Déf. 3 : On dit que ⊤ est *associative* sur E (ou que $(E \,;\, \top)$ est un *magma associatif*) si $\forall a_1, a_2, a_3$, $(a_1 \top a_2) \top a_3 := a_1 \top (a_2 \top a_3)$.

Lorsque ⊤ est associative, on peut placer les parenthèses à n'importe quel endroit, ou ne pas les mettre, et ce quel que soit le nombre de termes a_i, sans changer la valeur de l'expression.

Demi-groupe (ou monoïde)

Déf. 4 : $(E \,;\, \top)$ est appelé *demi-groupe* (ou *monoïde*) si ⊤ est associative sur E.

Les exemples a) à f) sont des demi-groupes, à l'exception de c) pour le produit vectoriel.

Élément neutre

Si $a \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, on a $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$, pour les vecteurs $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, pour $A \in \mathfrak{P}(E)$ $A \cup \varnothing = A$ et $A \cap E = A$. 0, 1, $\vec{0}$, $\varnothing$ et E apparaissent alors comme «neutres» pour leurs lois respectives, puisque la composition d'un élément avec eux redonne cet élément.

Déf. 5 : $e \in E$ est un élément *neutre à gauche* (resp. *neutre à droite*) de $(E \,;\, \top)$ s'il vérifie $\forall\, a \in E$, $e \top a = a$ (resp. $\forall\, a \in E$, $a \top e = a$). e est un *élément neutre* s'il est neutre à droite et neutre à gauche.

Rem. : S'il existe un élément neutre, il est unique. En outre, dans un groupe, la distinction entre éléments neutres à gauche et à droite est inutile, un élément neutre à droite étant nécessairement neutre à gauche et réciproquement (voir p. 73).

Inverse d'un élément

Les différences entre les structures algébriques sont en grande partie dues à l'existence éventuelle, pour $a \in E$, d'un $a^{-1} \in E$ (qui est aussi noté $-a$ pour les lois additives) vérifiant $a \top a^{-1} = a^{-1} \top a = e$ (e élément neutre).

Déf. 6 : $a^{-1} \in E$ est un *élément inverse à gauche* (resp. *inverse à droite*) *de* $a \in E$ dans $(E \,;\, \top)$ possédant un élément neutre e, s'il vérifie $a^{-1} \top a = e$ (resp. $a \top a^{-1} = e$). a^{-1} est un *élément inverse de a* s'il est inverse de a à gauche et à droite.

Rem. : Si ⊤ est associative (par ex. dans un groupe), l'inverse, s'il existe, est unique (voir p. 73).

Le tableau D donne l'existence des éléments inverses dans les ensembles de nombres usuels.

Rem. : L'existence d'éléments inverses permet la définition d'une loi inverse ; par ex. la soustraction et la division dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Q}$.

Groupe

Les ensembles munis d'une loi de composition interne pour laquelle l'existence d'éléments inverses est assurée possèdent des structures alg. particulières.

Déf. 7 : $(E \,;\, \top)$ est appelé *groupe* si (voir ill. E)
I. ⊤ est associative,
II. il existe un élément neutre,
III. *tout* élément possède un inverse.

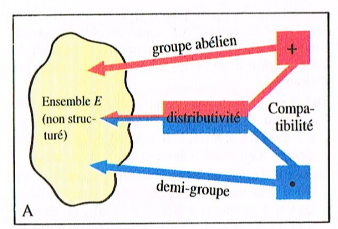
Un groupe est donc un demi-groupe qui vérifie en plus les propriétés II et III.

Déf. 8 : Un groupe $(E \,;\, \top)$est dit *abélien* (ou *commutatif*) si ⊤ est commutative (c.-à-d. vérifie $\forall a, b \in E$, $a \top b = b \top a$).

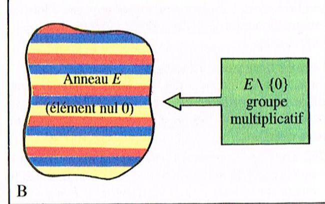
Ex. de groupes : $(\mathbb{Z} \,;\, +)$, $(\mathbb{Q} \,;\, +)$, $(\mathbb{R} \,;\, +)$, $(\mathbb{C} \,;\, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\} \,;\, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\} \,;\, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\} \,;\, \cdot)$ (voir tab. D) ; l'ensemble de toutes les rotations d'un polygone régulier à n côtés (voir fig. C) où $n \geq 3$ est un exemple de groupe fini (R_0 élément neutre, R_{n-i} inverse de R_i) ; groupe à 2 (resp. 1) élément(s) (voir ill. C p. 40) ; ensemble E de l'ill. B (groupe de KLEIN) ; exemple e), exemple f) (en se restreignant aux matrices régulières, voir p. 91). Tous ces groupes sont abéliens, sauf le dernier.

Si un groupe contient un nombre fini d'éléments, on parle de *groupe fini*, sinon de *groupe infini*.

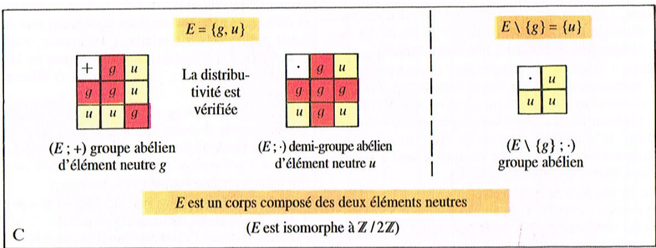
Déf. 9 : On appelle *ordre* de G et on note ord$G$ le nombre d'éléments d'un groupe fini G.



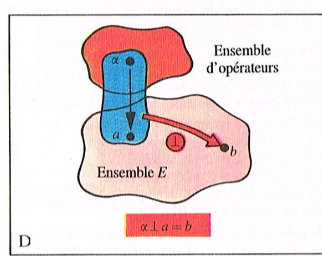
Structure d'anneau



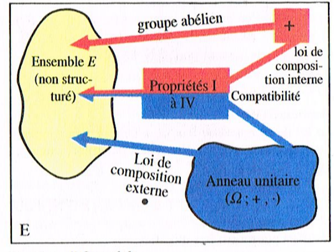
Structure de corps



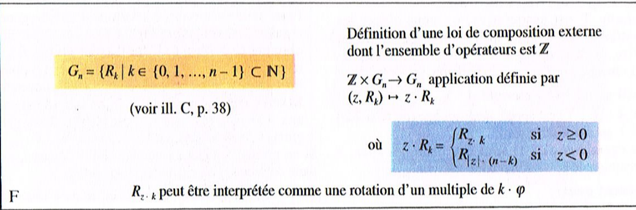
Corps à deux éléments



Loi de composition externe



Structure d'Ω-module



Exemple de ℤ-module

Anneau, anneau intègre

Parmi les ensembles structurés algébriquement, ceux qui possèdent deux lois sont particulièrement utiles. Par analogie avec les ensembles de nombres, on notera ces lois « + » (addition) et « · » (multiplication). Pour que la structure soit homogène, ces deux lois doivent être compatibles. On pose alors, pour les anneaux, la condition de compatibilité suivante :

Déf. 10 : On dit que « · » est *distributive à gauche* (resp. *à droite*) *par rapport à* « + » dans $(E\,;+,\cdot)$ si on a $\forall a, b, c \in E$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (resp. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$). On dit que « · » est *distributive par rapport à* « + » si elle est distributive à droite et à gauche.

Rem. : Si la multiplication est commutative, la distributivité à droite équivaut à celle à gauche.

Parmi les ensembles de nombres, ℤ possède une structure intéressante : (ℤ ; +) est un groupe abélien, (ℤ ; ·) est un demi-groupe commutatif possédant un élément neutre 1. Une telle structure algébrique peut d'ores et déjà fournir des résultats importants.

Déf. 11 : $(E\,;+,\cdot)$ est appelé *anneau* si (voir fig. A)
I. $(E\,;+)$ est un groupe abélien,
II. $(E\,;\cdot)$ est un demi-groupe,
III. « · » est distributive par rapport à « + »,
L'élément neutre de la loi « + » est appelé *élément nul*. L'élément neutre pour « · », s'il existe, est appelé *élément unité* et on dit alors que l'anneau est *unitaire*. Un anneau est dit *commutatif* si la multiplication est commutative.

Rem. : L'inverse de a pour l'addition est noté $-a$ et prend le nom d'opposé. On a alors les relations suivantes :
$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Ex. : ℤ, ℚ, ℝ, ℂ munis de « + » et « · », anneau des matrices (n, n), anneau quotient, anneau des polynômes.

La distributivité fait jouer un rôle particulier au 0 dans les anneaux : $a = 0 \vee b = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$. Si la réciproque $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ est également vraie, l'anneau est dit *sans diviseurs de zéro*. Dans le cas contraire, il existe $a \neq 0$ et $b \neq 0$ tels que $a \cdot b = 0$. a et b sont alors appelés *diviseurs de zéro* (voir anneau des matrices, anneau quotient).

Déf. 12 : Un anneau unitaire (avec $1 \neq 0$) sans diviseurs de zéro et commutatif est appelé *anneau intègre*.

Corps

Une structure plus forte que celle d'anneau unitaire est une structure où chaque élément possède également un inverse selon la multiplication, excepté l'élément nul, qui ne peut avoir d'inverse, car $\forall a \in E$, $0 \cdot a = 0 \neq 1$. Donc, si E est muni d'une structure d'anneau unitaire, on ne peut trouver d'éléments possédant un inverse selon la multiplication que dans $E \setminus \{0\}$.

Déf. 13 : $(E\,;+,\cdot)$ est appelé *corps* si (voir ill. B)
I. $(E\,;+,\cdot)$ est un anneau et
II. $(E \setminus \{0\}\,;\cdot)$ est un groupe.

Rem. : Si $(E \setminus \{0\}\,;\cdot)$ est un groupe abélien, E est un corps *commutatif*. Dans la pratique, on ne considère souvent que des corps commutatifs. Ainsi dans cet ouvrage, sauf mention explicite du contraire, tout corps intervenant sera *commutatif*.

Rem. : L'inverse de a selon « · » est noté a^{-1}.

Ex. : ℚ, ℝ, ℂ, munis de « + » et « · », corps quotient, corps à deux éléments (voir fig. C).

Dans chaque corps, on peut, par analogie avec les ensembles de nombres, définir une soustraction et une division sauf par 0 : $a - b = a + (-b)$, $c : d = c \cdot d^{-1}$

Loi de composition externe

Les lois de compositions externes permettent également de construire des structures algébriques importantes. On fait agir sur un ensemble non vide E un autre ensemble, dit ensemble d'opérateurs. Les éléments de celui-ci sont composés avec des éléments de E pour redonner des éléments de E. On choisira le signe « ⊥ » pour représenter la loi de composition externe.

Déf. 14 : ⊥ est appelée *loi de composition externe sur* un ensemble E muni de l'ensemble d'opérateurs Ω si à *tout* couple $(\alpha, a) \in \Omega \times E$ correspond *un et un seul* $b \in E$ tel que $\alpha \perp a = b$. Si un tel b n'existe pas pour tout couple (α, a), on dit que ⊥ est une *loi de composition externe dans* E (voir fig. D).

Un ensemble *sur* lequel est définie une loi de composition externe est noté $(E, \Omega\,;\perp)$.

Rem. : Toute loi de composition externe peut être considérée comme une application. Soit $T \subseteq \Omega \times E$; on définit alors $\perp : T \to E$ par $(\alpha, a) \mapsto \alpha \perp a$. Dans le cas d'une loi de composition interne *sur* E, $T = \Omega \times E$. Les anneaux et les corps peuvent être utilisés comme ensembles d'opérateurs.

Toute loi de composition interne peut être considérée comme une loi de composition externe, en posant $\Omega = E$.

Ex. : Multiplication d'un vecteur par un scalaire ($\Omega = \mathbb{R}$), répétition d'une rotation ou de son inverse ($\Omega = \mathbb{Z}$, voir ill. F), multiplication de matrices par un scalaire ($\Omega = \mathbb{R}$).

Module, espace vectoriel

On remarque sur les exemples précédents que E et Ω peuvent avoir chacun des lois internes. Les modules et les espaces vectoriels sont des illustrations importantes de cette situation.

Déf. 15 : Soit $(E\,;+)$ un groupe abélien, $(\Omega\,;+,\cdot)$ un anneau unitaire et « • » une loi de composition externe sur E dont Ω est l'ensemble d'opérateurs. Alors $(E\,;+,\Omega\,;\bullet)$ est appelé *module sur l'anneau* Ω (en abrégé Ω-module) si on a, pour tous $a, b \in E$ et $\alpha, \beta \in \Omega$:
I. $\alpha \bullet (a + b) = \alpha \bullet a + \alpha \bullet b$
II. $(\alpha + \beta) \bullet a = \alpha \bullet a + \beta \bullet a$
III. $(\alpha \cdot \beta) \bullet a = \alpha \bullet (\beta \bullet a)$
IV. $1 \bullet a = a$ (voir ill. E).

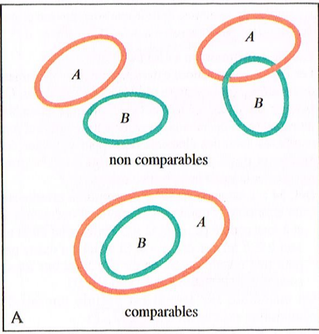
Les propriétés I à III régissent la compatibilité des quatre lois de composition.

Ex. : L'ensemble des rotations (ill. F) muni de la loi interne « ∘ » (remplaçant +) et de la loi externe « · » (remplaçant •) est un ℤ-module. Tout anneau (et donc tout corps) est un module sur lui-même ; la multiplication de l'anneau peut en effet être prise comme loi externe.

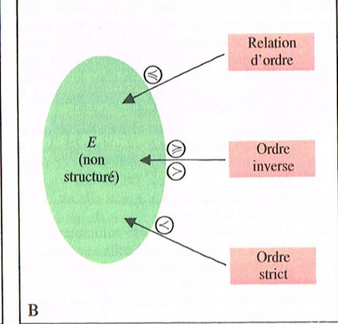
Parmi les modules, ceux dont l'ensemble d'opérateurs est un corps jouent un rôle particulier.

Déf. 16 : Si l'ensemble d'opérateurs Ω d'un module est un corps (non nécessairement commutatif), alors ce module est appelé *espace vectoriel sur le corps* Ω (en abrégé Ω-espace vectoriel, ou Ω-e.v.).

Ex. : L'ensemble des fonctions continues de ℝ dans ℝ est un espace vectoriel sur ℝ. Tout corps commutatif est un espace vectoriel sur lui-même.



Comparaison d'ensembles



Structures d'ordre

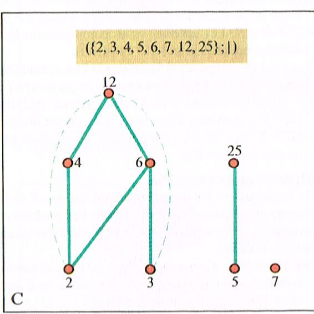
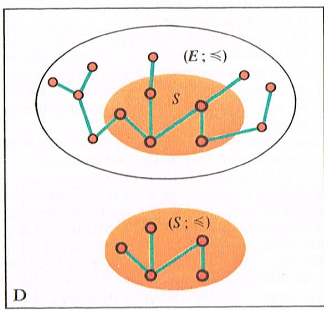
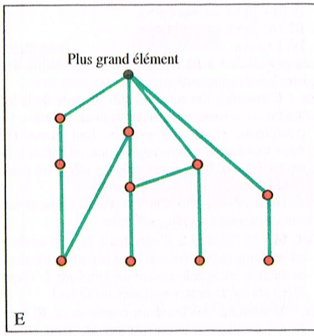


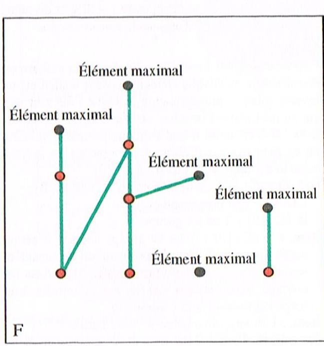
Diagramme d'ordre



Ordre partiel



Plus grand élément



Élément maximal

Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, deux nombres peuvent toujours être comparés à l'aide de la relation $\leq$; cette relation établit donc un « ordre » dans ces ensembles. Dans un système d'ensembles, la relation $\subseteq$ permet la comparaison d'ensembles, mais deux ensembles ne sont *pas nécessairement* comparables (voir fig. A). Les deux relations « $\leq$ » et « $\subseteq$ » possèdent les propriétés fondamentales nécessaires et suffisantes pour établir une comparaison (voir p. 23) :

(1) Tout élément est en relation avec lui-même (réflexivité).

(2) Si a est en relation avec b et b en relation avec a alors $a = b$ (antisymétrie).

(3) Si a est en relation avec b et b en relation avec c alors a est en relation avec c (transitivité).

Ces propriétés sont la base de la généralisation de la notion d'ordre connue sur les nombres. On renonce à la propriété qui assure que deux éléments sont toujours comparables.

Relation d'ordre, ensemble ordonné

Déf. 1 : Une relation $\preccurlyeq\ \subseteq E \times E$ est appelée *relation d'ordre* si $\preccurlyeq$ est réflexive, antisymétrique et transitive (voir p. 31). $(E\ ;\ \preccurlyeq)$ est appelé *ensemble ordonné*.

Rem. : $\preccurlyeq$ se lit « inférieur ou égal à ».

Ex. d'ensembles ordonnés : $\big(\mathfrak{P}(E)\ ;\ \subseteq\big)$, ainsi que tout système d'ensembles muni de $\subseteq$; $(\mathbb{N}\ ;\ \leq)$ ainsi que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ munis de $\leq$. La divisibilité est également une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$.

Relation d'ordre strict

La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre dans les ensembles de nombres, car elle n'est pas réflexive ; il en va de même pour $\subset$ dans tout système d'ensembles. En revanche, à la place de la réflexivité, ces relations possèdent la propriété suivante :

$a < b \Rightarrow \neg\ (b < a)$ resp., c.-à-d. que ces relations sont asymétriques (voir p. 31). Ceci conduit à définir la relation d'ordre strict.

Déf. 2 : Une relation $\prec\ \subseteq E \times E$ est appelée *relation d'ordre strict* si $\prec$ est asymétrique et transitive. $(E\ ;\ \prec)$ est appelé *ensemble strictement ordonné*.

Rem. : $\prec$ se lit « strictement inférieur à ».

Construction des structures d'ordre

À cause de l'absence de la réflexivité, une relation d'ordre strict ne peut jamais être une relation d'ordre, et réciproquement. Pourtant, on peut choisir indifféremment l'une ou l'autre pour bâtir les structures d'ordre, car toute relation d'ordre induit une relation d'ordre strict sur le même ensemble, et réciproquement. Le lien entre les deux est assuré par la diagonale $D := \big\{(x, x) \mid x \in E\big\}$, qui caractérise la réflexivité.

$\preccurlyeq$ relation d'ordre $\Rightarrow\ \preccurlyeq \setminus D$ relation d'ordre strict,

$\prec$ relation d'ordre strict $\Rightarrow\ \prec \cup D$ relation d'ordre.

Ou, avec les éléments :

$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \prec y \vee x = y$ resp. $x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$.

$\preccurlyeq$ et $\prec$ peuvent donc être utilisées indifféremment ou même simultanément (voir ill. B). C'est également vrai pour $\succcurlyeq$ et $\succ$, *relations d'ordre inverses* respectivement de $\preccurlyeq$ et $\prec$:

$x \succcurlyeq y :\Leftrightarrow y \preccurlyeq x$ resp. $x \succ y :\Leftrightarrow y \prec x$

Aux relations d'ordre (strict ou non) $\subseteq$, $\subset$, $\leq$, $<$, « est diviseur de» correspondent respectivement les relations inverses $\supseteq$, $\supset$, $\geq$, $>$, « est multiple de ».

Ensemble totalement ordonné

Les relations totales sont telles que deux éléments d'un ensemble sont toujours comparables (voir p. 31).

Déf. 3 : $(E\ ;\ \preccurlyeq)$ est appelé *ensemble totalement ordonné* (ou *chaîne*) si $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre totale (ou *ordre total*).

Ex. : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ munis de $\leq$ sont totalement ordonnés mais $\big(\mathfrak{P}(E)\ ;\ \subseteq\big)$ et $(\mathbb{N}\ ;\ |)$ ne le sont pas.

Diagramme d'ordre (diagramme de Hasse)

La structure d'ordre d'un ensemble fini peut, dans les cas simples, être représentée de façon claire par un *diagramme d'ordre* (diagramme de Hasse). Chaque élément de l'ensemble est représenté par un point du plan, avec la convention de dessiner b au-dessus de a et de le relier à a si $a \prec b$ resp. $a \preccurlyeq b$. On réduit le nombre de traits en rajoutant la convention de ne pas relier b à a si b est situé au-dessus d'un autre point relié à a (transitivité).

L'exemple de la figure C a été dessiné de cette façon. On place b comme le voisin immédiatement supérieur de a si l'on a :

$a \preccurlyeq b \wedge \forall x\, (a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \Rightarrow a = x \vee b = x)$.

Les éléments d'un ensemble totalement ordonné sont alors représentés sous la forme d'une « chaîne » (voir déf. 3). Pour les sous-ensembles de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, l'usage de la « droite numérique » permet également une bonne représentation de l'ordre induit dont on peut les munir (voir ci-dessous).

Ordre induit

Si l'on restreint la structure d'ordre d'un ensemble E à un de ses sous-ensembles S, on parle alors d'*ordre induit* sur S (voir ill. D). La structure de E se transmet alors à S ; l'ordre induit peut posséder des propriétés supplémentaires par rapport à l'ordre de l'ensemble initial (dans la fig. C, par ex., $\{2, 4, 12\}$ est un ensemble totalement ordonné, alors que E n'en est pas un). Le cas échéant, on peut explorer la structure de l'ensemble initial à l'aide des ordres induits (par ex. en utilisant le th. de Zorn, voir p. 45). Dans ce procédé, les notions suivantes jouent un rôle important.

Plus grand élément, élément maximal

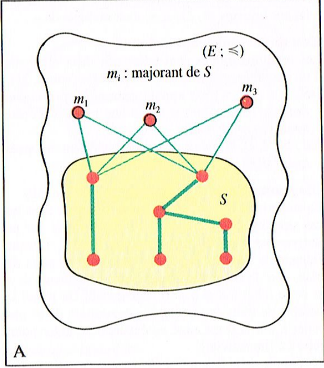
Dans la suite, E est un ensemble ordonné.

Déf. 4 : a est le *plus grand élément* (ou *élément maximum*) de $E :\Leftrightarrow a \in E \wedge \forall x\, (x \in E \Rightarrow x \preccurlyeq a)$ (voir ill. E).

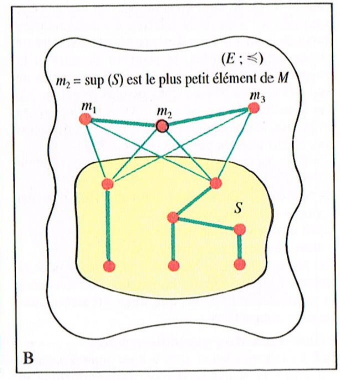
Comme on le constate sur la figure C, il n'existe pas nécessairement de plus grand élément dans un ensemble (mais s'il existe un plus grand élément, il est unique). En revanche, toujours dans cet ensemble ordonné de la fig. C, chacun des éléments 12, 25, 7 est le plus grand élément du sous-ensemble de ceux qui lui sont comparables. De tels éléments sont dits maximaux.

Déf. 5 : a est un *élément maximal* dans $E :\Leftrightarrow a \in E \wedge \forall x\, \big((x \in E \wedge a \preccurlyeq x) \Rightarrow (x = a)\big)$.

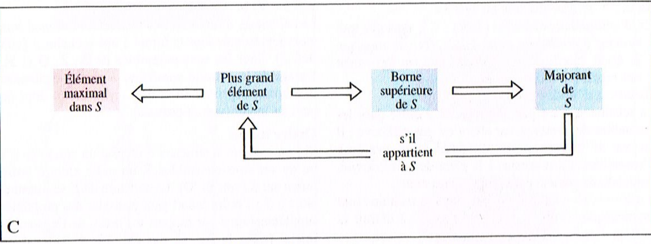
Un ensemble ordonné peut en général posséder plusieurs éléments maximaux, mais un ensemble totalement ordonné en a au plus un : c'est le plus grand élément, s'il existe. Le théorème de Zorn porte sur l'existence d'éléments maximaux (voir p. 45).



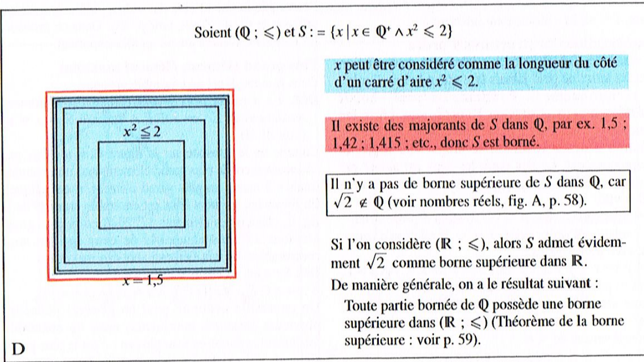
Majorant



Borne supérieure



Lien entre élément maximal, plus grand élément, borne supérieure et majorant



Sous-ensemble borné de ℚ n'admettant pas de borne supérieure

Rem. : Les notions de « *plus petit élément* » (ou *élément minimum*) et d'« *élément minimal* » sont définies de manière analogue, à l'aide de $\geqslant$.

Majorant, borne supérieure

La notion de plus grand élément d'un ensemble, explicitée en déf. 4 est également applicable à des sous-ensembles munis de l'ordre induit. Si, dans un sous-ensemble S, il n'existe pas de plus grand élément, on peut éventuellement trouver dans E un élément m qui soit supérieur ou égal à tous les éléments de S, c'est-à-dire que m est le plus grand élément de $S \cup \{m\}$. Ceci est par exemple le cas des nombres 1, $\frac{3}{2}$, 2 pour le sous-ensemble

$F := \left\{x \mid x = 1 - \frac{1}{n} \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ de (ℚ ; ≤).

Déf. 6 : m est un *majorant* de $S :\Leftrightarrow S \subseteq E \wedge m \in E \wedge \forall x\,(x \in S \Rightarrow x \leqslant m)$ (voir ill. A). S'il existe un tel m, on dit que S est *majoré*.

Rem. : On peut également dire :
m est un *majorant* de $S \Leftrightarrow m$ est le plus grand élément de $S \cup \{m\}$.

Étant donné un sous-ensemble majoré, on peut considérer l'ensemble M de tous ses majorants, et se poser la question de savoir s'il possède un plus petit élément. Ainsi, pour le sous-ensemble F défini précédemment, $M = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x \geq 1\}$ admet 1 comme plus petit élément. L'existence d'un tel « plus petit majorant » (borne supérieure) n'est pas assurée dans le cas général (voir fig. D).

Déf. 7 : $s = \sup(S)$ (*borne supérieure* de S) $:\Leftrightarrow S \subseteq E \wedge M = \{m \mid m$ majorant de $S\} \wedge s$ plus petit élément de M.

De cette définition, on déduit immédiatement que si la borne supérieure d'un sous-ensemble existe, elle est unique (car c'est un plus petit élément). Les relations entre plus grand élément, élément maximal, majorant et borne supérieure sont rappelés en fig. C.

Rem. : La notion de borne supérieure joue un rôle important dans de nombreux processus de complétion, comme la complétion de ℚ par les nombres irrationnels pour obtenir l'ensemble ℝ. Dans (ℚ ; ≤), un sous-ensemble majoré ne possède *pas nécessairement* de borne supérieure (voir fig. D), alors que cette propriété est vraie dans (ℝ ; ≤), grâce à l'introduction des nombres irrationnels (voir p. 59).

Rem. : Les notions de « *minorant* », de sous-ensemble « *minoré* » et de « *borne inférieure* » (inf) sont définies de manière analogue.

Ensemble bien ordonné, bon ordre

La propriété d'une relation d'ordre totale est équivalente à celle qui assure que tout sous-ensemble constitué de deux éléments (et par conséquent, tout sous-ensemble fini non vide) possède un plus petit élément :

$$a \leqslant b \vee b \leqslant a \Leftrightarrow \exists c \begin{pmatrix} c \in \{a, b\} \wedge \\ c \text{ plus petit élément de } \{a, b\} \end{pmatrix}.$$

On peut différencier de ce point de vue (ℕ ; ≤) et (ℤ ; ≤). En effet, dans (ℕ ; ≤), tout sous-ensemble *infini* (y compris ℕ) possède également un plus petit élément, alors que ce n'est pas le cas dans (ℤ ; ≤) (par ex. ℤ lui-même ou $\{0, -1, -2, \ldots\}$ ne possèdent pas de plus petit élément). (ℕ ; ≤) possède donc un ordre total particulier.

Déf. 8 : Un ensemble ordonné $(E ; \leqslant_{b.o.})$ est dit *bien ordonné* si tout sous-ensemble non vide de E possède un plus petit élément. On dit alors que $\leqslant_{b.o.}$ est un *bon ordre*.

Un bon ordre est nécessairement un ordre total, et donc tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné. La réciproque n'est pas vraie, car (ℤ ; ≤) est totalement ordonné, mais non bien ordonné (voir ci-dessus).

Une conséquence notable du bon ordre est la propriété qui assure que tout élément d'un ensemble bien ordonné, s'il n'en est pas le plus grand élément, possède un et un seul successeur, au sens de la relation d'ordre (voir les entiers naturels, p. 53).

Ex. : (ℕ ; ≤), ainsi que tout ensemble totalement ordonné fini, sont bien ordonnés. ℤ peut être bien ordonné, grâce à l'introduction d'une autre relation d'ordre, qui se déduit aisément de la suite (0, 1, – 1, 2, – 2, …) par $z_i \leqslant_{b.o.} z_k :\Leftrightarrow i \leq k$. (ℚ ; ≤) et (ℝ ; ≤) ne sont pas bien ordonnés, puisqu'ils contiennent (ℤ ; ≤). ℚ peut être bien ordonné à l'aide d'une suite – celle du procédé diagonal p. 35, par ex. – mais ce procédé est voué à l'échec pour ℝ, car ce dernier n'est pas dénombrable. Jusqu'à présent, un bon ordre sur ℝ n'a jamais pu être explicité.
Si l'on admet la construction axiomatique conduisant au théorème de ZERMELO (voir ci-dessous), tout ensemble – et donc ℝ – peut être bien ordonné.

Rem. : Les bons ordres sont à la base de l'introduction des ordinaux (voir p. 47).

Théorème de ZERMELO, théorème de ZORN

La littérature mathématique utilise souvent, pour les démonstrations concernant les ensembles infinis, l'induction (ou récurrence) transfinie et le **théorème de ZERMELO :**

Tout ensemble peut être bien ordonné.

Le théorème de ZERMELO est une conséquence de l'axiome du choix, énoncé en théorie des ensembles (voir p. 29). Réciproquement, l'axiome du choix peut être obtenu à partir de la propriété exprimée par le théorème de ZERMELO, prise comme axiome. À cause de cette équivalence, les critiques faites à l'axiome du choix sont également valables pour l'énoncé du théorème de ZERMELO.

Le théorème de ZERMELO ne garantit que l'*existence* d'un bon ordre pour tout ensemble E, mais la relation qui le définit n'a en général aucun rapport avec une quelconque structure d'ordre que l'on pourrait connaître sur E. Enfin, il existe un troisième énoncé, équivalent à l'axiome du choix, donc au contenu du théorème de ZERMELO, qui met en jeu la notion d'*ensemble ordonné inductif*, c'est-à-dire d'ensemble ordonné dans lequel tout sous-ensemble totalement ordonné (pour la relation induite) admet une borne supérieure. Il s'agit du **lemme de ZORN**, autre conséquence de l'axiome du choix :

Tout ensemble ordonné inductif admet au moins un élément maximal.

Le **corollaire du lemme de ZORN** suivant est souvent utile :

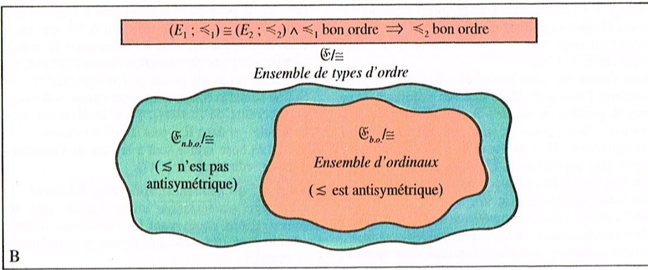
Si $(E ; \leqslant)$ est un ensemble ordonné inductif, alors pour tout $x \in E$ il existe un élément maximal m tel que $x \leqslant m$.

Ex. d'appl. : existence de base pour un espace vectoriel quelconque $\neq \{0\}$ contenant une partie libre donnée.

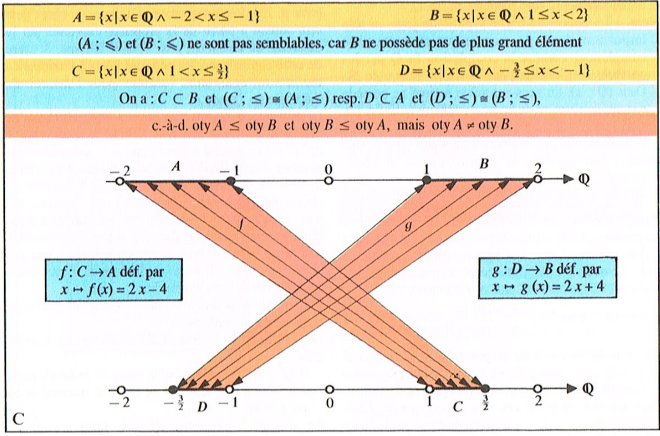
(1)	$(\mathbb{N}\,;\leq):=(0,1,2,\ldots)$	0 = plus petit él., pas de plus grand él.
(2)	$(\mathbb{N}\,;\preccurlyeq_1):=(\ldots,2,1,0)$	pas de plus petit él., 0 = plus grand él.
(3)	$(\mathbb{N}\,;\preccurlyeq_2):=(\ldots,5,3,1,0,2,4,\ldots)$	pas de plus petit él., pas de plus grand él.
(4)	$(\mathbb{N}\cup\{-1\}\,;\preccurlyeq_3):=(0,1,2,\ldots,-1)$	0 = plus petit él., – 1 = plus grand él. le plus grand él. n'a pas d'antécédent
(5)	$(\mathbb{N}\cup\{-1,-2\}\,;\preccurlyeq_4):=(0,1,2,\ldots,-1,-2)$	0 = plus petit él., – 2 = plus grand él. – 1 est l'antécédent du plus grand él.
(6)	$(\mathbb{N}\,;\preccurlyeq_5):=(2,3,4,\ldots,0,1)$	2 = plus petit él., 1 = plus grand él. 0 est l'antécédent du plus grand él.

A

Équipotence et structures d'ordre



Partition en deux sous-ensembles de l'espace quotient des types d'ordre



Ensemble de la non-antisymétrie de $\leq$

La notion de cardinal (p. 35) permet d'appréhender le « nombre » d'éléments d'un ensemble. Elle est basée sur la comparaison, à l'aide d'applications bijectives, d'ensembles *non structurés*. Si les ensembles finis ne posent pas de problèmes, il n'en est pas de même des ensembles infinis. Les exemples les plus simples de ceux-ci sont les ensembles dénombrables, c'est-à-dire ceux qui sont en bijection avec $\mathbb{N}$. Or $\mathbb{N}$ a une structure d'ordre remarquable. Deux de ses éléments peuvent toujours être comparés, un élément a toujours un suivant (ou successeur) et tout élément $\neq 0$ a un antécédent. Un ensemble infini qui ne peut pas être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ est le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Si deux réels peuvent toujours être comparés par la relation d'ordre naturelle de $\mathbb{R}$, en revanche aucun réel n'a de suivant ni d'antécédent. Le repérage et la prise en compte des éléments d'un ensemble E semblent donc pouvoir bénéficier d'une bonne structure d'ordre sur E, cette structure pouvant être définie soit directement, soit par bijection à partir d'un ensemble ordonné. On est amené, de toute façon, à comparer des ensembles ordonnés à l'aide d'applications bijectives compatibles avec les structures d'ordre. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Isomorphismes d'ensembles ordonnés

Déf. 1 : Soit $(E\,;\preccurlyeq_1)$ et $(F\,;\preccurlyeq_2)$ deux ensembles ordonnés et $f:E\to F$ une application. On pose :
(a) *f croissante* : $\Leftrightarrow \forall x\forall y\,\big(x\preccurlyeq_1 y\Rightarrow f(x)\preccurlyeq_2 f(y)\big)$
(b) *f isomorphisme d'ensembles ordonnés* : $\Leftrightarrow f$ bijective $\wedge\ f,\ f^{-1}$ croissantes.
$(E\,;\preccurlyeq_1)$ et $(F\,;\preccurlyeq_2)$ sont dits semblables s'il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés de l'un sur l'autre. On notera $(E\,;\preccurlyeq_1)\cong(F\,;\preccurlyeq_2)$.

Deux ensembles ordonnés semblables possèdent des ordres équivalents (isomorphes), donc ne peuvent pas être différenciés selon leurs structures d'ordre. Dans l'ill. A, seuls les ensembles (5) et (6) sont semblables.

Rem. : Deux ensembles ordonnés semblables sont équipotents, car un isomorphisme d'ensembles ordonnés est une bijection, mais la réciproque n'est pas vraie : deux ensembles équipotents ordonnés ne sont pas nécessairement semblables (voir tab. A).

Type d'ordre

La relation $\cong$ est une relation d'équivalence dans tout ensemble d'ensembles ordonnés $\mathfrak{E}$; en effet :
(1) 1_E est un isomorphisme d'ensembles ordonnés,
(2) f isomorphisme d'ensembles ordonnés $\Rightarrow f^{-1}$ isomorphisme d'ensembles ordonnés,
(3) f isomorphisme d'ensembles ordonnés $\wedge\ g$ isomorphisme d'ensembles ordonnés $\Rightarrow g\circ f$ isomorphisme d'ensembles ordonnés.

L'ensemble quotient $\mathfrak{E}/\cong$ est donc constitué de classes d'ensembles ordonnés semblables.

Déf. 2 : Un élément de l'ensemble quotient $\mathfrak{E}/\cong$ est appelé *type d'ordre*.

On peut attribuer à tout ensemble ordonné de $\mathfrak{E}$ un type d'ordre à l'aide de l'application (surjection canonique, voir p. 31) oty : $\mathfrak{E}\to\mathfrak{E}/\cong$ définie par $(E\,;\preccurlyeq)\mapsto$ oty $(E\,;\preccurlyeq)=[\![(E\,;\preccurlyeq)]\!]$. On vérifie alors que :
oty $(E\,;\preccurlyeq_1)=$ oty $(F\,;\preccurlyeq_2)\Rightarrow$ card $(E)=$ card (F),
mais la réciproque n'est pas vraie (voir tab. A).

Rem. : La propriété de bon ordre étant conservée par un isomorphisme d'ensembles ordonnés, $\mathfrak{E}/\cong$ peut

être partagé en deux sous-ensembles disjoints, $\mathfrak{E}_{b.o.}/\cong$ contenant tous les types d'ordre d'ensembles bien ordonnés, et $\mathfrak{E}_{n.b.o.}/\cong$ contenant ceux des ensembles non bien ordonnés (voir fig. B).

Comparaison de types d'ordre

Puisque deux ensembles ordonnés semblables sont également équipotents, une relation d'ordre $\leq$ pour les types d'ordre doit être compatible avec celle sur les cardinaux (voir p. 35). Une définition naturelle serait alors :
oty $(A\,;\preccurlyeq_1)\leq$ oty $(B\,;\preccurlyeq_2)$: $\Leftrightarrow \exists C\,(C\subseteq B\wedge C\cong A)$,
où C est un sous-ensemble de B muni de l'ordre induit (voir p. 35).

La relation ainsi définie est effectivement réflexive et transitive, mais non antisymétrique (voir ill. C), donc n'est pas une relation d'ordre. En revanche, si on se restreint au sous-ensemble $\mathfrak{E}_{b.o.}/\cong$ des types d'ordres d'ensembles bien ordonnés, l'antisymétrie est alors vérifiée (conséquence de la prop. 1, voir ci-dessous).

Ordinaux

Déf. 3 : Le type d'ordre d'un ensemble bien ordonné est appelé *ordinal*, que l'on note en abrégé ord $(E\,;\preccurlyeq_{b.o.})$ (voir fig. B).

Rem. : L'application ord peut être considérée comme la restriction de oty au sous-ensemble $\mathfrak{E}_{b.o.}$ des ensembles bien ordonnés de $\mathfrak{E}$.

Si on restreint la relation $\leq$ définie ci-dessus aux ordinaux, elle devient une relation d'ordre et on la note définitivement $\leq$. En outre, la structure particulière des ensembles bien ordonnés fait que cette relation est *totale* et est aussi un *bon ordre* sur tout ensemble d'ordinaux.

Pour cette étude, on utilise la notion de *section commençante ouverte*, resp. *fermée* dans un ensemble totalement ordonné E. Si $x\in E$, la partie $A_x:=\{y\in E\,|\,y<x\}$ est la section commençante ouverte définie par x, tandis que $A_x:=\{y\in E\,|\,y\leq x\}$ est la section commençante fermée (voir p. 59). On a le résultat remarquable :

Prop. 1 : *Soient deux ensembles bien ordonnés. Alors soit ils sont semblables, soit l'un est semblable à une section commençante proprement dite de l'autre.*

Corollaire : *Un ensemble bien ordonné n'est semblable à aucune de ses sections commençantes proprement dites.*

Ordinaux finis

$(\mathbb{N}\,;\leq)$ est bien ordonné, et donc tout sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ l'est également. Les sous-ensembles $\varnothing$, $\{0\}$, $\{0,1\}$,… quand ils sont non structurés, représentent les cardinaux finis. Munis de l'ordre induit, ils représentent les ordinaux finis. En effet, soit $(E\,;\preccurlyeq_{b.o.})$ un ensemble bien ordonné tel que card $(E)=n$: on peut alors le représenter sous la forme d'une suite, comme $a_0\preccurlyeq_{b.o.}a_1\preccurlyeq_{b.o.}\ldots\preccurlyeq_{b.o.}a_{n-1}$. L'application $f:E\to\{0,1,\ldots n-1\}$, définie par $a_i\mapsto i$ est alors un isomorphisme d'ensembles ordonnés, ce qui signifie que ord $(E\,;\preccurlyeq_{b.o.})=$ ord $\big(\{0,1,\ldots,n-1\}\,;\leq\big)$.

L'exemple des ensembles finis montre clairement que plusieurs bons ordres peuvent être définis sur un même ensemble (toute permutation différente de l'identité appliquée aux éléments de la suite crée un

$(A\,;\leqslant_{b.o.}) := (a, b, \ldots)$ $\qquad \alpha := \text{ord}\,(A\,;\leqslant_{b.o.})$

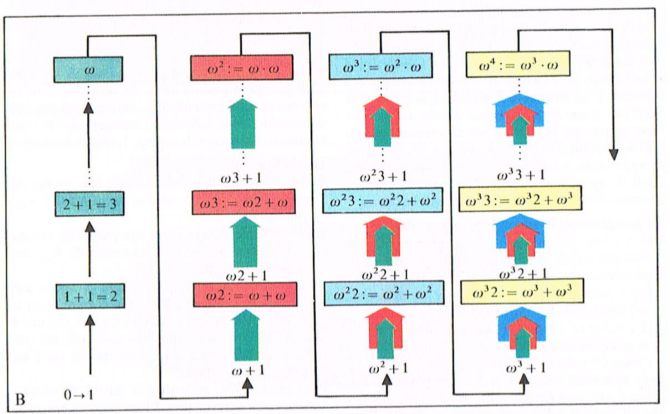
↕ ↕ ↕

$(A \cup \{x\}\,;\leqslant_{b.o.}) := (a, b, \ldots, x)$ $\qquad \beta := \text{ord}\,(A \cup \{x\}\,;\leqslant_{b.o.})$

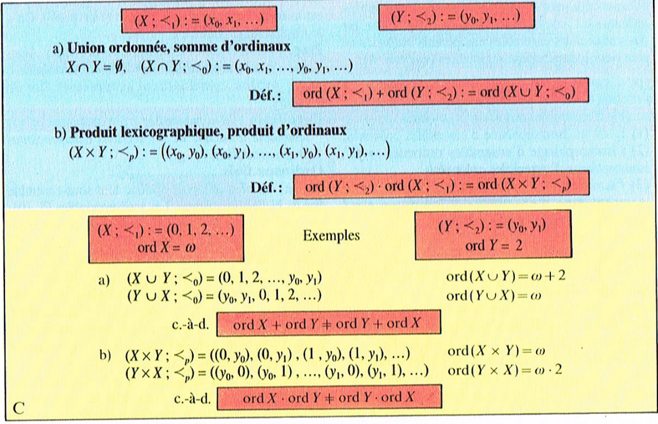
On a : $\alpha < \beta \wedge \neg \exists\, \gamma (\alpha < \gamma < \beta)$

A

Successeur d'un ordinal



Suite d'ordinaux (CANTOR)



Somme et produit d'ordinaux

nouveau bon ordre ; si card $(E) = n$, il existe alors n ! bons ordres sur E différents deux à deux). Mais, pour des ensembles *finis*, les différents bons ordres sont associés au même ordinal (voir plus haut), c.-à-d.

$$\text{card}\,(E) = \text{card}\,(F) \Leftrightarrow \text{ord}\,(E) = \text{ord}\,(F).$$

Les ordinaux finis peuvent alors être confondus avec les cardinaux finis 0, 1, 2 etc. En revanche, il existe une différence essentielle entre les ordinaux infinis et les cardinaux infinis (classes ordinales, voir p. 49).

Ordinaux infinis

Un ordinal infini important est $\omega := \text{ord}\,(\mathbb{N}\,;\leq)$. ω est le *plus petit* ordinal infini.

En effet, si ord $(A\,;\leqslant_{b.o.}) < \omega$, alors $(A\,;\leqslant_{b.o.})$ est nécessairement semblable à une section commençante de $(\mathbb{N}\,;\leq)$ (th. 1, p. 47), laquelle est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. Ceci implique que A est également fini, et donc que ord $(A\,;\leqslant_{b.o.})$ est un ordinal fini.

On peut trouver d'autres ordinaux infinis à l'aide de la

Prop. 2 : *Si l'on ajoute à un ensemble représentant un ordinal α un élément comme plus grand élément du nouvel ensemble ainsi formé, on obtient un ensemble qui est un représentant de l'ordinal β, successeur immédiat de α ($\beta := \alpha + 1$)* (voir tab. A).

Ainsi, les ensembles bien ordonnés $(0, 1, \ldots, -1)$, $(0, 1, \ldots -1, -2)$, … $(0, 1, \ldots, -1, \ldots, -n)$ etc. sont des représentants des ordinaux successeurs de ω : $\omega + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$, $\omega + 2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\}$, $\omega + n = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega + n - 1\}$, etc. La prop. 2 permet de construire le successeur $\alpha + 1$ de tout ordinal α, mais ce procédé ne permet pas d'atteindre *tous* les ordinaux. Par exemple, l'ordinal associé à $(1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots)$, que l'on note $\omega + \omega = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$, ne peut pas être atteint, car cet ensemble ne possède pas de plus grand élément. Ceci serait également valable si on voulait appliquer ce procédé aux ordinaux finis pour construire ω. De manière générale, on appelle *ordinal limite* un ordinal ($\neq 0$) qui n'est pas le successeur immédiat d'un autre ordinal : ω et $\omega + \omega$ en sont deux exemples.

On peut alors répéter le procédé ci-dessus, en partant d'un ordinal limite. Ainsi, à partir de $\omega + \omega$ (ou $\omega \cdot 2$), on obtient l'ordinal limite qui lui est immédiatement supérieur, $\omega + \omega + \omega$ (ou $\omega \cdot 3$), etc. On construit ainsi une *suite d'ordinaux*, infinie (voir ill. B), dite suite de CANTOR, dont une des propriétés importantes s'exprime sous la forme :

Prop. 3 : *L'ordinal d'une section commençante ouverte quelconque Ω_α de l'ensemble bien ordonné engendré par la suite de* CANTOR *est α.*

Antinomie de BURALI-FORTI

L'*ensemble Ω de tous les ordinaux* est une notion contradictoire. En effet, si l'on accepte l'existence de cet ensemble, alors il peut être bien ordonné (bon ordre $\leq$, voir p. 47). Il existe donc un ordinal $\alpha := \text{ord}\,(\Omega\,;\leq)$, avec $\alpha \in \Omega$. α permet de définir une section commençante ouverte Ω_α de $(\Omega\,;\leq)$, qui vérifie ord $(\Omega_\alpha\,;\leq) = \alpha$ puisque Ω est supposé contenir tous les ordinaux (l'ordinal associé à la section commençante fermée est $\alpha + 1$). $(\Omega_\alpha\,;\leq)$ et $(\Omega\,;\leq)$ sont donc semblables, ce qui est en contradiction avec la prop. 1 (p. 47).

Classes ordinales

Un ensemble non structuré peut être bien ordonné de plusieurs façons. Dans le cas des ensembles infinis, on peut produire ainsi différents ordinaux (voir ill. A, p. 46).

Si a est un cardinal, on appelle *classe ordinale* $Z(a)$ l'ensemble de tous les ordinaux dont les représentants sont de cardinal a. On a alors :

$$a \text{ fini} \Rightarrow \text{card}\,(Z(a)) = 1,$$
$$a \text{ infini} \Rightarrow \text{card}\,(Z(a)) \geq a.$$

Par exemple, $Z(\aleph_0)$, où $\aleph_0 = \text{card}\,(\mathbb{N})$ est un ensemble non dénombrable, dont le cardinal est désigné par $\aleph_1$. On peut montrer qu'il n'existe pas de cardinal compris entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$. Si l'on accepte l'hypothèse du continu (voir p. 35), on en déduit alors : $\text{card}\,(\mathbb{R}) = \aleph_1$.

Rem. : A l'aide de la notion de classe ordinale et du bon ordre $\leq$ sur les ordinaux, on montre que la relation $\leq$ sur les cardinaux est aussi un bon ordre.

Opérations sur les ordinaux

L'*union ordonnée* d'ensembles ordonnés permet de définir une *addition non commutative* sur les ordinaux (voir ill. C / a) ; à l'aide du *produit lexicographique* d'ensemble ordonnés, on introduit une *multiplication non commutative* d'ordinaux (voir ill. C / b). Ces deux lois sont associatives, mais la multiplication n'est distributive qu'à gauche par rapport à l'addition (cf. opérations sur les cardinaux p. 35).

Repérage des éléments d'un ensemble

Le cardinal α d'un ensemble E non vide peut être défini comme le plus petit ordinal équipotent à E. On peut transporter sur E un bon ordre $\leqslant_{b.o.}$ par la bijection associée à cette équipotence.

On a $\alpha := \text{ord}\,(E\,;\leqslant_{b.o.}) \cdot (E\,;\leqslant_{b.o.})$ est semblable à la section commençante ouverte Ω_α formée des ordinaux $\beta < \alpha$. $\forall x \in E$, la section commençante ouverte $S_x := \{y \in E \mid y < x\}$ définit l'ordinal ord (S_x). Si $x' \neq x''$, on a ord $(S_{x'}) \neq$ ord $(S_{x''})$. On peut donc repérer (« compter » serait abusif) les éléments de E à l'aide de ces ordinaux dont l'ensemble constitue α.

Si E est dénombrable, on retrouve une numérotation de E par $\mathbb{N}$.

Induction transfinie

Le cinquième axiome de PEANO (voir p. 53) énonce :

$$\forall M \left(\begin{pmatrix} M \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in M \wedge \\ \forall n\,(n \in M \Rightarrow succ.(n) \in M) \end{pmatrix} \Rightarrow M = \mathbb{N} \right).$$

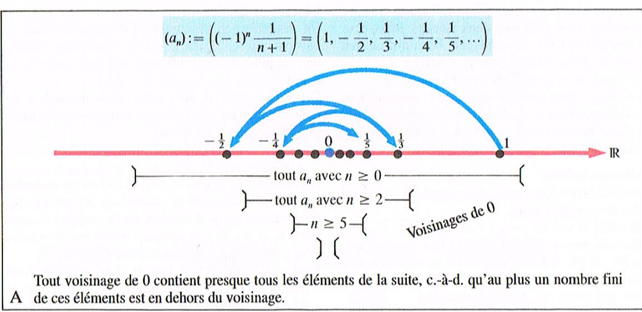
Il est généralisable aux sections commençantes ouvertes d'ordinaux. Cela permet une extension du principe de récurrence (voir p. 21) appelée induction transfinie.

Prop. 4 : *Soit $\Omega_\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ une section commençante ouverte d'un ordinal et $E \subseteq \Omega_\alpha$. Si* (1) *$0 \in E$ et* (2) *pour toute section commençante ouverte $\Omega_\beta \subseteq E$ ($\beta < \alpha$) on a aussi $\beta \in E$, alors $E = \Omega_\alpha$.*

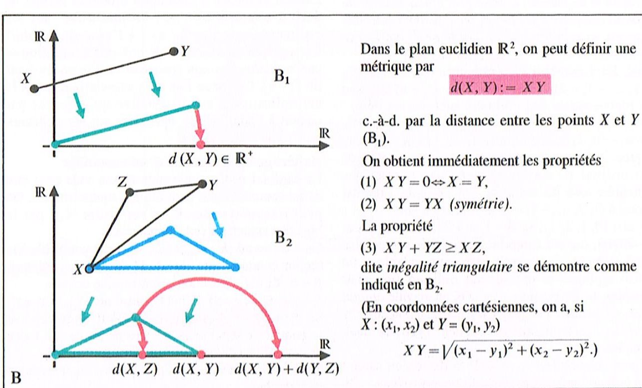
Si $\Omega_\alpha = \mathbb{N}$, on retrouve le cinquième axiome de PEANO. La prop. 4 rend possible l'extension du principe de récurrence aux ordinaux infinis. On pourra ainsi démontrer des propriétés de la forme $\forall \beta\,(\beta \in \Omega_\alpha \Rightarrow A(\beta))$. Il suffira pour cela de démontrer :

$$(1)\ A(0), \qquad (2)\ (\forall \gamma\,(\gamma < \beta \Rightarrow A(\gamma))) \Rightarrow A(\beta).$$

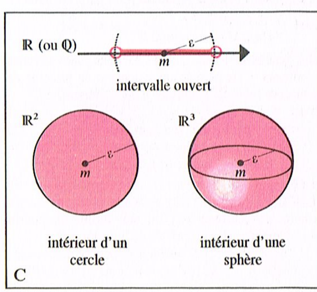
Dans le cas $\Omega_\alpha = \mathbb{N}$, (2) est équivalent à $\forall n\,(A(n) \Rightarrow A(n+1))$.



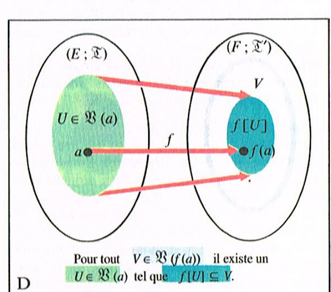
Convergence d'une suite



Distance dans le plan euclidien $ℝ^2$



Boules ouvertes de centre m et de rayon ε



Continuité en un point a

Les suites (p. 33) sont un moyen d'étude et de construction important (voir par ex. p. 61 ou la partie Analyse). Cependant, les structures algébriques et les structures d'ordre ne permettent pas de définir la notion de *convergence d'une suite*. De manière intuitive, l'existence d'une limite pour une suite signifie que dans tout « voisinage » de cette limite, on trouve toujours tous les éléments de la suite sauf un nombre fini d'entre eux (voir fig. A). Cette définition intuitive sera reprise de manière rigoureuse en utilisant des sous-ensembles particuliers de l'ensemble initial. Ce dernier sera muni d'une structure dite topologique, et deviendra alors un espace topologique, dans lequel la notion de voisinage est définie de manière axiomatique. On pourra alors passer à la définition de la convergence d'une suite.

Espace topologique

Les axiomes utilisés devant naturellement être les plus simples possibles, on est amené à la définition suivante :

Déf. 1 : $(E ; \mathfrak{T})$ est un espace topologique si $\mathfrak{T}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{P}(E)$ possédant les propriétés suivantes :

(I) $\emptyset \in \mathfrak{T}$, $E \in \mathfrak{T}$, (II) $O_1, O_2 \in \mathfrak{T} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{T}$,
(III) $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcup_{O \in \mathfrak{T}'} O \in \mathfrak{T}$.

$\mathfrak{T}$ est appelé *topologie* sur E. Les éléments de $\mathfrak{T}$ sont appelés *ouverts*, ceux de E *points*.

La notion de voisinage peut alors être définie, à l'aide des ouverts :

Déf. 2 : V est appelé *voisinage* de x si $V \subseteq E$ et s'il existe un $O \in \mathfrak{T}$ tel que $x \in O \subseteq V$. On désigne par $\mathfrak{V}(x)$ l'ensemble de tous les voisinages de x ; on remarque que $\mathfrak{V}(x) \neq \emptyset$, car $E \in \mathfrak{V}(x)$.

Rem. : Un espace topologique peut aussi être défini à l'aide d'axiomes sur les voisinages, la notion d'ouvert en découlant ensuite (voir p. 215).

A l'aide de la notion de voisinage, on définit la convergence d'une suite :

Déf. 3 : Soit $(a_0, a_1, \dots)$ une suite dans un espace topologique $(E ; \mathfrak{T})$. On dit que la suite *converge* vers $a \in E$ $\left(\text{et on note } \lim_{n \to \infty} a_n = a\right)$ si pour tout voisinage $V \in \mathfrak{V}(x)$ il existe un $n_0 \in ℕ$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in V$.

Dans un espace topologique le plus général possible, la limite d'une suite n'est pas nécessairement unique (voir p. 225). En revanche, si pour tout couple de points de E distincts on peut trouver deux ouverts disjoints les contenant (espace séparé au sens de HAUSDORFF), alors la limite est unique. Les espaces métriques sont des espaces séparés.

Espace métrique

Un ensemble E est un *espace métrique* si l'on a défini une *distance* sur E, c.-à-d. s'il existe une application $d : E \times E \to ℝ_+$ vérifiant les propriétés

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

(voir l'ill. B pour l'exemple de $ℝ^2$).

Ex. : ℚ et ℝ deviennent des espaces métriques pour la distance définie par la valeur absolue :

$$d(x, y) := |x - y| \text{ (voir p. 57).}$$

Tout espace métrique peut aisément être rendu topologique. Pour cela, on définit une *boule ouverte de centre m et de rayon* $\varepsilon > 0$ par $B(m, \varepsilon) := \{x | x \in E \wedge d(x, m) < \varepsilon\}$ (voir fig. C), et on dit qu'un sous-ensemble non vide de E est ouvert s'il contient au moins une boule ouverte centrée en chacun de ses points. Dans une telle topologie, les boules ouvertes jouent un rôle particulier, car ce sont elles-mêmes des ouverts et donc tout ouvert non vide est une réunion de boules ouvertes. Ainsi, au lieu de considérer l'ensemble des voisinages d'un point, il suffit de considérer l'ensemble des boules ouvertes centrées en ce point. Une suite est alors convergente vers a dès que pour toute boule ouverte $B(a, \varepsilon)$, il existe $n_0 \in ℕ$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in B(a, \varepsilon)$ (voir déf. 3), c.-à-d. si on a

$$\forall \varepsilon \left(\varepsilon \in ℝ_+^* \Rightarrow \exists n_0 \forall n \left(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon\right)\right).$$

Il est facile de prouver que tout espace métrique est séparé.

Applications continues

Les applications compatibles avec la structure topologique doivent être définies à l'aide des ouverts. Cela amène à définir les applications continues.

Déf. 4 : Soit $(E ; \mathfrak{T})$, $(F ; \mathfrak{T}')$ des espaces topologiques et $f : E \to F$ une application. f est dite *continue sur E* si $\forall O \left(O \in \mathfrak{T}' \Rightarrow f^{-1}[O] \in \mathfrak{T}\right)$ (voir fig. C p. 36).

f est dite continue en $a \in E$ (continuité locale) si (voir fig. D) $\forall V \left(V \in \mathfrak{V}(f(a)) \Rightarrow \exists U \left(U \in \mathfrak{V}(a) \wedge f[U] \subseteq V\right)\right)$.

On peut montrer que f est continue sur E si et seulement si elle est continue en tout point de E.

Rem. : Deux espaces topologiques sont indiscernables d'un point de vue topologique s'il existe un homéomorphisme (bijection continue f dont la réciproque f^{-1} est continue) entre eux. Les applications continues sont les applications compatibles avec la structure topologique (voir Topologie).

Dans les espaces métriques, la continuité locale peut être démontrée au moyen des boules ouvertes :

f est continue en a si, et seulement si, toute boule ouverte centrée en $f(a)$ contient l'image d'une boule ouverte centrée en a.

On peut aller encore plus loin dans les espaces métriques et déduire la continuité locale de considérations sur les limites :

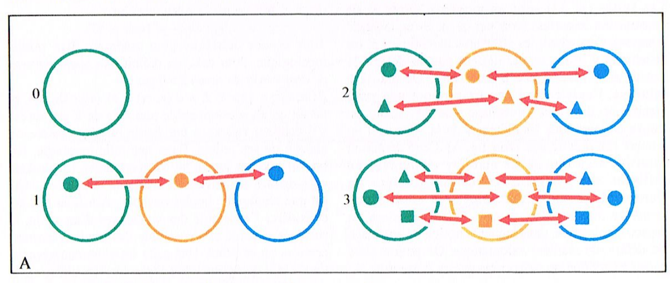
f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite (a_n) convergeant vers a, on a :

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} a_n\right) = f(a).$$

C'est une condition usuelle de continuité en Analyse.

Structures topologiques particulières

Espace séparé et espace métrique sont déjà deux structures topologiques. L'étude de structures topologiques dérivées (sous-espace, espace produit, espace quotient) et de structures topologiques particulières, possédant des propriétés additionnelles (par ex. connexité, compacité), sera entreprise en Topologie (voir p. 207).



Interprétation des nombres naturels comme cardinaux naturels

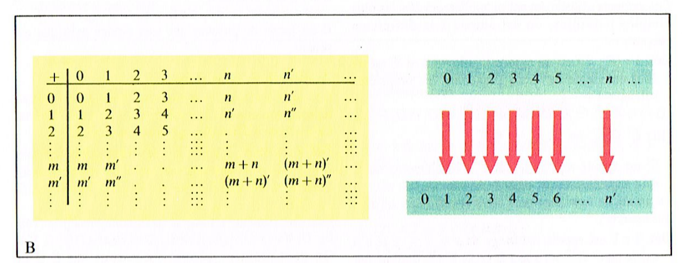
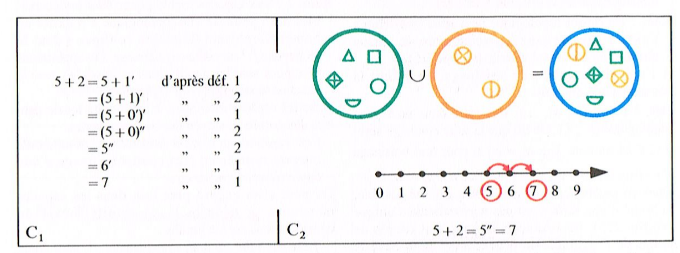


Table d'addition et relation de succession dans ℕ



Justification du résultat 5 + 2 = 7, interprétation en réunion d'ensembles et en graduation régulière sur une droite

	Addition	Multiplication
Associativité	$(n+m)+k = n+(m+k)$	$(nm)\,k = n(mk)$
Commutativité	$n+m = m+n$	$nm = mn$
Éléments neutres	$n+0 = 0+n = n$	$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$
Monotonie	$n \leq m \Leftrightarrow n+k \leq m+k$	$k > 0 \Rightarrow (n \leq m \Leftrightarrow nk \leq mk)$
Règle de simplification	$n+k = m+k \Rightarrow n = m$	$k \neq 0 \Rightarrow (nk = mk \Rightarrow n = m)$
Distributivité	$k(m+n) = km+kn$	

D

Règles de calcul dans le demi-anneau des nombres naturels

Construction des entiers naturels

Une opération de recensement conduit en particulier à répartir une collection d'objets en ensembles d'éléments de même nature, mais de populations en général plus ou moins importantes. La notion d'*entier naturel* est le résultat d'une démarche qui consiste d'abord à ranger dans une même classe des ensembles de populations comparables (fig. A) c.-à-d. des ensembles équipotents (p. 35). Puis en convenant d'introduire la classe de l'ensemble vide à laquelle on associe l'entier *zéro*, noté 0, on construit axiomatiquement l'ensemble ℕ des entiers naturels qui permet de préciser un ensemble particulier des classes précédentes (les classes d'ensembles dits finis). Les trois axiomes suivants définissent ℕ à un isomorphisme près (ils sont dus à Peano).

(1) 0 est un élément de ℕ.

(2) Il existe une bijection de ℕ sur ℕ \ {0} noté aussi $\mathbb{N}^*$: $x \mapsto S(x)$. [S(x) est le *successeur* x' de x.]

(3) Si une partie P de ℕ contient 0 et le successeur de tout élément de P, alors $P = \mathbb{N}$.

L'axiome (3), dit axiome d'induction, est fondamental. D'une part si on substitue par exemple ℝ à ℕ dans (1) et (2) on trouve bien deux propriétés de ℝ : or ℝ n'est pas isomorphe à ℕ puisque ℝ et ℕ ne sont pas équipotents. D'autre part ce troisième axiome est à la base du raisonnement par récurrence (ou procédé de démonstration par *induction complète* p. 21) : soit A une assertion dépendant d'un entier naturel n. Si A (0) est vraie et si quel que soit $n \in \mathbb{N}$ on a l'implication (A (n) vraie ⇒ A (n') vraie), alors A (n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. À partir de l'entier naturel 0 on peut donc ainsi construire tous les entiers naturels.

Déf. 1 : $1 := 0'$, $2 := 1'$, $3 := 2'$, etc.

Opérations

Les opérations d'addition et de multiplication des entiers naturels n'ont pas leur définition contenue implicitement dans la construction axiomatique de ℕ. La somme $n + m$ et le produit $n \cdot m$ des deux entiers naturels n et m sont construits par récurrence en posant :

Déf. 2 : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $n + 0 = n$, $n \cdot 0 = 0$ et $\forall\, (n, m) \in \mathbb{N}^2$ $n + m' := (n + m)'$, $n \cdot m' = n \cdot m + n$.

Addition

De $n + 0 = n$ et $n + m' = (n + m)'$
on tire $n + 0' = (n + 0)'$, soit $n + 1 = n'$;
de même $n + 2 = n + 1' = (n + 1)' = (n')'$... etc. (ill. B et C_1). Il s'agit bien d'une opération interne.

Th. 1 : *L'addition est associative* : $\forall\, (n, m, k) \in \mathbb{N}^3$ *on a* $(n + m) + k = n + (m + k)$.

Dém. : $\forall\, (n, m) \in \mathbb{N}^2$, c'est vrai pour $k = 0$. En faisant l'hypothèse de récurrence
$(n + m) + p = n + (m + p)$, on déduit
$(n + m) + p' = ((n + m) + p)' = (n + (m + p))'$
$= n + (m + p)' = n + (m + p')$, d'où le résultat.

Th. 2 : 0, *qui est neutre à droite par convention, est également neutre à gauche.*

Dém. : On a $0 + 0 = 0$. En faisant l'hypothèse de récurrence $0 + p = p$, on écrit successivement :
$0 + p' = 0 + (p + 1) = (0 + p) + 1 = p + 1 = p'$.
D'où la propriété de 0.

Th. 3 : *L'addition est commutative* :
$\forall\, (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n + m = m + n$.

Dém. : c'est vrai pour n ou m valant 0 d'après le th. 2. On prouve alors que c'est vrai pour n ou m valant 1. On a déjà $0 + 1 = 1 + 0$. Si on fait l'hypothèse de récurrence $p + 1 = 1 + p$, on peut écrire $p' + 1 = (p + 1) + 1 = (1 + p) + 1 = 1 + (p + 1) = 1 + p'$. D'où la propriété $\forall n$, $n + 1 = 1 + n$. On termine par le cas général : on sait déjà que $n + 0 = 0 + n$ et $n + 1 = 1 + n$ pour tout n. n étant laissé fixe, on fait l'hypothèse de récurrence $n + p = p + n$. On écrit alors $n + p' = n + (p + 1) = (n + p) + 1 = (p + n) + 1 = p + (n + 1) = p + (1 + n) = (p + 1) + n = p' + n$. D'où la propriété de commutativité.

Rem. : (ℕ, +) est un demi-groupe commutatif (p. 39). Il permet d'interpréter commodément (existence et propriétés) la « somme » de deux classes d'ensembles finis comme classe d'un autre ensemble fini (fig. C_2).

Multiplication

C'est une deuxième opération interne. On l'étudie par des procédés analogues à ceux employés pour l'addition. On peut réunir ses propriétés dans le

Th. 4 : *La multiplication dans* ℕ *est associative et commutative. Elle possède un élément neutre (l'élément* 1*). Elle est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition.*

La dernière propriété s'énonce $\forall\, (m, n, k) \in \mathbb{N}^3$ $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$ pour la distributivité à droite (de façon analogue à gauche).

Structure d'ordre

La déf. 3 donne à ℕ une *structure d'ordre total* (p. 43) :

Déf. 3 : $n \leq m :\Leftrightarrow \exists\, p \in \mathbb{N} \,/\, n + p = m$.

(On pose également $n < m :\Leftrightarrow n \leq m \wedge n \neq m$. Cette inégalité stricte ne définit pas une relation d'ordre.)

La structure d'ordre total de ℕ est compatible avec l'addition (*loi de monotonie*) :

Th. 5 : $\forall k \in \mathbb{N}$ $n + k \leq m + k \Leftrightarrow n \leq m$.

Le cas particulier $n + k = m + k \Leftrightarrow n = m$ porte le nom de *règle de simplification* lorsqu'il est pris dans le sens ⇒. De même la structure d'ordre total de ℕ est compatible avec la multiplication par un entier naturel non nul (*loi de monotonie*) :

Th. 6 : $\forall\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $n \cdot k \leq m \cdot k \Leftrightarrow n \leq m$.

Le cas particulier $n \cdot k = m \cdot k \Leftrightarrow n = m$ pour $k \neq 0$ est également une règle de simplification dans le sens ⇒.

Rem. : 1) Une partie P de ℕ, contenant l'entier naturel k et le successeur de tout élément de P, contient de manière équivalente tous les entiers naturels $n \geq k$.

2) La représentation géométrique des nombres naturels par l'intermédiaire d'un diagramme de Hasse (p. 43) se concrétise par une demi-droite d'origine 0 munie d'une division régulière indéfinie (fig. C_2).

Soustraction, division

Le tableau D résume les propriétés d'addition, de multiplication et d'ordre du demi-anneau commutatif unitaire ℕ. L'équation dans ℕ, d'inconnue x, $x + n = m$ n'est possible que si l'on a $m \geq n$: la solution, unique, s'appelle la *différence* $m - n$, qu'on obtient par *soustraction*.

De même l'équation, d'inconnue y, $y \cdot n = m$ n'est pas toujours possible, même pour $n \neq 0$. L'algorithme de la division pour obtenir le *quotient* de m par n non nul n'aboutit pas en général à un dernier *reste* nul.

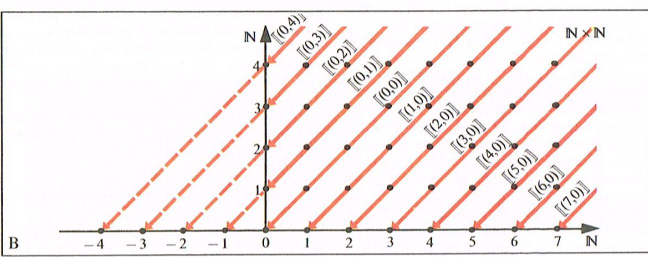
La construction d'autres nombres que ceux de ℕ permet de réduire ces impossibilités.

M_1 x f M_3 $f(x) = g(i(x))$ i g $i(x)$ M_2

$i: M_1 \to M_2$
$f: M_1 \to M_3$
$g: M_2 \to M_3$
$f = g \circ i$

A

Condition d'universalité pour l'extension d'une structure



ℤ ensemble des classes d'équivalence dans ℕ × ℕ modulo l'alignement oblique indiqué en rouge

Addition

A₁ $a \in \mathbb{Z}_+ \wedge b \in \mathbb{Z}_- \wedge |a| \geq |b| \Rightarrow a + b = |a| - |b|$.
$a \in \mathbb{Z}_+ \wedge b \in \mathbb{Z}_- \wedge |a| \leq |b| \Rightarrow a + b = -(|b| - |a|)$.

Pour additionner deux entiers relatifs non nuls de signes contraires mais non opposés, on fait la différence de leurs valeurs absolues qu'on affecte du signe de l'entier ayant la plus grande valeur absolue.

A₂ $a \in \mathbb{Z}_- \wedge b \in \mathbb{Z}_- \Rightarrow a + b = -(|a| + |b|)$.

Pour additionner deux entiers relatifs non nuls de même signe, on prend la somme de leurs valeurs absolues qu'on affecte du signe commun aux deux entiers.

Soustraction

S $a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - b = a + (-b)$.

Soustraire un entier non nul, c'est additionner son opposé.

Multiplication

M₁ $a \in \mathbb{Z}_+ \wedge b \in \mathbb{Z}_- \Rightarrow ab = -|a| \cdot |b|$.

Faire le produit de deux entiers non nuls de signes contraires équivaut à prendre l'opposé du produit de leurs valeurs absolues.

M₂ $a \in \mathbb{Z}_- \wedge b \in \mathbb{Z}_- \Rightarrow ab = |a| \cdot |b|$.

Faire le produit de deux entiers non nuls de même signe équivaut à faire le produit de leurs valeurs absolues.

C

Règles de calcul pour les entiers relatifs

Problème général d'extension

La soustraction dans ℕ, opération inverse de l'addition, n'est pas toujours possible ; il en est de même de la division dans ℕ\{0}, opération inverse de la multiplication. On sait que pour rendre la soustraction opérationnelle sans restriction, il suffit d'introduire les *nombres entiers négatifs*. L'extension, par ce procédé, du *demi-anneau* ℕ des entiers naturels aboutit à *l'anneau* ℤ des *nombres entiers relatifs*.

Pour cette extension, et d'autres ultérieures, il convient de bien poser le problème :

(1) M_1 étant un ensemble structuré, c.-à-d. un espace (ici ℕ), il s'agit de construire, dans le sens (2), (3), un deuxième espace M_2 (ici ℤ), à rôle *universel* (*cf.* infra), dont la structure d'une part contient celle de M_1, et d'autre part vérifie une propriété P étrangère à celle-ci.

(2) Il existe une injection i de M_1 dans M_2 compatible avec les structures (p. 37) permettant ainsi de plonger M_1 dans M_2 : M_1 et $i(M_1)$ étant isomorphes, on identifie M_1 à $i(M_1)$.

(3) Si M_3 est un espace dont la structure contient celle de M_1 et vérifie P, et si M_1 peut être plongé dans M_3 par au moins une injection f compatible avec les structures, alors, quelle que soit cette injection f, M_2 peut être plongé dans M_3 par une injection g compatible avec les structures telle que l'on ait $f = g \circ i$ (*propriété universelle* de i, ill. A).

Ainsi M_2 apparaît, indépendamment du procédé de construction adopté, comme le plus petit sur-espace de M_1, à un isomorphisme près, vérifiant la propriété P.

Construction de ℤ

Si l'on a dans ℕ $n_1 \geq m_1$, la différence $n_1 - m_1$ existe et il y a une infinité de couples $(n_2, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que l'on ait $n_2 - m_2 = n_1 - m_1$. Cette dernière égalité traduit d'ailleurs la situation $n_1 + m_2 = n_2 + m_1, n_1 \geq m_1$.

La relation $\mathcal{R}$ définie dans ℕ × ℕ par $(n_1, m_1) \mathcal{R} (n_2, m_2) :\Leftrightarrow n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ est une relation d'équivalence (p. 31). L'ensemble des classes $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \mathcal{R}$, que l'on va munir d'une structure, se note ℤ. Si $n \geq m$ la classe $[\![(n, m)]\!]$ peut aussi s'écrire $[\![(n-m, 0)]\!]$. Si $n \leq m$ on peut prendre l'écriture $[\![(0, m-n)]\!]$.

Structure algébrique de ℤ

On définit une addition dans ℤ, induite par celle de ℕ, en posant $[\![(n, m)]\!] + [\![(l, k)]\!] = [\![(n + l, m + k)]\!]$. Cette convention est *licite* car la classe du second membre est indépendante du choix des représentants adoptés pour définir les deux classes dont on fait la somme. De même on définit un produit :

$[\![(n, m)]\!] \cdot [\![(l, k)]\!] = [\![(n \cdot l + m \cdot k, m \cdot l + n \cdot k)]\!]$, convention également licite.

Muni de ces deux opérations, ℤ est un anneau commutatif unitaire. L'élément neutre de l'addition est $[\![(0, 0)]\!]$, celui de la multiplication est $[\![(1, 0)]\!]$. La soustraction dans ℤ est donc toujours possible.

ℤ extension de ℕ

L'application de ℕ dans ℤ définie par $n \to [\![(n, 0)]\!]$ est une injection i vérifiant les relations $\forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $i(n + m) = i(n) + i(m)$, $i(n \cdot m) = i(n) \cdot i(m)$. Comme de plus $i(1) = [\![(1, 0)]\!]$, les éléments neutres de la multiplication se correspondent : il s'agit donc d'un homomorphisme du demi-anneau unitaire ℕ dans l'anneau unitaire ℤ (homomorphismes d'anneaux p. 81). Par suite en identifiant les éléments $[\![(n, 0)]\!]$ et n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on plonge ℕ dans ℤ en respectant les structures liées aux deux opérations d'addition et de multiplication.

En remarquant que, pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ les classes $[\![(n, 0)]\!]$ et $[\![(0, n)]\!]$ sont opposées et qu'on a également $n - n = 0$ dans ℕ, on convient de simplifier l'écriture $[\![(0, n)]\!]$ en $-n$ (*cf.* règles de calcul dans ℤ). Finalement l'ensemble ℤ apparaît sous la forme $\mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, comme on l'a fait remarquer dans l'introduction, les éléments $-n$ étant qualifiés d'*entiers négatifs* au sens strict, ceux de ℕ\{0} étant les entiers positifs au sens strict (*cf.* infra). On pose dans la suite $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}, \mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}_-^* = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

La propriété d'universalité de i sera étudiée dans un cadre général pp. 78, 79. On conçoit bien toutefois qu'un anneau contenant ℕ ne peut pas avoir « moins d'éléments » que ceux qu'on vient de mettre en évidence. (ℤ, +) est, à un isomorphisme près, le plus petit groupe additif contenant le demi-groupe (ℕ, +). De même (ℤ, +, ·) est, à un isomorphisme près, le plus petit anneau commutatif unitaire contenant le demi-anneau commutatif unitaire (ℕ, +, ·).

La multiplication dans ℤ fait de cet anneau un anneau *sans diviseur de zéro*, c.-à-d. un anneau *intègre* (p. 41) : le produit de deux éléments de ℤ ne peut être nul que si l'un des deux facteurs est nul comme on le constate dans l'étude des règles de calcul dans ℤ.

Structure d'ordre dans ℤ

On définit une relation d'ordre dans ℤ de la même façon que dans ℕ : $a \leq b :\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} / a + p = b$. Il s'agit d'un ordre total, dont la restriction à ℕ s'identifie à l'ordre défini sur ℕ. Alors que l'ordre de ℕ est un bon ordre, celui de ℤ perd cette propriété (p. 45). ℕ est le sous-ensemble des éléments de ℤ qui sont ≥ 0. L'inégalité $a \leq b$ est compatible avec l'addition dans ℤ : $\forall c, a + c \leq b + c \Leftrightarrow a \leq b$. En revanche si on a bien $\forall c > 0, ac \leq bc \Leftrightarrow a \leq b$, il faut écrire $\forall c < 0, ac \leq bc \Leftrightarrow a \geq b$.

Rem. : L'application $x \to x + 1$ de ℤ dans ℤ est bijective (restreinte à ℕ elle s'identifie à S et n'est plus bijective). Par suite un diagramme de HASSE relatif à ℤ demande une droite comme support, les points représentatifs étant régulièrement répartis, indéfiniment dans les deux sens opposés (fig. B).

Règles de calcul dans ℤ

L'*opposé* de $b \in \mathbb{Z}$, noté opp b intervient dans l'équation en x dans ℤ : $x + b = a$. On a effet $x = a + \text{opp } b$. Il est d'usage d'écrire $x = a - b$ (soustraction). Si $a = 0$, $0 - b = \text{opp } b$ et comme 0 est neutre, on adopte finalement $-b = \text{opp } b$ $(-(-b) = b)$.

Si deux nombres non nuls sont opposés l'un de l'autre, l'un est dans ℕ\{0}, l'autre dans ℤ \ ℕ. On appelle *valeur absolue* de $b \neq 0$ celui des deux nombres $(b, -b)$ qui est dans ℕ\{0}. On le note $|b|$. Si $b > 0$ $(\Leftrightarrow b \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$, on a donc $b = |b| = 0 + |b| = +|b|$ pour faire le pendant de $b = -|b|$ pour $b < 0$. Conventionnellement $|0| = 0$.

On dit que le signe d'un nombre b non nul est +, resp. −, selon que b est > 0, resp. < 0. On justifie alors facilement la règle des signes pour un produit de deux entiers relatifs a et b non nuls : $a \cdot b = |a| \cdot |b|$ si a et b ont le même signe, $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$ dans le cas contraire (il suffit de revenir aux écritures $[\![(n, 0)]\!]$ et $[\![(0, n)]\!]$).

Le tableau C illustre ce dernier paragraphe.

Deux couples d'entiers, éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, sont équivalents ssi leurs points représentatifs sont alignés avec l'origine. Les classes d'équivalence sont donc définies par des droites d passant par 0, sécantes à la parallèle Δ à l'axe des abscisses d'ordonnée 1. Toute droite d rencontre Δ en un point unique, dont la projection sur l'axe des abscisses représente le nombre rationnel associé.

A

Nombres rationnels définis par des alignements et représentation de $\mathbb{Q}$

Addition	$\llbracket(a, b)\rrbracket + \llbracket(c, d)\rrbracket = \llbracket(ad + bc, bd)\rrbracket,\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$
Multiplication	$\llbracket(a, b)\rrbracket \cdot \llbracket(c, d)\rrbracket = \llbracket(ac, bd)\rrbracket,\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$
Soustraction	On soustrait un nombre rationnel en ajoutant son opposé. L'opposé de $\llbracket(a, b)\rrbracket = \frac{a}{b}$ est $-\llbracket(a, b)\rrbracket = \llbracket(-a, b)\rrbracket = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$.
Division	On divise par un rationnel non nul en multipliant par son inverse. L'inverse de $\llbracket(a, b)\rrbracket = \frac{a}{b}$ tel que $a \neq 0$ est $\llbracket(a, b)\rrbracket^{-1} = \llbracket(b, a)\rrbracket = \frac{b}{a}$.

On ne change pas la classe $\llbracket(a, b)\rrbracket$ si l'on multiplie, ou si l'on divise lorsque c'est possible, les deux nombres a et b par un même entier relatif non nul.

$$\llbracket(a, b)\rrbracket = \llbracket(ac, bc)\rrbracket,\ \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc},\ c \neq 0. \quad \llbracket(a, b)\rrbracket = \llbracket(a : d, b : d)\rrbracket,\ \frac{a}{b} = \frac{a : d}{b : d},\quad d \neq 0.$$

$\frac{a}{b}$ est la représentation normale d'un nombre rationnel si $b > 0$ et si a et b sont premiers entre eux (p. 118).

B

Règles de calcul dans $\mathbb{Q}$. Changement de numérateur (a) et de dénominateur (b). Représentation normale.

Ce qui suit entre dans le cadre général de la représentation décimale (p. 63). Si pour $n \in \mathbb{N}^*$ 10^n est représenté par 1 suivi de n zéros, $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ est représenté par 1 précédé de n zéros, le zéro le plus à gauche étant suivi d'une virgule ($10^0 = 1$).

On en déduit une écriture décimale de $\frac{c}{10^n} = c \times \frac{1}{10^n}$, pour $c \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{47}{10} = 4{,}7 \qquad \frac{35}{100} = 0{,}35 \qquad \frac{6}{1\,000} = 0{,}006 = 0{,}0060 \qquad \frac{80}{10} = 8 = 8{,}00 \ldots$$

Le nombre rationnel $\frac{a}{b}$, $a > 0$, $b > 0$, mis sous forme normale, sera du type précédent ssi les diviseurs premiers de b sont 2 ou 5, puisque $10^n = 2^n \times 5^n$:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^2 5^2} = \frac{75}{10^2} = 0{,}75 \qquad \frac{13}{80} = \frac{13}{2^4 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{1625}{10^4} = 0{,}1625$$

C

Introduction aux nombres décimaux

La division dans $\mathbb{Z}$ comme dans $\mathbb{N}$ n'est pas toujours possible. D'une part l'équation en x, $x \cdot 0 = a$, impossible pour $a \neq 0$, est indéterminée pour $a = 0$. D'autre part l'équation $x \cdot b = a$ n'a de solution, pour $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, que si l'on a $a \in b\,\mathbb{Z}$, ensemble des produits de b par les éléments de $\mathbb{Z}$. S'il en est ainsi, x est le *quotient* de a par b et on écrit $x = \frac{a}{b}$ (a est le *dividende*, b le *diviseur*).

Pour étendre la divisibilité par tout diviseur non nul, il faut plonger $\mathbb{Z}$ dans un sur-anneau commutatif unitaire intègre pour lequel la division par un élément non nul est toujours possible. Un tel anneau est un corps commutatif. En remarquant que l'on a toujours $x \cdot 0 = 0$, que x soit élément d'un anneau ou d'un corps, la division par 0 ne peut conduire à aucune recherche de construction algébrique. Tout diviseur doit être supposé $\neq 0$.

Construction de $\mathbb{Q}$

On remarque que si dans $\mathbb{Z}$ on a $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, alors $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. On définit la relation $\mathcal{R}'$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par $(a_1, b_1)\ \mathcal{R}'\ (a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. Il s'agit d'une relation d'équivalence. L'ensemble des classes d'équivalence $\llbracket(a, b)\rrbracket$, que l'on va munir d'une structure de corps commutatif, est désigné par $\mathbb{Q}$ (*cf.* ill. A). On pose dans la suite $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{\llbracket(0, 1)\rrbracket\}$.

Structure algébrique de $\mathbb{Q}$

On définit dans $\mathbb{Q}$ l'addition par $\llbracket(a, b)\rrbracket + \llbracket(c, d)\rrbracket := \llbracket(ad + bc, bd)\rrbracket$ et la multiplication par $\llbracket(a, b)\rrbracket \cdot \llbracket(c, d)\rrbracket := \llbracket(ac, bd)\rrbracket$. Ces définitions sont *licites* car les seconds membres ne dépendent pas des représentants choisis des classes figurant aux premiers membres. L'usage veut que l'on représente la classe $\llbracket(a, b)\rrbracket$ par $\frac{a}{b}$. On retrouve sous cette forme des règles de calcul connues (paragraphe suivant et tab. B).

On démontre facilement que $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe additif commutatif d'élément neutre $\llbracket(0, 1)\rrbracket$. L'opposé de $\llbracket(a, b)\rrbracket$ est $\llbracket(-a, b)\rrbracket$. Par ailleurs, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ est un groupe multiplicatif commutatif d'élément neutre $\llbracket(1, 1)\rrbracket$. L'*inverse* pour la multiplication d'un élément $\frac{a}{b}$ non nul est $\frac{b}{a}$ (a et b sont $\neq 0$). On vérifie que la multiplication est distributive par rapport à l'addition. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps commutatif. C'est la structure demandée.

$\mathbb{Q}$ plus petit corps contenant $\mathbb{Z}$

On définit une injection i de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ respectant les structures de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ par $i(a) = \llbracket(a, 1)\rrbracket$. La vérification est facile. Comme $i(1)$ est élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{Q}$, $i(\mathbb{Z})$ est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{Q}$ isomorphe à $\mathbb{Z}$. On peut donc identifier $\llbracket(a, 1)\rrbracket$ à l'entier relatif a, soit $\frac{a}{1} = a$. L'équation $x \cdot b = a$ où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ est toujours possible dans $\mathbb{Q}$. Elle est équivalente à $x \cdot \frac{b}{1} = \frac{a}{1}$, soit

$$x = \frac{a}{1}\left(\frac{b}{1}\right)^{-1} = \llbracket a, 1\rrbracket \cdot \llbracket b, 1\rrbracket^{-1} = \llbracket a, 1\rrbracket \cdot \llbracket 1, b\rrbracket = \llbracket(a, b)\rrbracket$$

$= \frac{a}{b}$: la division de $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{Z}^*$ donne un élément de $\mathbb{Q}\left(a : b = \frac{a}{b}\right)$.

La situation de $\mathbb{Q}$ vis-à-vis de $\mathbb{Z}$ est comparable à celle de $\mathbb{Z}$ vis-à-vis de $\mathbb{N}$: l'universalité de l'application i fait de $\mathbb{Q}$ le plus petit corps, à un isomorphisme près, contenant $\mathbb{Z}$. On peut signaler ici que, d'une manière générale, un anneau commutatif unitaire intègre peut être plongé, par un procédé analogue, dans un corps commutatif minimal (*corps des quotients*).

Le tableau C donne quelques indications sur les nombres décimaux, dont l'intérêt est lié à la numération décimale.

Structure d'ordre sur $\mathbb{Q}$

Comme $\llbracket(a, b)\rrbracket = \llbracket(-a, -b)\rrbracket$, on peut toujours définir un nombre rationnel par $\llbracket(a, b)\rrbracket$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. De $\llbracket(a_1, b_1)\rrbracket = \llbracket(a_2, b_2)\rrbracket$ avec b_1 et $b_2 > 0$, on déduit que a_1 et a_2 sont soit simultanément nuls, soit simultanément dans $\mathbb{Z}_+^*$, resp. $\mathbb{Z}_-^*$. On peut donc donner la définition suivante :

Déf. 1 : Un nombre rationnel $\llbracket(a, b)\rrbracket$ avec $b > 0$ est dit positif, resp. négatif, au sens strict, si $a > 0$, resp. $a < 0$. En désignant par $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des rationnels ≥ 0 (positifs au sens large), resp. $\mathbb{Q}_-$ l'ensemble des rationnels ≤ 0 (négatifs au sens large), on pose :

Déf. 2 : $p \leq q :\Leftrightarrow q - p \in \mathbb{Q}_+ \ (\Leftrightarrow p - q \in \mathbb{Q}_-)$.

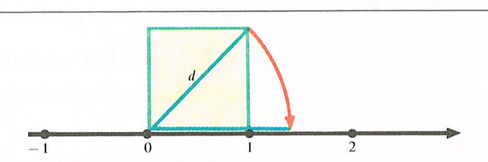
Cette relation est une relation d'ordre total, prolongeant celle de $\mathbb{Z}$, compatible d'une part avec l'addition, d'autre part avec la multiplication par un rationnel > 0.

La représentation des rationnels sur une droite indéfinie (ill. A) met bien en évidence les positions respectives des rationnels > 0, resp. < 0 (ensembles $\mathbb{Q}_+^*$ et $\mathbb{Q}_-^*$). Entre deux rationnels p et q distincts, on peut toujours trouver un autre nombre rationnel, par exemple $(p + q) : 2$. On en déduit que $\{r \mid r \in \mathbb{Q} \wedge p < r < q\}$ est infini. Enfin $(\mathbb{Q}, \leq)$ est *archimédien* : quels que soient p et q strictement positifs, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $np > q$.

Structure topologique de $\mathbb{Q}$

À l'aide de la valeur absolue $|p| = p$ si $p \geq 0$, $|p| = -p$ si $p < 0$, on peut définir une *métrique* sur $\mathbb{Q}$ (p. 51), et par suite une *structure topologique*. L'application $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+$ définie par $d(p, q) = |p - q|$ a les propriétés d'une distance. La structure topologique de l'espace métrique $\mathbb{Q}$ est essentiellement construite à l'aide des ouverts fondamentaux, les intervalles ouverts $]a, b[$ ainsi définis :

$$]a, b[:= \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge a < x < b\}.$$



Prop. : Il n'existe pas de nombre rationnel d tel que $d^2 = 2$.

Dém. (par l'absurde) : on suppose que $\frac{a}{b}$ est la représentation normale d'un rationnel d tel que $d^2 = 2$.

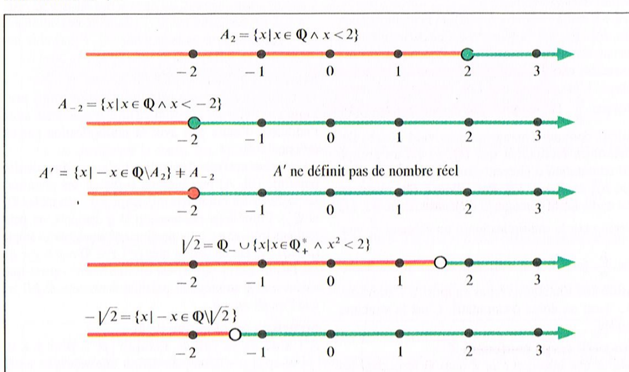
De $d^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$ on tire $a^2 = 2b^2$: a est nécessairement pair car le carré du nombre impair $2n + 1$ est le nombre impair $4n\,(n + 1) + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$). Mais si $a = 2n$, on a $b^2 = 2n^2$, donc b est également pair. Les entiers a et b ne sont pas premiers entre eux, en contradiction avec l'hypothèse $\frac{a}{b}$: rep. normale.

Prop. : Le nombre irrationnel $d = \mathbb{Q}_- \cup \{x \mid x \in \mathbb{Q}^*_+ \wedge x^2 < 2\}$ vérifie $d^2 = 2$.

Démonstration : D'après la déf. 6 on a : $d^2 = \mathbb{Q}_- \cup \{x\,y \mid x \in \mathbb{Q}^*_+ \wedge x^2 < 2 \wedge y \in \mathbb{Q}^*_+ \wedge y^2 < 2\}$, d'où pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$ $(x\,y)^2 = x^2 y^2 < 4$ et $x\,y < 2$. Réciproquement tout rationnel $z \in \,]0, 2[$ peut s'écrire $z = x\,y$ avec $x \in \mathbb{Q}^*_+ \wedge x^2 < 2 \wedge y \in \mathbb{Q}^*_+ \wedge y^2 < 2$ (1). D'où $d^2 = \{z \mid z \in \mathbb{Q} \wedge z < 2\} = A_2 = 2$.
(1) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, a_n \in \mathbb{N} \,/\, (a_n\, 10^{-n})^2 \leq z < ((1 + a_n)\, 10^{-n})^2$. Pour n assez grand on peut prendre $x = (1 + a_n)\, 10^{-n}$ et $y = \frac{z}{x}$.

A

Irrationnalité de $\sqrt{2}$



Le complémentaire $\mathbb{Q} \setminus r$ d'un réel r possède un plus petit élément si r est rationnel ; il n'en possède pas si r est irrationnel.
L'ensemble $\{x \mid -x \in \mathbb{Q} \setminus r\}$ n'est donc une coupure ouverte dans $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire un réel, que si r est irrationnel. L'opposé d'un rationnel ne peut donc pas être défini de la même façon que celui d'un irrationnel (p. 59).

B

Opposé d'un rationnel, resp. d'un irrationnel

En dehors de la division par 0, qui n'a d'ailleurs pas de sens, on peut effectuer les quatre opérations fondamentales dans $\mathbb{Q}$ sans restriction. Une structure algébrique incomplète ne peut donc être un motif de nouvelles extensions. En revanche la structure d'ordre et la structure topologique présentent des insuffisances notables qui conduisent à l'extension de $\mathbb{Q}$ au corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Faiblesse de la structure d'ordre de $\mathbb{Q}$

$(\mathbb{Q}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné (déf. 3, p. 43), mais bien que les nombres rationnels définissent un ensemble dense sur la droite, ils ne permettent pas de la remplir complètement. On considère par ex. la « longueur » d de la diagonale d'un carré unitaire : $d^2 = 1 + 1 = 2$ (théorème de PYTHAGORE). À l'aide d'un compas, on peut placer le point correspondant à d sur la droite (ill. A). On obtient un point dont l'abscisse n'existe pas dans $\mathbb{Q}$. On peut toutefois proposer des suites de nombres rationnels « approchant d », comme par ex. : 1 ; 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; 1,4142... suite (x_n) de nombres décimaux tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n^2 < 2 < (x_n + 10^{-n})^2$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'image de d a une abscisse située entre x_n et $x_n + 10^{-n}$. Plus généralement l'ensemble $T = \{x \,/\, x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (p. 44, ill. D et p. 45, déf. 7).
Pour pouvoir formuler la propriété structurelle supplémentaire concernant un nouveau problème d'extension, on donne les définitions suivantes relatives à un ensemble totalement ordonné $(M, \leq)$.

Déf. 1 : Une *section commençante*, définie par $p \in M$, est l'ensemble $A_p := \{x \mid x \in M \wedge x < p\}$.

Déf. 2 : Une partie $B \subset M$ est une *coupure* si B est non vide majorée, et si $\forall\, x \in B$, $A_x \subset B$. Une coupure qui n'a pas de plus grand élément (p. 43, déf. 4) est dite *ouverte*.

Toute section commençante de $(\mathbb{Q}, \leq)$ est une coupure ouverte. La réciproque est fausse. Par ex. $\mathbb{Q}_- \cup \{x \,/\, x \in \mathbb{Q}^*_+ \wedge x^2 < 2\}$ est une coupure ouverte mais n'est pas une section commençante. Pour combler cette lacune on fait une extension de $(\mathbb{Q}, \leq)$ en $(\mathbb{R}, \leq)$ où $\mathbb{R}$ est, comme $\mathbb{Q}$, un corps commutatif totalement ordonné, de telle sorte qu'il y ait identité entre section commençante dans $\mathbb{R}$ et coupure ouverte dans $\mathbb{R}$ (propriété P).

Construction de $\mathbb{R}$

Déf. 3 : L'ensemble des coupures ouvertes dans $\mathbb{Q}$ est désigné par $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{R}$, c.-à-d. les coupures ouvertes dans $\mathbb{Q}$, sont les *nombres réels*. Les nombres réels sont donc définis comme des sous-ensembles particuliers de nombres rationnels. Dans la suite on les notera r, s, t...
On utilise alors une propriété générale des ensembles totalement ordonnés, facile à justifier : si $(M, \leq)$ est totalement ordonné, l'ensemble des coupures dans M est totalement ordonné par la relation $\subseteq$, et donc également l'ensemble des coupures ouvertes. D'où :

Th. 1 : $(\mathbb{R}, \subseteq)$ *est totalement ordonné.*

On peut alors prouver, au sens de $\subseteq$, que toute section commençante dans $\mathbb{R}$ est une coupure ouverte dans $\mathbb{R}$ (facile) et que réciproquement toute coupure ouverte dans $\mathbb{R}$ est une section commençante dans $\mathbb{R}$ (plus délicat). Pour cette réciproque on étudie la réunion T dans $\mathbb{Q}$ de tous les réels (sous-ensembles de $\mathbb{Q}$) qui composent une coupure ouverte C dans $(\mathbb{R}, \subseteq)$. On prouve que T est une coupure ouverte dans $\mathbb{Q}$, donc un réel t et que C s'identifie à la section commençante dans $\mathbb{R}$ définie par t. En substituant la notation $\leq$ à $\subseteq$ dans $\mathbb{R}$, plus commode pour le langage numérique ultérieur, on peut énoncer :

Th. 2 : *Dans* $(\mathbb{R}, \leq)$ *il y a identité entre section commençante et coupure ouverte (propriété P).* Une conséquence importante est le théorème dit de la borne supérieure.

Th. 3 : *Dans* $(\mathbb{R}, \leq)$ *toute partie majorée admet une borne supérieure.*

Rem. : La notion de coupure est due à DEDEKIND, qui introduit les réels à l'aide des coupures B dans $\mathbb{Q}$ et de leurs parties complémentaires $\mathbb{Q} \setminus B$.

Plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On peut plonger $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ par l'application injective $\mathbb{Q} \to \mathbb{R} : p \mapsto i\,(p) = A_p$. Comme $p \leq q$ entraîne $A_p \subseteq A_q$, l'application i est isotone (p. 47). Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont les nombres irrationnels (par ex. d, *cf.* supra).
Il convient de montrer toutefois qu'à toute application injective isotone f de $\mathbb{Q}$ dans un ensemble M totalement ordonné satisfaisant à la propriété P, on peut associer au moins une application injective isotone g de $\mathbb{R}$ dans M telle que $f = g \circ i$ (p. 54 A). L'application g doit opérer sur $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. On définit la restriction de g à $\mathbb{Q}$ simplement par $g\,(p) = f\,(i^{-1}(p))$. Soit maintenant un irrationnel r, c.-à-d. une coupure ouverte dans $\mathbb{Q}$, qui n'est pas une section commençante dans $\mathbb{Q}$: si p parcourt r, $f\,(p)$ croît avec p et la réunion dans M des sous-ensembles $F_p = \{x \in M, x \leq f\,(p)\}$ est une coupure ouverte dans M, donc la section commençante d'un certain élément r' de M. On prouve que $r' \notin f\,(\mathbb{Q})$ et l'on pose $g\,(r) = r'$; g est donc définie sur $\mathbb{R}$, et l'on a facilement $f = g \circ i$. On vérifie pour terminer que g est injective croissante de $(\mathbb{R}, \leq)$ dans $(M, \leq)$. L'unicité de g n'est pas assurée (elle n'est pas exigée).

Structure algébrique de $\mathbb{R}$

La construction de $\mathbb{R}$ a été faite sans que les propriétés algébriques de $\mathbb{Q}$ interviennent. On peut introduire une structure algébrique sur $\mathbb{R}$, prolongement de celle de $\mathbb{Q}$.

Déf. 4 : On pose :
$$\forall\,(r, s) \in \mathbb{R}^2,\ r + s := \{x + y \mid x \in r \wedge y \in s\}.$$
$r + s$ est une coupure ouverte dans $\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ est un groupe abélien pour l'addition, d'élément neutre 0 associé à la section commençante $\mathbb{Q}^*_-$. Si $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, les rationnels opposés à ceux de $\mathbb{Q} \setminus r$ définissent la coupure ouverte $-r$ opposée à la coupure ouverte r. Si $r \in \mathbb{Q}$, r et son opposé sont définis resp. par les sections commençantes A_r et A_{-r}. On peut écrire $\mathbb{R} = \mathbb{R}^*_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^*_-$, deux éléments $\neq 0$ opposés étant l'un > 0, l'autre < 0.

Déf. 5 : On pose $\forall r \in \mathbb{R}$, $|r| := \sup\,(r, -r)$. L'appl. de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+ : (r, s) \to d\,(r, s) := |r - s|$ est une distance.

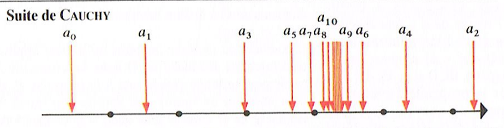
Déf. 6 : Si r ou s est nul, on pose $rs := 0$; si r et s sont > 0, on pose
$$rs := \mathbb{Q}^- \cup \{xy \,/\, x \in r \setminus \mathbb{Q}^- \wedge y \in s \setminus \mathbb{Q}^-\}.$$
Plus généralement si r et s sont de même signe, $rs := |r|\,|s|$ et s'ils sont de signes opposés $rs := -|r|\,|s|$.
On montre que $\mathbb{R}$, muni de ces deux opérations internes, est un corps commutatif, admettant $1 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ comme élément neutre de la multiplication. $\mathbb{Q}$ apparaît comme un sous-corps de $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné archimédien. La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ prolonge celle de $\mathbb{Q}$.

Suite convergente

Dans cet exemple $n_0(\varepsilon) = 9$: les valeurs absolues de $a - a_9$, $a - a_{10}$, $a - a_{11}$, $a - a_{12}$, ... sont $< \varepsilon$.
Pour justifier la convergence de (a_n) vers a, il faut prouver qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut associer un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que l'on ait $|a - a_n| < \varepsilon$ pour tout $n > n_0(\varepsilon)$.

A₁

Suite de Cauchy



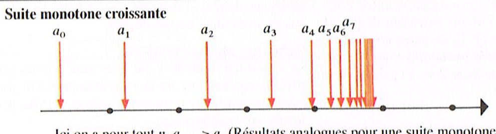
Si une suite (a_n) converge vers a, la distance $|a - a_n|$ tend vers 0 quand $n \to \infty$; il en est de même de la distance mutuelle $|a_n - a_m|$ quand $(n, m) \to (\infty, \infty)$. Ainsi dans l'ex. proposé, pour n et $m \geq n_1(\varepsilon) = 6$, les valeurs absolues des différences

$$\begin{aligned} a_6 - a_7,\ a_6 - a_8,\ a_6 - a_9,\ a_6 - a_{10},\ \ldots \\ a_7 - a_8,\ a_7 - a_9,\ a_7 - a_{10},\ \ldots \\ a_8 - a_9,\ a_8 - a_{10},\ \ldots \\ a_9 - a_{10},\ \ldots \end{aligned}$$

sont strictement inférieures à ε.
On a affaire à une suite de Cauchy, si à tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut associer un entier $n_1(\varepsilon)$ tel que l'on ait $|a_n - a_m| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_1(\varepsilon)$ et tout $m \geq n_1(\varepsilon)$. Une suite qui possède cette propriété n'est pas nécessairement convergente.

A₂

Suite monotone croissante



Ici on a pour tout n, $a_{n+1} \geq a_n$ (Résultats analogues pour une suite monotone décroissante).
Th. : Toute suite monotone bornée est une suite de Cauchy.

A₃

Suites dans $\mathbb{Q}$

$(M, \mathfrak{M}, \top)$ est un groupe topologique ssi $(M, \mathfrak{M})$ est un espace topologique, $(M, \top)$ un groupe, la condition suivante étant satisfaite :
l'appl. $f : M \times M \to M$ déf. par $(x, y) \to x \top y^{-1}$
est continue (au sens de la topologie produit p. 221).

Ex. : Les groupes $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ deviennent des groupes topologiques si $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont munis de leur topologie naturelle (p. 215).

B

Groupe topologique

Faiblesse de la structure topologique de $\mathbb{Q}$

C'est une démarche toute différente, due à Cantor, qui apparaît dans une autre approche de $\mathbb{R}$, lorsqu'on veut remédier à la non-complétude de l'espace métrique $\mathbb{Q}$. Ici, $\mathbb{R}$ étant supposé connu, on aboutit à un corps isomorphe à $\mathbb{R}$. Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est, par l'introduction de la métrique de la p. 57, un groupe topologique (tab. B), dans lequel peuvent donc se poser des problèmes de convergence.

Une suite $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ d'éléments d'un espace métrique M (*cf.* p. 51) converge vers $a \in M$ lorsque n tend vers $+\infty$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\forall n \geq n_0, d(a_n, a) < \varepsilon$; on écrit $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ (ill. A₁). Dans $\mathbb{Q}$, on écrit de façon précise $\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \left(\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \Rightarrow \exists n_0\ \forall n\ (n \geq n_0 \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon)\right)$. Deux types de suites vont souvent apparaître ici :

Déf. 1 : Une suite (a_n) est dite *équivalente à* 0 si elle converge vers 0.

Déf. 2 : Une suite (a_n) est dite *suite fondamentale*, ou *suite de Cauchy*, si à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que l'on ait $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ dès que $n \geq n_1$ et $m \geq n_1$ (ill. A₂).

Rem. : D'une manière générale la convergence dans un groupe additif topologique d'une suite (a_n) vers a s'exprime de la façon suivante : pour tout voisinage $v(0)$ de l'élément neutre, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\forall n \geq n_0$, $a_n - a \in v(0)$. Pour une suite de Cauchy, on écrit $\forall\, v(0), \exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geq n_1,\ \forall\, m \geq n_1,\ a_n - a_m \in v(0).$$

Th. : *Toute suite convergente dans un espace métrique est une suite de Cauchy*.

La réciproque est malheureusement inexacte. Une suite peut être de Cauchy sans pour autant converger. Par ex. la suite des valeurs décimales approchées par défaut de $\sqrt{2}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, non convergente dans $\mathbb{Q}$. On dit qu'un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy est convergente est un *espace métrique complet*. $\mathbb{Q}$ n'en est pas un. On est donc amené à étudier une extension de $\mathbb{Q}$ en un espace complet. De façon précise il s'agit de construire *l'espace complété* de $\mathbb{Q}$.

Construction de l'espace complété de $\mathbb{Q}$

Dans $\mathbb{Q}$ l'ensemble des suites de Cauchy est un groupe additif C dont l'élément neutre est la suite nulle. L'ensemble des suites équivalentes à 0 est un sous-groupe Z de C (si (a_n) et (b_n) sont dans C, il en est de même de $(C_n) = (a_n - b_n) = (a_n) - (b_n)$, d'où les résultats). On peut dans ces conditions poser :

Déf. 3 : Soit $((a_n),(b_n)) \in C^2$. On convient :

$$(a_n)\, \mathfrak{R}\, (b_n) \Leftrightarrow (a_n - b_n) \in Z.$$

$\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence (p. 31).

$\mathfrak{R}$ est permise pour l'addition : si $(a_n)\, \mathfrak{R}\, (b_n)$ et $(c_n)\, \mathfrak{R}\, (d_n)$, alors $(a_n + c_n)\, \mathfrak{R}\, (b_n + d_n)$. Cette propriété confère à l'ensemble quotient $C / \mathfrak{R}$ une structure de groupe additif : on peut définir la somme de deux classes $[\![(a_n)]\!]$ et $[\![(c_n)]\!]$ par $[\![(a_n)]\!] + [\![(c_n)]\!] := [\![(a_n + c_n)]\!]$ puisque le second membre est indépendant des représentants choisis pour définir les classes figurant au premier membre. Les suites équivalentes à 0 constituent la classe nulle, et la classe opposée de $[\![(a_n)]\!]$ est :
$-[\![(a_n)]\!] = [\![(-a_n)]\!]$. Ce groupe additif est le groupe quotient C / Z (pp. 37, 75).

Si une classe dans $C / \mathfrak{R}$ n'est pas la classe nulle, on peut montrer qu'elle admet pour représentant une suite rationnelle (a'_n) dont tous les termes sont non nuls et de même signe s. De plus pour tout représentant (a_n) de cette classe $a_n \cdot a_n'^{-1} \to 1$ lorsque n tend vers $+\infty$. En particulier a_n finit par garder le signe s lorsque $n \to +\infty$.

Déf. 4 : On convient de représenter par 0 la classe nulle. Si $[\![(a_n)]\!]$ est $\neq 0$, on dit que $[\![(a_n)]\!]$ est > 0 si s est le signe +, et que $[\![(a_n)]\!]$ est < 0 si s est le signe –. Plus généralement on pose $[\![(a_n)]\!] > [\![(b_n)]\!]$ si $[\![(a_n - b_n)]\!] > 0$ et $[\![(a_n)]\!] < [\![(b_n)]\!]$ si $[\![(a_n - b_n)]\!] < 0$.

On prouve facilement que la relation $\leq$ est une relation d'ordre total dans $C / \mathfrak{R}$, compatible avec l'addition du groupe C / Z.

En posant $|[\![a_n]\!]| := \begin{cases} [\![(a_n)]\!] \\ -[\![(a_n)]\!] \end{cases}$ pour $\begin{matrix} [\![(a_n)]\!] \geq 0 \\ [\![(a_n)]\!] < 0 \end{matrix}$, on définit une valeur absolue dans le groupe additif totalement ordonné $(C / Z, \leq)$ noté dans la suite $\overline{\mathbb{Q}}$. Le paragraphe suivant montre que $\overline{\mathbb{Q}}$ est le complété de $\mathbb{Q}$.

Structure de $\overline{\mathbb{Q}}$

Si (a_n) et (b_n) sont deux suites rationnelles de Cauchy, il en est de même de la suite $(c_n) = (a_n b_n)$. De plus on peut poser $[\![(a_n)]\!] \cdot [\![(b_n)]\!] = [\![(c_n)]\!]$, le résultat étant, ici aussi, indépendant des représentants choisis (*cf.* addition). La classe $[\![(e_n)]\!]$ où $\forall n$, $e_n = 1$, est l'élément neutre de cette multiplication commutative. Si $[\![(a_n)]\!]$ est non nulle, $[\![(a_n)]\!] = [\![(a'_n)]\!]$ (*cf.* supra). La suite $\left(\frac{1}{a'_n}\right)$ est de Cauchy. Elle définit la classe inverse de $[\![(a_n)]\!]$.
$\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps commutatif totalement ordonné par $\leq$, relation compatible avec la structure de $\overline{\mathbb{Q}}$. L'appl. i de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$, $p \mapsto i(p) := [\![(p_n)]\!]$ où $\forall n\ p_n = p$ est un homomorphisme injectif du corps commutatif totalement ordonné $(\mathbb{Q}, \leq)$ dans le corps commutatif totalement ordonné $(\overline{\mathbb{Q}}, \leq)$. L'application δ de $\overline{\mathbb{Q}} \times \overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_+$ définie par $(\alpha, \beta) \to \delta(\alpha, \beta) := |\alpha - \beta|$ a les prop. d'une distance à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_+$. Elle permet de définir la topologie des ε-voisinages sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (p. 51) avec $\varepsilon \in \overline{\mathbb{Q}}_+^*$. On peut d'ailleurs ici prendre $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ ($\mathbb{Q}_+^* \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_+^*$) sans restriction. Pour cette topologie, toute suite de Cauchy dans $\overline{\mathbb{Q}}$ est convergente dans $\overline{\mathbb{Q}}$. $\overline{\mathbb{Q}}$ est complet pour δ. De plus toute suite de Cauchy (a_n) dans $\mathbb{Q}$ converge vers $\alpha = [\![(a_n)]\!]$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$:

$$\forall\, \varepsilon\, (\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \Rightarrow \exists\, n_0\, (n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha - a_n| < \varepsilon)).$$

Partant de là, l'étude de la propriété d'universalité de l'injection i montre que $\overline{\mathbb{Q}}$ est, à un isomorphisme près, le plus petit espace complet contenant $\mathbb{Q}$.

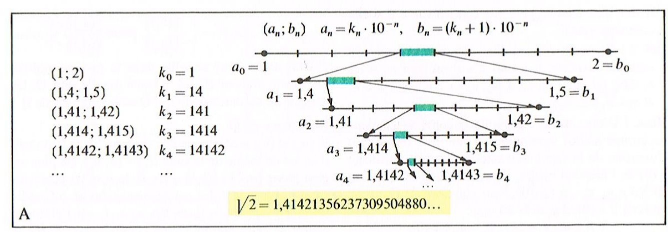
Isomorphie de $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{R}$

Dans $(\mathbb{R}, \leq)$ toute partie majorée admet une borne sup. En particulier tout réel r est la borne sup. de l'ensemble C des rationnels qui lui sont strictement inférieurs (C est la coupure ouverte définissant r). La distance $d(r, s) = |r - s|$ fait de $(\mathbb{R}, d)$ un espace métrique.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \exists!\ p_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$c_n = \frac{-1 + p_n}{n} < \frac{p_n}{n} \leq r < \frac{1 + p_n}{n} \quad \text{(prop. archim.)}$$

Le rationnel c_n appartient à la coupure ouverte C et $|r - c_n| < \frac{2}{n}$: donc $c_n \to r$ dans $(\mathbb{R}, d)$. Comme $|c_n - c_m| < \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$, on en déduit que (c_n) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. C s'identifie à l'ensemble des rationnels que l'on peut majorer par un c_n. L'appl. $r \mapsto [\![(c_n)]\!]$ est donc injective de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$. En fait c'est un isomorphisme du corps tot. ord. $(\mathbb{R}, \leq)$ sur le corps totalement ordonné $(\overline{\mathbb{Q}}, \leq)$ avec correspondance des distances d et δ.

On peut terminer en signalant que $\mathbb{R}$ est, à un ismorphisme près de corps totalement ordonnés, le seul corps commutatif totalement ordonné archimédien, complet.



Exemple de segments emboîtés pour définir $\sqrt{2}$

Toutes les lettres utilisées désignent des entiers ≥ 0. On obtient le dév. décimal de $\frac{p}{q}$ (p et $q > 0$) par le procédé de la division avec reste. Si celui-ci finit par être nul, c'est que $\frac{p}{q}$ est un nombre décimal, dont le dév. se stabilise à 0. Sinon la division peut être poursuivie indéfiniment. Mais comme les chiffres du reste forment un entier $< q$, on retrouve, au plus au bout de q divisions, une suite de chiffres dans le reste déjà rencontrée. Le dév. décimal devient alors périodique. Dans la suite p et q sont premiers entre eux.

Ex. : $\frac{p}{q} = \frac{23}{198} = 0{,}116161616\ldots = 0{,}1\overline{16}\ldots$ (On surligne la première période rencontrée). Plus généralement

$\frac{p}{q} = a_0, a_1 \ldots a_k \overline{b_1\, b_2 \ldots b_l} \ldots$, avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et $\forall i\ 0 \leq a_i \leq 9$, $\forall j\ 0 \leq b_j \leq 9$, le développement décimal ne pouvant toutefois se stabiliser à 9. On peut donc écrire

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{10^k} + \frac{\overline{b_1 b_2 \ldots b_l}}{10^{k+l}}\left(1 + \frac{1}{10^l} + \frac{1}{10^{2l}} + \ldots\right) = \frac{a}{10^k} + \frac{\overline{b_1 b_2 \ldots b_l}}{10^k(10^l - 1)}$$

où $a \in \mathbb{N}$ et $P = \overline{b_1\, b_2 \ldots b_l} < 10^l - 1$ (série géométrique p. 280).

Comme q est de la forme $2^\alpha 5^\beta s$, où $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $s \geq 1$ et premier avec 10, on constate que $\frac{p}{2^\alpha 5^\beta s} = \frac{a'}{10^k(10^l - 1)}$. La fraction du premier membre étant irréductible, on en déduit que $k \geq h = \sup(\alpha, \beta)$ et que s divise $10^l - 1$ qui n'est évidemment multiple ni de 2 ni de 5.

On prouve donc incidemment que tout entier premier avec 10 divise au moins un nombre de la forme $10^t - 1$.

On établit alors que $k = h$ et que l se confond avec $m = \inf\{t \mid t \in \mathbb{N}^* \wedge s \mid (10^t - 1)\}$.

L'écriture $\frac{p}{q} = \frac{1}{10^h}\,\frac{p2^{h-\alpha}\,5^{h-\beta}}{s} = \frac{1}{10^h}\,\frac{p'}{s}$ montre que $\frac{p'}{s}$ est irréductible. En divisant p' par s, il vient $\frac{p'}{s} = c + \frac{d}{s}, d < s, \frac{d}{s}$ irréductible, soit $\frac{p'}{s} = c + \frac{n}{10^m - 1}$, en multipliant d et s par un même facteur convenable. On a encore $n < 10^m - 1$. Finalement :

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{10^h} + \frac{n}{10^h 10^m}\left(1 + \frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{2m}} + \ldots\right) = c_0, c_1 \ldots c_h \overline{n_1\, n_2 \ldots n_m} \ldots,$$ ce qui achève la démonstration.

Rem. : Les résultats se généralisent pour une base de numération b quelconque ($b > 1$). Les nombres dits b-adiques $\left(\pm \frac{p}{b^\delta}\right)$ jouent le rôle des nombres décimaux. On fait intervenir la décomposition de b en facteurs premiers pour aboutir à des conditions comparables concernant le développement b-adique.

B

Développements décimaux et b-adiques

On trouvera pp. 301, 307, 309 les compléments nécessaires sur les fonctions de la variable réelle :

$x \mapsto y = f_a(x) = x^a \Leftrightarrow x = f_{\frac{1}{a}}(y) = y^{\frac{1}{a}}$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et

$x \mapsto y = \exp_a(x) = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ ($a \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$).

Elles satisfont resp. aux relations suivantes :

$f_a \circ f_b = f_{ab}$, $\exp_a(x + x') = \exp_a(x)\exp_a(x')$,

$\log_a(yy') = \log_a y + \log_a y'$.

Segments emboîtés

La notion est due à WEIERSTRASS. Si a et b sont deux éléments d'un ensemble totalement ordonné $(E, \leq)$, ils sont comparables, par ex. $a \leq b$: le *segment* $[a, b]$ d'*extrémités* a et b est le sous-ens. des éléments x de E tels que $a \leq x \leq b$. Il est réduit à un singleton si $a = b$.

Une suite de segments $([a_n, b_n])$ de E est dite emboîtée si $\forall n \in \mathbb{N}\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. Par ex. les deux suites rationnelles,

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}, n \in \mathbb{N}^*,$$

définissent une suite $([a_n, b_n])$ de segments emboîtés dans $\mathbb{Q}$ comme dans $\mathbb{R}$. Pour toute suite de segments emboîtés, (a_n) est croissante au sens large, (b_n) est décroissante au sens large. Si E est un corps commutatif totalement ordonné $(b_n - a_n)$ est une suite positive décroissante au sens large.

On dit que $(E, \leq)$ vérifie l'*axiome des segments emboîtés* si pour toute suite de segments emboîtés $([a_n, b_n])$ l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ n'est pas vide. $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas cet axiome. En revanche $\mathbb{R}$ le vérifie.

Dans l'ex. préc., l'intersection dans $\mathbb{R}$ des segments $[a_n, b_n]$ est le singleton $\{e\}$: e est le nombre d'EULER qui est irrationnel ; dans $\mathbb{Q}$ cette intersection est vide.

D'une manière générale dans $\mathbb{R}$ si $([a_n, b_n])$ est une suite de segments emboîtés, (a_n) et (b_n) sont des suites convergentes : $a_n \to a$, $b_n \to b$, avec $a \leq b$. On a alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a, b]$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $a = b$ est que $b_n - a_n$ tende vers 0 : on dit alors que (a_n) et (b_n) sont adjacentes, de limite commune $a = b$. On peut concevoir une construction de $\mathbb{R}$ à partir des suites de segments emboîtés dans $\mathbb{Q}$ telles que $b_n - a_n \to 0$.

Représentation des nombres réels

On connaît le principe de la représentation décimale dans $\mathbb{N}$. Les nombres 0, 1, 2... 9 ont leurs symboles respectifs appelés chiffres. Tout élément de $\mathbb{N} > 9$ s'écrit de manière unique sous la forme $z_m 10^m + \ldots + z_1 10 + z_0$, où les z_ν sont des entiers naturels < 10, $m \in \mathbb{N}^*$, $z_m \neq 0$.

Ex. : $5436 = 5.10^3 + 4.10^2 + 3.10 + 6$.

L'écriture d'un élément de $\mathbb{Z}^*_-$ est celle de son opposé précédé du signe moins. La partie entière $E(r)$ d'un nombre réel r est le plus grand élément de $\mathbb{Z}$ qui soit $\leq r$: $E(\sqrt{2}) = 1$, $E(-\sqrt{2}) = -2$. Les nombres décimaux sont les réels de la forme $\frac{z}{10^s}$, $z \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$.

Ils constituent un anneau. L'écriture d'un nombre décimal d utilise la virgule : $\frac{5436}{10^2} = 54 + \frac{36}{10^2} = 54{,}36$; pour un nombre négatif : $-\frac{5436}{10^2} = -55 + \frac{74}{10^2} = \overline{55}{,}74$.

L'entier qui précède la virgule est $E(d)$; il est surmonté d'un trait s'il est négatif. La partie décimale est toujours positive ($-54{,}36$ a pour partie décimale 0,74). Pour ce qui va suivre, l'écriture 54,36 du nombre décimal $d = \frac{5436}{10^2}$ sera considérée comme la représentation réduite de l'écriture 54,360000... comportant une infinité de zéros, appelée développement décimal de d (remarque analogue pour tout autre nombre décimal). Quel que soit le réel r, on peut écrire :

$$a_n = \frac{p_n}{10^n} \leq r < a_n + 10^{-n} = b_n, p_n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes de limite commune r : (a_n) est la suite des valeurs approchées par défaut de r à 10^{-n} près.

Pour $n \geq 1$, si $a_n = E(r), \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$,

alors $a_{n+1} = E(r), \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n\, \alpha_{n+1}$. Les α_k sont les chiffres du *développement décimal* de r. Tout réel est parfaitement déterminé par son développement décimal. Toute écriture $z_0, \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$ où $z_0 \in \mathbb{Z}$, les β_n étant des chiffres, est l'écriture décimale d'un nombre réel, sous réserve que la suite (β_n) ne soit pas stationnaire à 9 à partir d'un certain rang.

En effet par ex. 54,359999... signifierait :

$\lim\ [54.35 + 9.10^{-3} + 9.10^{-4} + \ldots + 9.10^{-n}] = 54{,}36$

dont le développement décimal est 54,360000...

Le développement décimal d'un nombre rationnel finit par être périodique. Cette propriété caractérise les nombres rationnels. On obtient facilement le développement de $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$) par l'algorithme de la division des entiers. Si $r < 0$ on se ramène à $r - E(r)$.

Rem. : Les résultats précédents se généralisent pour toute numération en base $b \in \mathbb{N}^*$ (ex. classiques $b := 2, 12, 16$) (*cf.* tab. B).

Exposants rationnels et irrationnels

Si $r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, r^n est le produit de n facteurs égaux à n. Si $r \in \mathbb{R}^*$, $r^0 = 1$ et $r^n = \frac{1}{r^{-n}}$ pour n entier ≤ -1. Pour $(r, s) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ on a $(rs)^n = r^n s^n$, $r^n r^m = r^{n+m}$, $(r^n)^m = r^{nm}$.

Déf. : k étant un entier > 1, on appelle racine $k^{ième}$ du nombre réel $r \geq 0$ le nombre réel $s \geq 0$ tel que $s^k = r$.

s existe et est unique : l'unicité provient du fait que l'appl. $x \mapsto x^k$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est strict. croissante.

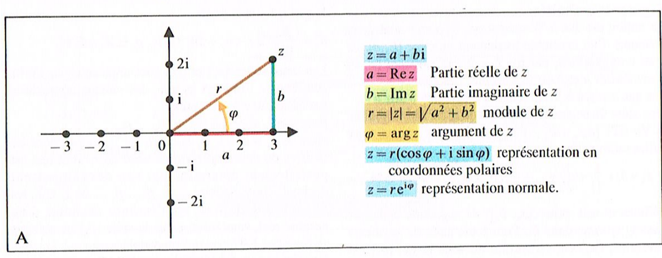
s est le nombre réel défini comme limite, lorsque $n \to \infty$, de la suite (a_n) telle que :

$$(a_n)^k = \left(\frac{p_n}{10^n}\right)^k \leq r < \left(\frac{1 + p_n}{10^n}\right)^k = (b_n)^k, \text{ où } p_n \in \mathbb{N}$$

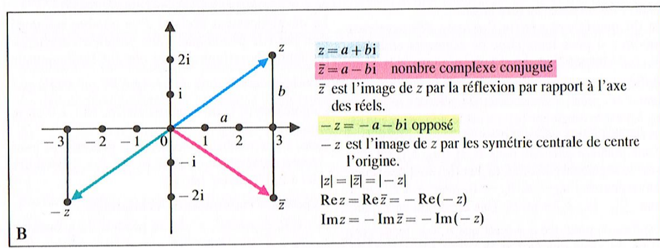
(les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes). On pose $s = \sqrt[k]{r}$ ou $s = r^{\frac{1}{k}}$. Pour m, n, p, q, dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$,

on a, pour $r \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[n]{r^m} = \sqrt[q]{r^p}$. Cette valeur commune est désignée par r^α où α est le rationnel > 0 défini par $\frac{p}{q}$. Si $\alpha < 0$, on pose, pour un réel $r > 0$, $r^\alpha = \frac{1}{r^{-\alpha}}$.

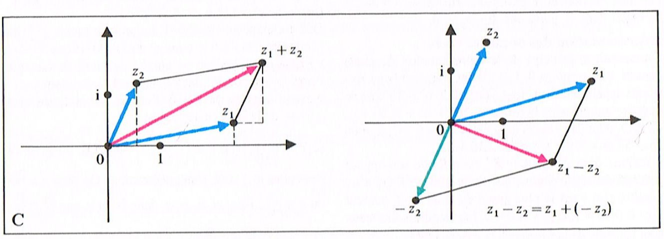
Pour $(r, s) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2$, on a $(rs)^\alpha = r^\alpha s^\alpha$, $r^\alpha r^\beta = r^{\alpha+\beta}$, $(r^\alpha)^\beta = r^{\alpha\beta}$. On définit maintenant r^s pour $r \in \mathbb{R}^*_+$ et $s \in \mathbb{R}$. On montre d'abord que si (x_n) est une suite rationnelle équivalente à 0 (p. 61), alors $r^{x_n} \to 1$ quand $n \to \infty$. Puis si (x_n) est une suite rationnelle de CAUCHY (p. 61), (r^{x_n}) est une suite réelle de CAUCHY. Tout réel s étant associé à une classe S de C/Z (p. 61), on en déduit que $\forall (x_n) \in S$, r^{x_n} converge vers une même limite dans $\mathbb{R}$. Celle-ci est par convention r^s, qui coïncide bien avec r^α si $s = \alpha \in \mathbb{Q}$. Les règles des exposants réels sont les mêmes que celles des exposants rationnels.



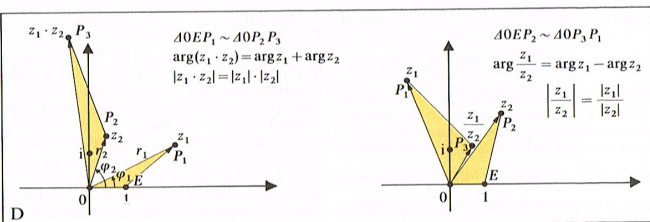
Plan complexe de GAUSS



Nombre complexe conjugué et opposé



Addition et soustraction des nombres complexes



Multiplication et division des nombres complexes

Construction du corps $\mathbb{C}$ des complexes

L'extension de la structure algébrique de $\mathbb{R}$ met en évidence une remarquable propriété de clôture algébrique (p. 101). Certaines expressions n'ont aucun sens dans $\mathbb{R}$. Par exemple le symbole $\sqrt{-1}$ ne peut être défini comme un nombre réel. Autrement dit, le polynôme $X^2 + 1$ de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[X]$ (p. 95) n'admet pas de racine réelle, il est irréductible.

En algèbre (p. 103), on montrera comment, à partir d'un polynôme irréductible de l'anneau des polynômes $R[X]$ sur un corps commutatif R quelconque, on peut construire un surcorps dans lequel le polynôme considéré admet une racine. En appliquant ce résultat au cas particulier présent, on peut former l'anneau quotient de $\mathbb{R}[X]$ par la relation d'équivalence « modulo $X^2 + 1$ ». Pour cela, on commence par définir l'équivalence de deux polynômes $f(X)$ et $g(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ par :

Déf. 1 : $f(X) \mathcal{R} g(X) :\Leftrightarrow \exists\, h(X),\ h(X) \in \mathbb{R}[X] \wedge f(X) - g(X) = h(X)(X^2 + 1)$.

Déf. 2 : $\mathbb{C} := \mathbb{R}[X] / \mathcal{R} = \{[\![f(X)]\!] \mid f(X) \in \mathbb{R}[X]\}$.

Rem. : on écrit aussi $\mathbb{R}[X] / (X^2 + 1)$ au lieu de $\mathbb{R}[X] / \mathcal{R}$.
Dans $\mathbb{C}$ on peut définir une addition et une multiplication des classes d'équivalence indépendamment des représentants choisis :

Déf. 3 : $[\![f(X)]\!] + [\![g(X)]\!] = [\![f(X) + g(X)]\!]$.
$[\![f(X)]\!] \cdot [\![g(X)]\!] = [\![f(X) \cdot g(X)]\!]$.

Alors $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif. On prouve l'existence d'un inverse pour la multiplication de $[\![f(X)]\!] \neq [\![0]\!]$ de la manière suivante : de l'irréductibilité de $X^2 + 1$, on déduit que le p.g.c.d. de $f(X)$ et $X^2 + 1$ est 1. Comme $\mathbb{R}[X]$ est un anneau intègre euclidien (p.117), il existe des polynômes $h(X)$ et $k(X)$ vérifiant : $f(X)\,h(X) + (X^2 + 1)\,k(X) = 1$, et donc :

$$[\![f(X) \cdot h(X)]\!] = [\![1]\!]. \text{ D'où } [\![f(X)]\!]^{-1} = [\![h(X)]\!].$$

Chaque classe contient exactement un polynôme de la forme $a + bX$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, et est par conséquent déterminée par la donnée d'un couple de nombres réels, avec :

(1) $(a + bX) \mathcal{R} (c + dX) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$, et

(2) $f(X) = q(X)(X^2 + 1) + r(X)$ avec $d^{\circ}(r(X)) \leq 1$ et $f(X) \mathcal{R}\, r(X)$.

On en déduit que l'ensemble des polynômes de la forme $a + bX$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est un système de représentants de $\mathbb{C}$, avec les lois :

$$[\![a + bX]\!] + [\![c + dX]\!] = [\![(a + c) + (b + d)X]\!],$$
$$[\![a + bX]\!] \cdot [\![c + dX]\!] = [\![(ac + bdX^2) + (ad + bc)X]\!] = [\![(ac - bd) + (ad + bc)X]\!].$$

Comme un calcul le prouve aisément, on a dans $\mathbb{C}^*$:

$$[\![a + bX]\!]^{-1} = \left[\!\!\left[\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} X \right]\!\!\right].$$

On plonge $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par : $a \mapsto [\![a]\!]$. $[\![a]\!]$ peut être identifiée à a. On pose maintenant $\mathrm{i} := [\![X]\!]$. Alors i est racine du polynôme $X^2 + 1$, et on en déduit la représentation suivante pour un élément de $\mathbb{C}$:

$[\![a + bX]\!] = a + b[\![X]\!] = a + b\,\mathrm{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Il s'ensuit $\mathrm{i}^2 = -1$.

Les éléments de $\mathbb{C}$ s'appellent *les nombres complexes*. Le procédé de construction implique que $\mathbb{C}$ est le plus petit sur-corps de $\mathbb{R}$ dans lequel $X^2 + 1$ a des racines.

Rem. : on introduit souvent les nombres complexes directement comme des couples de nombres réels, pour lesquels les opérations d'addition et de multiplication correspondantes ont été définies ci-dessus. Les nombres $b\,\mathrm{i}$ avec $b \in \mathbb{R}^*$ s'appellent *nombres imaginaires purs*, et le nombre i *unité imaginaire*.

Représentation géom. des nombres complexes

Avant d'étudier dans $\mathbb{C}$ l'exponentiation et sa fonction réciproque, on va tout d'abord représenter concrètement les nombres complexes. Le corps $\mathbb{C}$ peut être considéré comme un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, de base $\{1, \mathrm{i}\}$. Dans l'écriture $z = a + b\,\mathrm{i}$, on interprète maintenant les nombres réels a (*partie réelle*) et b (*partie imaginaire*) comme coordonnées dans un repère cartésien. Ainsi, à chaque nombre complexe correspond un point du plan et réciproquement. L'axe des abscisses représente les réels et l'axe des ordonnées les imaginaires purs (*plan complexe de* GAUSS, fig. A).

On peut définir sur $\mathbb{C}$ une valeur absolue appelée *module* :

$$|z| = |a + b\,\mathrm{i}| := \sqrt{a^2 + b^2}\ ;\ (z_1, z_2) \mapsto |z_1 - z_2|$$

est alors une distance sur $\mathbb{C}$ (p. 51).

On appelle le nombre $\bar{z} = a - b\,\mathrm{i}$ *nombre complexe conjugué* de $z = a + b\,\mathrm{i}$. On en déduit $z\bar{z} = |z|^2$, et aussi

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ pour } z \neq 0.$$

On obtient aisément les règles de calcul suivantes pour la conjugaison :

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\ \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Dans le plan complexe de GAUSS, on emploie également les coordonnées polaires r et φ avec $0 \leq \varphi < 2\pi$, de sorte que pour $z \neq 0$ on peut écrire aussi $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. On en déduit $r = |z|$. φ s'appelle l'*Argument principal* de z, et est noté Arg z. Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi + 2k\pi$ est un argument de z : on note $\arg z = \varphi + 2k\pi$. Dans la théorie des fonctions, on montrera que $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$; on obtient alors la représentation normale des nombres complexes non nuls $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, qui est très utile. ($\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{2ki\pi} = 1$.)

Rem. : L'Argument principal, pour certains auteurs, correspond à $\varphi \in\ ]-\pi, \pi]$.

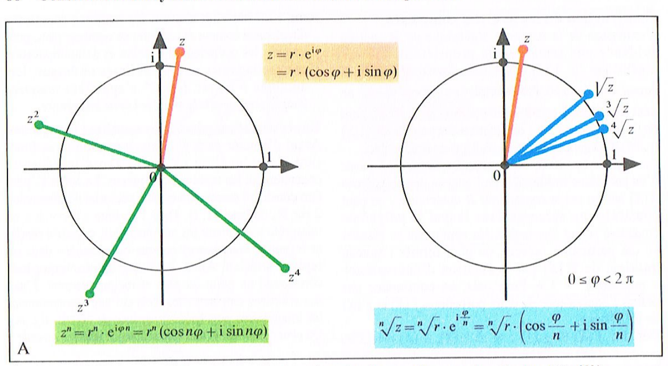
Opérations dans le plan complexe de GAUSS

L'addition et la soustraction des nombres complexes se font vectoriellement dans le plan complexe de GAUSS (fig. C). De même la multiplication et la division sont effectuées géométriquement à l'aide de triangles semblables (fig. D). On justifie très facilement ces dernières interprétations en utilisant la *représentation normale* .

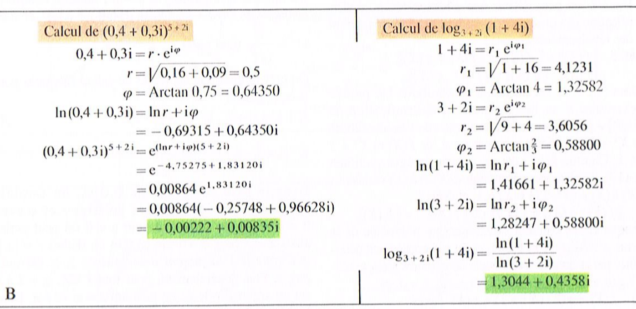
Soit $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ et $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$, $z_1, z_2 \neq 0$; on a :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)} \text{ et } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

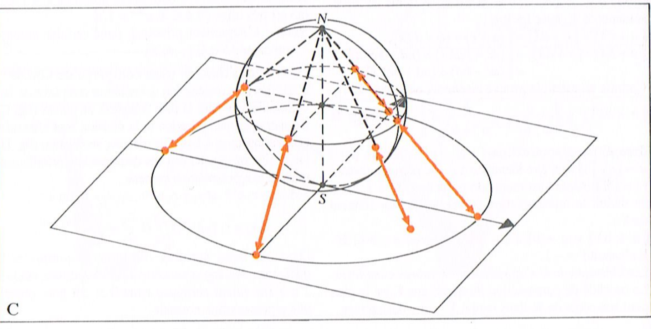
Dans ces deux derniers résultats, la somme et la différence des arguments doivent être réduites modulo 2π à une valeur comprise entre 0 et 2π pour obtenir une représentation normale.



Élévation à une puissance entière et extraction de racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe (n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$)



Exponentiation et logarithme d'un nombre complexe



Plan complexe de GAUSS et sphère de RIEMANN

Clôture algébrique de $\mathbb{C}$

Comme l'élévation à une puissance entière se ramène à des multiplications, on peut immédiatement calculer l'élévation d'un nombre complexe à une puissance entière : $z = re^{i\varphi} \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow z^n = r^n e^{in\varphi}$ $(z \neq 0)$.
On a aussi $|z^n| = |z|^n$ et $\text{Arg } z^n = n \cdot \arg z \bmod 2\pi$ avec $0 \le \text{Arg } z^n < 2\pi$ (fig. A). De même l'extraction de racine de $z \neq 0$ peut être ramenée à un calcul dans $\mathbb{R}$: pour $z = re^{i\varphi} \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on peut définir :
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}$ $(\varphi = \text{Arg } z)$.

On a ici $|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$ et $\text{Arg}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Arg } z$ (fig. A).

$\sqrt[n]{z}$ est un zéro du polynôme $X^n - z$. Ce polynôme possède exactement n racines distinctes qui s'écrivent $x_k = \sqrt[n]{z} \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Le symbole $\sqrt[n]{z}$ désigne parmi les n racines celle de plus petit Argument. Les racines de $X^n - 1$ s'appellent les *racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité*. Elles correspondent dans le plan complexe de GAUSS aux sommets d'un polygône régulier inscrit dans le cercle unité, polygône dont un des sommets est situé sur le demi-axe des réels positifs.
On déduit des propriétés ci-dessus que, outre $X^2 + 1$, tout polynôme $X^2 - z$ avec $z \in \mathbb{C}$ admet des racines. Le théorème suivant, qui en est une généralisation de grande portée, n'est pas élémentaire.

Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ (p. 96).

Il existe plusieurs démonstrations de ce théorème, appelé aussi *théorème fondamental de l'algèbre*. Cependant, on ne peut le démontrer à l'aide de moyens purement algébriques. On en obtient une preuve particulièrement simple comme conséquence du théorème de LIOUVILLE dans la théorie des fonctions (p. 447). Le corps $\mathbb{C}$ est alors *algébriquement clos* (p. 101). On déduit en effet de ce théorème que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$ se décompose en un produit de n facteurs du premier degré. Lorsque tous les coefficients du polynôme sont réels, si x_i est racine, alors $\overline{x_i}$ est aussi racine, et le polynôme se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs linéaires et quadratiques. Si n est impair, alors on doit avoir $x_i = \overline{x_i}$ pour au moins une racine, et le polynôme admet au moins une racine réelle.

Exponentielle, logarithme dans $\mathbb{C}$

Grâce à la représentation normale des nombres complexes, on peut étendre le calcul des puissances à des exposants complexes en conservant les règles de calcul utilisées jusqu'à présent.
Pour $z = r\,e^{i\varphi}$, $r > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, et $w = x + iy$, on a $z^w = (r\,e^{i\varphi})^{x+iy} := r^x r^{iy} e^{i\varphi x - \varphi y} = (r^x e^{-\varphi y})\, e^{i(y \ln r + \varphi x)}$.
L'extraction de racine se ramène à un calcul de puissance comme pour les nombres réels on pose :

$$\sqrt[w]{z} := z^{\frac{1}{w}} \text{ pour } z \in \mathbb{C} \text{ et } w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Pour la recherche du logarithme, l'utilisation de la représentation normale est particulièrement indiquée, surtout pour le logarithme de base e. On peut définir :
$\ln z := \ln r + i\varphi$ pour $z = r\,e^{i\varphi}$, $z \neq 0$, $r > 0$, $\varphi = \text{Arg } z$.
$\ln z$ est une solution de l'équation $e^x = z$. Comme $e^{2i\pi} = 1$, il y a encore une infinité de solutions à cette équation, à savoir :
$\ln r + i\varphi + 2i\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
$\ln z$ est la seule vérifiant $0 \le \varphi + 2k\pi < 2\pi$.
Une solution particulière de l'équation $w^x = z$ est $\frac{\ln z}{\ln w}$ (pour $z \neq 0$, $w \neq 0$ et $w \neq 1$). Elle sera notée $\log_w z$ et appelée logarithme de base w de z. Comme pour l'opération inverse de la multiplication où la division par 0 est exclue, on ne peut remédier aux exclusions indiquées pour l'extraction de racine et la recherche de logarithme.

Autres propriétés de la structure de $\mathbb{C}$

Dans l'extension de la structure algébrique de $\mathbb{R}$ à celle de $\mathbb{C}$, on perd la structure d'ordre. Certes, on peut munir $\mathbb{C}$ d'un ordre, par ex. (ordre strict) :

$$z_1 < z_2 :\Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| < |z_2| \vee \\ (|z_1| = |z_2| \neq 0 \wedge \text{Arg } z_1 < \text{Arg } z_2). \end{cases}$$

Mais il n'existe aucun ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec la structure algébrique, c.-à-d. vérifiant les lois de monotonie pour l'addition et la multiplication (p. 52, tab. D), soit par exemple :

$$a < 0 \vee a > 0 \Rightarrow a^2 > 0 \Rightarrow a^2 + 1 > 0.$$

En revanche, il est possible d'étendre la topologie réelle en une topologie complexe à l'aide du module, qui prolonge la valeur absolue sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'important théorème suivant :

Théorème topologique des nombres complexes

Toute suite de CAUCHY de nombres complexes est convergente dans $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ est ainsi complet (p. 61).

Sphère de RIEMANN, compactification

Si on pose une sphère de diamètre 1 sur le plan complexe de GAUSS à l'origine, on peut par une projection stéréographique à partir du pôle nord rendre le plan complexe homéomorphe à la sphère privée du pôle nord (fig. C). L'équateur de cette sphère dite *sphère de RIEMANN* correspond par cette projection au cercle du plan de centre l'origine et de rayon 1. En faisant correspondre au pôle nord un nouveau point noté ∞, on obtient par l'adjonction de ce point au plan complexe un *espace compact* (p. 229). Les domaines extérieurs aux cercles centrés en l'origine forment un système fondamental de voisinages de ce point ∞. L'adjonction d'un point spécial n'est pas la seule possibilité de *compactifier* le plan (en géométrie projective, on procède différemment, p. 139), mais cette adjonction est très importante dans la théorie des fonctions complexes. Dans l'espace compact ainsi formé, le comportement des fonctions holomorphes et méromorphes est particulièrement clair, car on obtient une surface de RIEMANN par ce procédé de compactification.

$\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes		
Corps algébriquement clos (tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ se décompose en un produit de facteurs de degré 1)	pas d'ordre compatible avec la structure algébrique	espace métrique complet (toute suite de CAUCHY converge)

$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels		
corps non algébriquement clos (tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se décompose en un produit de facteurs de degré au plus 2)	totalement ordonné, archimédien, possédant la propriété de la borne supérieure	espace métrique complet

$\mathbb{A}$ ensemble des nombres algébriques		
Corps algébriquement clos (tout polynôme de $\mathbb{A}[X]$ se décompose en un produit de facteurs de degré 1)	pas d'ordre compatible avec la structure algébrique	espace métrique non complet pour la topologie du module

$\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels		
Corps non algébriquement clos (un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ ne se décompose pas toujours en un produit de facteurs de degré 1)	totalement ordonné, archimédien, ne possédant pas la propriété de la borne supérieure	espace métrique non complet pour la topologie de la valeur absolue

$\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs		
anneau intègre	totalement ordonné, archimédien	

$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels		
demi-anneau	totalement et bien ordonné, archimédien	

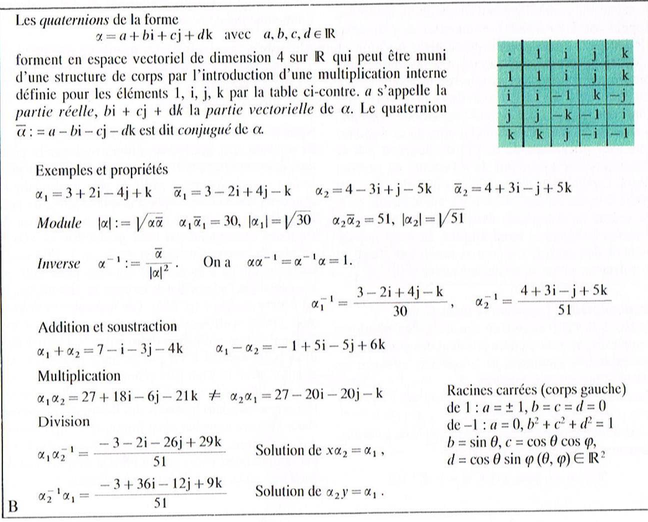
propriétés algébriques

propriétés dues à la relation d'ordre

propriétés topologiques

A

Construction du système des nombres et propriétés structurelles


Les *quaternions* de la forme

$$\alpha = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \quad \text{avec} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

forment en espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ qui peut être muni d'une structure de corps par l'introduction d'une multiplication interne définie pour les éléments 1, i, j, k par la table ci-contre. a s'appelle la *partie réelle*, $b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ la *partie vectorielle* de α. Le quaternion $\overline{\alpha} := a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}$ est dit *conjugué* de α.

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	−j
j	j	−k	−1	i
k	k	j	−i	−1

Exemples et propriétés

$\alpha_1 = 3 + 2\mathrm{i} - 4\mathrm{j} + \mathrm{k}$ $\quad \overline{\alpha}_1 = 3 - 2\mathrm{i} + 4\mathrm{j} - \mathrm{k}$ $\quad \alpha_2 = 4 - 3\mathrm{i} + \mathrm{j} - 5\mathrm{k}$ $\quad \overline{\alpha}_2 = 4 + 3\mathrm{i} - \mathrm{j} + 5\mathrm{k}$

Module $|\alpha| := \sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$ $\quad \alpha_1\overline{\alpha}_1 = 30,\ |\alpha_1| = \sqrt{30}$ $\quad \alpha_2\overline{\alpha}_2 = 51,\ |\alpha_2| = \sqrt{51}$

Inverse $\alpha^{-1} := \dfrac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}$. On a $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$.

$$\alpha_1^{-1} = \frac{3 - 2\mathrm{i} + 4\mathrm{j} - \mathrm{k}}{30}, \quad \alpha_2^{-1} = \frac{4 + 3\mathrm{i} - \mathrm{j} + 5\mathrm{k}}{51}$$

Addition et soustraction

$\alpha_1 + \alpha_2 = 7 - \mathrm{i} - 3\mathrm{j} - 4\mathrm{k}$ $\quad \alpha_1 - \alpha_2 = -1 + 5\mathrm{i} - 5\mathrm{j} + 6\mathrm{k}$

Multiplication

$\alpha_1\alpha_2 = 27 + 18\mathrm{i} - 6\mathrm{j} - 21\mathrm{k} \neq \alpha_2\alpha_1 = 27 - 20\mathrm{i} - 20\mathrm{j} - \mathrm{k}$

Division

$\alpha_1\alpha_2^{-1} = \dfrac{-3 - 2\mathrm{i} - 26\mathrm{j} + 29\mathrm{k}}{51}$ Solution de $x\alpha_2 = \alpha_1$,

$\alpha_2^{-1}\alpha_1 = \dfrac{-3 + 36\mathrm{i} - 12\mathrm{j} + 9\mathrm{k}}{51}$ Solution de $\alpha_2 y = \alpha_1$.

Racines carrées (corps gauche)
de 1 : $a = \pm 1, b = c = d = 0$
de −1 : $a = 0, b^2 + c^2 + d^2 = 1$
$b = \sin\theta, c = \cos\theta\cos\varphi$,
$d = \cos\theta\sin\varphi\ (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$

B

Quaternions

Construction axiom. du système des nombres

Les nombres entiers naturels introduits axiomatiquement jouent un rôle fondamental dans la construction du système des nombres (p. 52 à 67). On obtient successivement, à partir de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (tab. A) par des procédés de complétion concernant les différentes propriétés structurelles rencontrées. Lors de l'introduction des nombres réels, on peut déjà clairement obtenir des ensembles structurés de nombres isomorphes par des procédés très divers. Cela est également vrai pour les autres ensembles. Tous peuvent être introduits axiomatiquement. Par exemple, pour $\mathbb{Z}$, on peut considérer le système d'axiomes de PEANO convenablement modifié. $\mathbb{Q}$ peut être caractérisé comme étant le plus petit corps de caractéristique nulle (p. 105), $\mathbb{R}$ comme un corps totalement ordonné archimédien dans lequel toute suite de CAUCHY converge. Dans $\mathbb{C}$, on perd la structure ordonnée au profit de la clôture algébrique. Les entiers naturels représentent à chaque fois une sous-structure de l'ensemble considéré.

Caractérisation univoque des entiers naturels

Le système d'axiomes de PEANO caractérise les entiers naturels à un isomorphisme près (*système d'axiomes univalent* ou *catégorique*). Comme ces axiomes ne sont cependant pas formulés à l'aide des moyens d'expression de la logique du premier ordre, on ne peut en déduire toutes les propositions vraies concernant les entiers naturels (p. 19). On peut imaginer que certaines des conjectures de la théorie des nombres, non démontrées à ce jour, sont indécidables.

Nombres algébriques et transcendants

La construction de $\mathbb{C}$ peut aussi être réalisée à partir de $\mathbb{Q}$. On effectue dans un premier temps la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, puis dans un second la complétion topologique par la construction de la fermeture complète. C'est ainsi qu'on obtient comme extension intermédiaire le *corps des nombres algébriques*, c.-à-d. l'ensemble des racines des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$. À la différence de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, cet ensemble est encore dénombrable. Les nombres complexes non algébriques sont dits *nombres transcendants*. Les nombres fondamentaux e et π appartiennent à cette dernière catégorie.

Rem. : La preuve de la transcendance d'un nombre est souvent difficile et ne résulte pas d'un raisonnement direct : on aboutit à une contradiction en faisant l'hypothèse que le nombre est un zéro d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$.

Entre $\mathbb{Q}$ et le corps des nombres algébriques on peut intercaler, comme on le montrera en algèbre, une infinité de corps intermédiaires (*extension algébrique de corps*).

Nombres *p*-adiques

On peut arriver à des propriétés de nombres complètement différentes par une légère modification du processus d'extension effectué. Par exemple, on peut appliquer le procédé de CANTOR déjà utilisé (p. 61) pour la construction de l'espace complété de $\mathbb{Q}$ à n'importe quel espace vectoriel métrique, donc en particulier aux corps valués (p. 122).

$\mathbb{Q}$ peut également être muni d'une métrique différente de celle de la valeur absolue grâce aux *valuations p-adiques*. Soit r un rationnel non nul, p un nombre premier et $w_p(r) \in \mathbb{Z}$ l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de r. On obtient une métrique en posant $|r|_p = p^{-w_p(r)} \wedge |0|_p = 0$. $|r|_p$ est toujours soit nul, soit une puissance de p (*valuation discrète*). Pour $p = 2$, on a par exemple :

$$|2|_2 = 2^{-1}, \left|\frac{3}{4}\right|_2 = |3 \cdot 2^{-2}|_2 = 2^2, |25|_2 = |5^2|_2 = 1.$$

Les notions de suites convergentes et de suites de CAUCHY sont introduites comme en page 61. La suite $(2^n) = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$ converge maintenant vers 0, et la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\right) = (2, 6, 14, 30, \ldots)$ vers − 2.

De nouveau il existe des suites de CAUCHY non convergentes, comme par exemple la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{k^2}\right)$.

Par le procédé de CANTOR, on obtient maintenant comme complété de $\mathbb{Q}$ le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques (HENSEL), à ne pas confondre avec les réels écrits dans le système de numération de base p (p. 63). Les corps $\mathbb{Q}_p$ pour différents entiers premiers ne sont ni isomorphes entre eux, ni isomorphes à $\mathbb{R}$, mais ils possèdent la puissance du continu comme $\mathbb{R}$. Ils jouent un rôle important en théorie des nombres (p. 123).

Quaternions

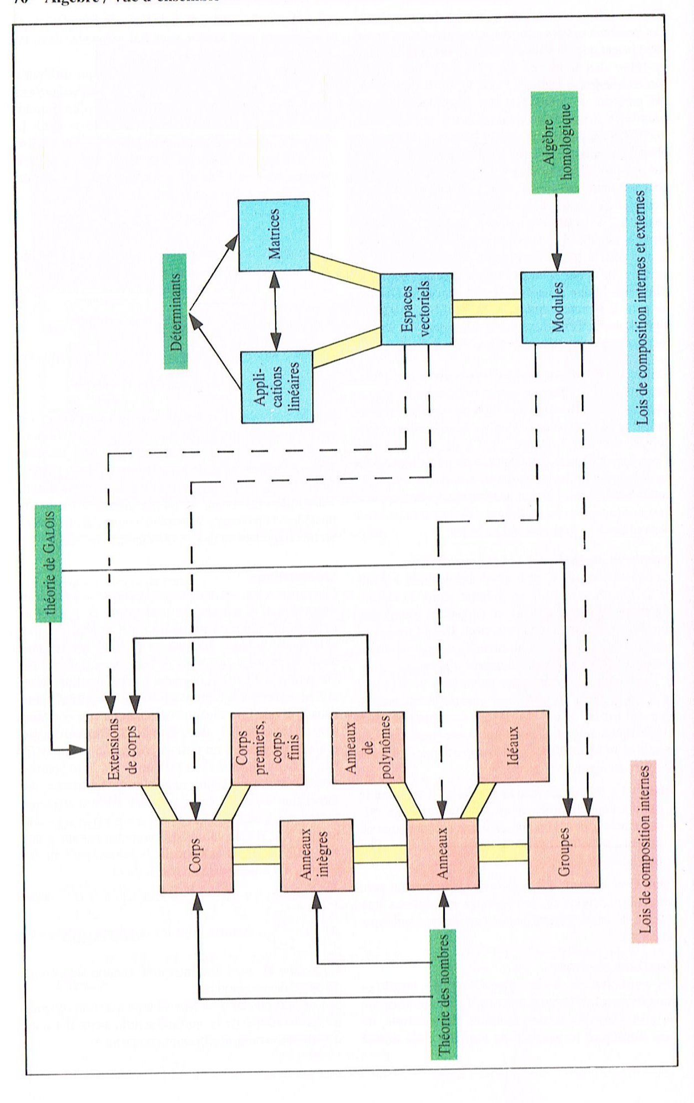
La construction des nombres complexes conduit à se demander si $\mathbb{C}$ est encore susceptible de nouvelles extensions, donc en particulier s'il existe d'autres extensions de corps commutatif K de $\mathbb{R}$ qui seraient aussi des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On peut répondre négativement à cette question. Mais si l'on renonce à la commutativité de la multiplication dans K et que l'on souhaite seulement $a\,\alpha = \alpha\,a$ pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in K$, alors, hormis $\mathbb{C}$, il existe encore d'après FROBENIUS un unique corps non commutatif (ou *corps gauche*) vérifiant les propriétés précédentes : c'est le *corps des quaternions*, de dimension 4 sur $\mathbb{R}$. Dans une base fixée d'éléments notés 1, i, j, k où tout $\alpha \in K$ s'écrit $\alpha = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, la multiplication est connue grâce à la table du tab. B. a s'appelle la *partie réelle* de α, $b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ la *partie vectorielle* de α.

En posant $\overline{\alpha} := a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}$, et $|\alpha| := \sqrt{\alpha\,\overline{\alpha}}$, alors

$$\alpha^{-1} = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2},$$ comme pour les nombres complexes.

$\mathbb{C}$, comme $\mathbb{R}$, peut être interprété comme sous-corps du corps des quaternions.

Si l'on accepte des diviseurs de 0 ou que l'on renonce à l'associativité de la multiplication, alors il existe d'autres structures algébriques contenant $\mathbb{R}$.



Le but de l'**algèbre** est d'étudier les propriétés des *ensembles munis d'une structure algébrique* (par ex. les groupes, anneaux, corps, modules, espaces vectoriels). Les ensembles peuvent être finis ou infinis. Une structure algébrique consiste en des *lois de composition internes* ou *externes* (pp. 39, 41) possédant des propriétés particulières (par ex. associativité, commutativité, existence d'un élément neutre, existence d'un inverse, distributivité). L'étude de ces ensembles structurés conduit à l'étude de *structures* dites *dérivées* (p. 37), comme les *sous-structures* (par ex. sous-groupes, sous-anneaux, sous-corps, sous-modules, idéaux), les *structures quotients* (par ex. groupe quotient, anneau quotient, corps quotient, module quotient) et les *structures produits* (par ex. produit direct de groupes ou de modules).
On compare deux ensembles structurés au moyen d'applications compatibles avec les structures des deux ensembles. On parle alors d'*homomorphismes* de structures particulières (par ex. homomorphismes de groupes, d'anneaux, de corps, de modules ; applications linéaires). Deux ensembles structurés sont considérés comme algébriquement équivalents (*isomorphes*) lorsqu'il existe un homomorphisme bijectif entre eux. Un tel homomorphisme bijectif est appelé *isomorphisme*, et plus précisément on parle d'isomorphisme de groupes, d'anneaux, de corps, et de modules. On peut entreprendre une classification des ensembles structurés à l'aide de cette notion d'isomorphie ; on en déduit des classes d'ensembles structurés isomorphes. Une tâche essentielle de l'algèbre consiste à décrire de telles classes au moyen de *modèles* particuliers (par ex. modèles des groupes cycliques, pp. 75, 77, ou encore modèles des espaces vectoriels de dimension finie, p. 87).

Dans la **théorie des groupes** (pp. 73 à 79), on étudiera les ensembles munis d'une loi de composition interne associative, possédant un élément neutre, et pour laquelle tout élément admet un inverse. On différencie les groupes finis et infinis. Les groupes commutatifs jouent un grand rôle. Les sous-groupes distingués apparaissent comme d'importantes sous-structures. La structure de « groupe » est une propriété fondamentale pour la plupart des autres structures algébriques.

La **théorie des anneaux** (pp. 81, 83) concerne les groupes commutatifs munis d'une deuxième loi de composition interne, associative, et distributive par rapport à la première loi. La notion d'idéal se dégage comme une sous-structure importante, correspondant à celle de sous-groupe distingué dans les groupes. Les idéaux jouent un grand rôle pour l'étude de la divisibilité dans les anneaux (par ex. théorie des nombres). Outre les anneaux commutatifs avec ou sans élément unité, on étudiera les anneaux intègres, dans lesquels il n'y a pas de diviseur de zéro.

Les **anneaux de polynômes** (pp. 95, 96, 97) et les notions qui s'y rattachent sont essentielles dans de nombreux domaines de l'algèbre (par ex. les extensions de corps).

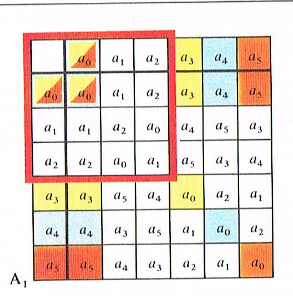
La **théorie des corps** (pp. 81, 83) étudie les anneaux qui, privés de zéro, ont aussi une structure de groupe pour la deuxième loi de composition interne. Le quotient d'un anneau commutatif unitaire par un idéal maximal est un corps.

La liaison entre les corps et leurs sous-corps, à l'origine de la **théorie des extensions de corps** (pp. 99 à 103), est fondamentale. Dans ce cadre, les **corps premiers** et les **corps finis** (p. 105) sont remarquables. Les notions relatives aux espaces vectoriels (par ex. la dimension) et les polynômes jouent également un rôle dans cette théorie.

Dans la **théorie de Galois** (pp. 107 à 115) on décrit des extensions de corps particulières à l'aide des propriétés des groupes finis. Grâce à la théorie de Galois on sait que la résolution générale par radicaux des équations de degré n pour $n \geq 5$ n'est pas possible. De plus, la théorie de Galois fournit des critères de constructibilité à la règle et au compas. On peut alors, pour toute une série de problèmes de constructions classiques, savoir si celles-ci sont possibles ou non (par ex. la quadrature du cercle).

La **théorie des modules** (pp. 85, 87) porte sur les ensembles munis d'une structure de groupe commutatif et d'une loi de composition externe compatible avec la loi de composition interne. Le domaine d'opérateurs de la loi de composition externe est un anneau commutatif avec élément unité. La théorie des modules présente des rapports étroits avec celle des groupes commutatifs et celle des idéaux.
On peut également au moyen des modules dégager la théorie de l'homologie (p. 249) où la méthode fonctorielle (p. 249) est appliquée. Les bases en sont traitées aujourd'hui dans une nouvelle partie de l'algèbre, l'**algèbre homologique**, qui reste un domaine ouvert.

La **théorie des espaces vectoriels** (pp. 87, 89), où l'on considère uniquement des corps comme domaines d'opérateurs, est un cas particulier de la théorie des modules. Elle provient également de la théorie de la résolution des **systèmes d'équations linéaires** (p. 93) et possède de nombreuses applications. Les **matrices** (pp. 89, 91) et leurs opérations sont étroitement reliées aux applications compatibles avec les structures, appelées applications linéaires. La notion de **déterminant** (p. 91) fait aussi partie de la théorie des espaces vectoriels. On désigne par **algèbre linéaire** les théories des modules et des espaces vectoriels.



	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	a_0	a_4	a_5	a_3
a_2	a_2	a_0	a_1	a_5	a_3	a_4
a_3	a_3	a_5	a_4	a_0	a_2	a_1
a_4	a_4	a_3	a_5	a_1	a_0	a_2
a_5	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0

A_1

∘	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4
D_0	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4
D_1	D_1	D_2	D_3	D_4	D_0
D_2	D_2	D_3	D_4	D_0	D_1
D_3	D_3	D_4	D_0	D_1	D_2
D_4	D_4	D_0	D_1	D_2	D_3

A_2

(Les éléments D_0 à D_4 peuvent être interprétés comme les rotations laissant un pentagone régulier invariant, p. 38 fig. C)

sous-groupes propres

$\{a_0, a_1, a_2\}$, $\{a_0, a_3\}$, $\{a_0, a_4\}$, $\{a_0, a_5\}$

pas de sous-groupe propre

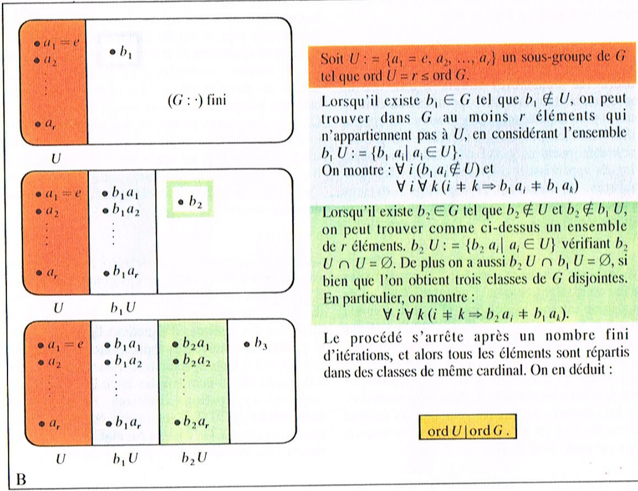
Un sous-groupe propre doit contenir, outre l'élément neutre (ici a_0, resp. D_0), au moins un autre élément x. Les puissances de x, $x^2 := x \cdot x$, $x^3 := x \cdot x^2$, etc., doivent aussi appartenir au sous-groupe.

Dans la table A_2, D_1 à D_4 ne peuvent appartenir à un sous-groupe propre car les puissances de chacun d'eux engendrent le groupe entier. Le groupe de la table A_2 ne contient donc aucun sous-groupe propre.

Dans la table A_1 on trouve facilement les sous-groupes propres indiqués.

A

Sous-groupes propres des groupes finis



Théorème d'EULER-LAGRANGE

On renvoie à la p. 39 pour les définitions de la notion de groupe et des notions qui en découlent. Le *but* de la théorie des groupes réside dans la recherche de *moyens d'étude* adaptés aux groupes et dans la conception de *modèles* de groupes (voir p. 75). Ce dernier objectif ne peut être réalisé qu'en partie.

Propriétés élémentaires des groupes

On donnera deux ex. d'emploi des règles opératoires pour reconnaître un groupe dans un demi-groupe $(G, \top)$ vérifiant des propriétés apparamment faibles.

1) Si d'une part $(\exists\, e \in G \mid \forall\, x \in G, x \top e = x)$, si d'autre part $(\forall\, x \in G, \exists\, x' \in G \mid x \top x' = e)$, alors $(G, \top)$ est un groupe d'élément neutre e.

Dém. : Soit $y = x' \top x$. Alors $y = x' \top e \top x$ ou encore $y = x' \top x \top x' \top x = y^2$. On en tire $y = y \top e =$
$y \top y \top y' = y^2 \top y' = y \top y' = e$.
$\forall\, x \in G, x \top x' = x' \top x = e$.
Mais $e \top x = x \top x' \top x = x \top e = x$.
$\forall\, x \in G, e \top x = x \top e = x$.
Tout neutre à droite est donc neutre à gauche.
Il ne peut donc exister qu'un neutre. (Si e et ε sont neutres, $\varepsilon = \varepsilon \top e = e$).
De même tout inverse à droite est inverse à gauche, d'où l'existence et l'unicité d'un inverse.

2) Si $\forall\, (a, b) \in G^2$ les équations en u, v $a \top u = b$, $v \top a = b$ ont une solution, alors $(G, \top)$ est un groupe.

Dém. : Soit $c \in G$: il existe e tel que $c \top e = c$.
Quel que soit $x \in G$ il existe z tel que $x = z \top c$.
Alors $x \top e = z \top c \top e = z \top c = x \Rightarrow e$ est neutre à droite.
Or quel que soit $x \in$ G, il existe x' tel que $x \top x' = e$. On est ramené à 1).

Sous-groupes

Déf. 1 : Une partie non vide d'un groupe $(G, \top)$ qui, munie de la même loi $\top$, a une structure de groupe, s'appelle *sous-groupe* de G.

Dans tout groupe $(G, \top)$, la partie $\{e\}$, constituée de l'élément neutre, et l'ensemble tout entier sont des sous-groupes de G. Les éventuels autres sous-groupes de G sont appelés *sous-groupes propres.*

Ex. : Dans $(\mathbb{Z}, +)$ les ensembles
$n\mathbb{Z} := \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ sont des sous-groupes propres. Les groupes infinis possèdent toujours des sous-groupes propres, ce qui n'est pas toujours le cas des groupes finis (fig. A).

Une caractérisation facile d'un sous-groupe est :

Th. 1 : Soit $(G, \top)$ un groupe. $U \subseteq G$ est un sous-groupe de $(G, \top)$ si, et seulement si, $U \neq \emptyset$ et $\forall\, a \in U, \forall\, b \in U, a \top b^{-1} \in U$.

Groupes monogènes

Tout élément x d'un groupe $(G, \top)$ est contenu dans un sous-groupe de G. Le plus petit sous–groupe contenant x est $U_x := \{x^k \mid x \in G \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ avec

$$x^k := \begin{cases} x \top \dots \top x \ (k \text{ fois}) & \text{pour } k \in \mathbb{Z}_+^* \\ e & \text{pour } k = 0 \\ x^{-1} \top \dots \top x^{-1} \ (|k| \text{ fois}) & \text{pour } k \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}$$

Ce sous-groupe U_x, appelé groupe monogène engendré par x, $x \in G$, est fini si, et seulement si, il existe un plus petit entier naturel $r \neq 0$ vérifiant $x^r = e$ (ord $U_x = r$). On a plus généralement :

Déf. 2 : Un groupe $(G, \top)$ est dit monogène lorsqu'il existe un $x \in G$ tel que $G = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. x s'appelle un générateur de G.

Ex. : $(\mathbb{Z}, +)$ et tous ses sous-groupes propres sont des groupes monogènes infinis. Les groupes de rotation G_n (p. 38, fig. C) sont des groupes monogènes finis.

Classes latérales

Lorsque $x \in G$ n'appartient pas au sous-groupe U, alors U et $x\,U := \{x \top u \mid u \in U\}$ sont disjoints, sinon on aurait $x \top u \in U$ pour un $u \in U$, donc aussi $x \in U$. U et $x\,U$ sont équipotents, cependant $x\,U$ n'est pas un sous-groupe car par ex. $e \notin x\,U$.

Déf. 3 : Soit U un sous-groupe de $(G, \top)$, et $x \in G$. Alors $x\,U := \{x \top u \mid u \in U\}$ s'appelle *classe latérale à gauche* modulo U (de même $U\,x := \{u \top x \mid u \in U\}$ *classe latérale à droite*). On dit plus brièvement *classe à gauche*, resp. *classe à droite.*

Rem. : Dans le cas d'une loi notée additivement, on écrit $x + U$, resp. $U + x$.

On montre facilement que deux classes latérales à gauche (resp. à droite) sont ou disjointes ou confondues. On en déduit que les classes latérales à gauche (ou à droite) d'un groupe G forment une partition de G. L'*ensemble des classes latérales à gauche* (resp. *à droite*) sera noté $G\,/\,U$ (resp. G/U').

Pour les groupes finis, le théorème d'EULER-LAGRANGE découle de ce qui précède (fig. B) :

Th. 2 : L'ordre de tout sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre du groupe.

Rem. : Le nombre de classes latérales à gauche (ou à droite) modulo U dans un groupe fini G est appelé *indice de* U dans G , et est noté $[G : U]$. On obtient : ord $G = [G : U] \cdot$ ord U.

Homomorphismes

Les applications compatibles avec la structure algébrique, appelées homomorphismes, sont importantes dans l'étude des groupes.

Déf. 4 : Soit $(M, \top)$ et $(M', \top')$ deux ensembles munis chacun d'une loi de composition interne (l.c.i.). Une application $f : M \to M'$ s'appelle homomorphisme lorsque pour tout $a, b \in U$ on a :
$f(a \top b) = f(a) \top' f(b)$.
M et $f[M]$ sont dits homomorphes. Lorsque G et G' sont des groupes, un homomorphisme $f : G \to G'$ s'appelle homomorphisme de groupes (hom. de gr.).

Ex. : une injection canonique, l'app. identité Id_G,
exp : $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ déf. par $x \mapsto e^x$,
ln : $(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ déf. par $x \mapsto \ln x$,
l : $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ déf. par $x \mapsto mx$ $(m \in \mathbb{R})$,
f_a : $(\mathbb{Z}, +) \to (G, \top)$ déf. par $z \mapsto a^z$ $(a \in G)$.

L'intérêt des homomorphismes réside dans le transport de la structure de l'ensemble de départ dans l'ensemble d'arrivée. On a :

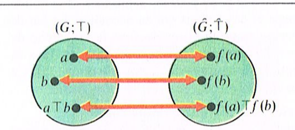
Th. 3 : *Soit G un groupe (resp. un groupe commutatif, un demi-groupe, un monoïde) et M' un ensemble muni d'une l.c.i. Alors pour tout homomorphisme $f : G \to M'$, l'image $f\,[G]$ est un groupe (resp. un groupe commutatif, un demi-groupe, un monoïde).*

L'image d'un sous-groupe de G par un hom. de gr. $f : G \to G'$ est un sous-groupe de G'.

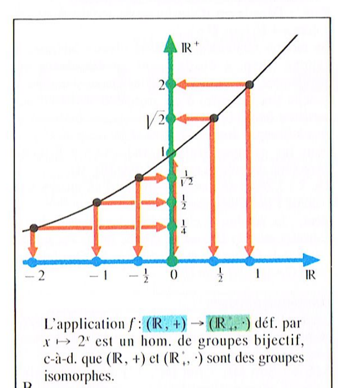
Rem. : Dans la dém. du th. 3 on montre :
$f(e) = e'$ él. neutre de G' et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

A

Un hom. de groupes *surjectif* représente une « réduction », c-à-d. que plusieurs éléments de G peuvent avoir le même élément image dans $\widehat{G}$.
Exemple : G et $\widehat{G} := \{e\}$ avec $e \in G$ sont des groupes homomorphes par l'hom. de groupes $f : G \to \widehat{G}$ déf. par $x \to f(x) = e$.



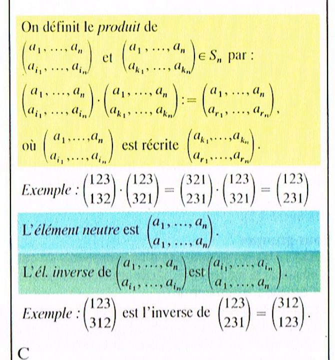
Un hom. de groupes *bijectif* assure, en plus de la compatibilité des lois, l'équipotence (p. 35) des ensembles.
Exemple : $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$ déf. par $x \mapsto 2^x$ (ill. B)



L'application $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$ déf. par $x \mapsto 2^x$ est un hom. de groupes bijectif, c-à-d. que $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$ sont des groupes isomorphes.

B

Exemple de groupes isomorphes



On définit le *produit* de $\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ a_{k_1}, \dots, a_{k_n} \end{pmatrix} \in S_n$ par :

$$\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ a_{k_1}, \dots, a_{k_n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ a_{r_1}, \dots, a_{r_n} \end{pmatrix},$$

où $\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \end{pmatrix}$ est récrite $\begin{pmatrix} a_{k_1}, \dots, a_{k_n} \\ a_{r_1}, \dots, a_{r_n} \end{pmatrix}$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 \\ 231 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$

L'*élément neutre* est $\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ a_1, \dots, a_n \end{pmatrix}$.

L'*él. inverse* de $\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \\ a_1, \dots, a_n \end{pmatrix}$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$ est l'inverse de $\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 312 \\ 123 \end{pmatrix}$.

C

Groupe des permutations

La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ ($x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$), pour laquelle $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalence, peut être interprétée pour $n \geq 1$ à l'aide des propriétés de divisibilité dans $\mathbb{Z}$ par :

$$\boxed{x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow n \mid x - y\,.}$$

Pour $n = 0$, chaque classe contient exactement un élément, car $x - y \in \{0\} \Leftrightarrow x = y$. $\mathbb{Z}_0$ peut donc être identifié à $\mathbb{Z}$.

Pour $n = 1$, on obtient exactement une classe car 1 divise toutes les différences $x - y$. Cette classe peut être représentée par le nombre 0 : $[\![0]\!] = \{x / 1 | x\} = \mathbb{Z}$. On a alors $\mathbb{Z}_1 = \{[\![0]\!]\}$. $\mathbb{Z}_1$ peut être identifié à $\{0\}$, sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

Pour $n = 2$, on déduit les classes représentées par 0 et 1.

$$[\![0]\!] = \{x \mid 2 | x\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}, \quad [\![1]\!] = \{x \mid 2 | x - 1\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}.$$

Pour $n = 3$ on obtient les classes :

$$[\![0]\!] = \{x \mid 3 | x\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\},$$
$$[\![1]\!] = \{x \mid 3 | x - 1\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\},$$
$$[\![2]\!] = \{x \mid 3 | x - 2\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}.$$

Pour tout $n \geq 1$ il s'ensuit que $\mathbb{Z}_n = \{[\![0]\!], [\![1]\!], \dots, [\![n-1]\!]\}$. $\mathbb{Z}_n$ est donc pour $n \geq 1$ un groupe monogène fini d'ordre n.

D

Groupe des classes de congruence modulo n

Groupes isomorphes

Deux groupes G et G' homomorphes peuvent être encore structurellement très différents (fig. A). Cependant s'il existe un homomorphisme de groupes bijectif entre les deux groupes, alors on ne distingue pas ces deux groupes du point de vue de la théorie des groupes (fig. A).

Déf. 5 : Un homomorphisme de groupes bijectif $f : G \to G'$ s'appelle *isomorphisme de groupes*. Deux tels groupes sont dits *isomorphes* (notation : $G \cong G'$).

Ex. : $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$ sont des groupes isomorphes (fig. B).

Pour un homomorphisme de groupes injectif $f : G \to G'$, il vient : $G \cong f[G] \subseteq G'$.

L'isomorphie est une *relation d'équivalence* sur tout ensemble de groupes car on a :
$G \cong G$, $G \cong G' \Rightarrow G' \cong G$ et $G \cong G' \wedge G' \cong G'' \Rightarrow G \cong G''$. Le but de la théorie des groupes est de donner un représentant approprié (un *modèle*) d'une classe de groupes isomorphes.

Ex. : Tout groupe monogène infini G engendré par a est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ grâce à l'isomorphisme de groupes $f_a : \mathbb{Z} \to G$ déf. par $z \mapsto a^z$. $(\mathbb{Z}, +)$ est par conséquent un modèle pour la classe des groupes monogènes infinis (voir p. 77 pour les groupes monogènes finis).

On connaît encore peu de choses sur les modèles de groupes infinis quelconques. Pour les groupes finis, le problème est cerné grâce aux groupes de permutations.

Groupes de permutations

Une *permutation de n éléments* ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) définit une application bijective d'un ensemble $\{a_1, \dots, a_n\}$ sur lui-même ; on la traduit par le schéma

$$\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \end{pmatrix}. \quad (\forall j \quad a_j \to a_{i_j}).$$

Ex. :

$$a_0 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix},$$

$a_4 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$ sont les permutations des éléments 1, 2, 3.

L'ensemble de toutes les permutations de n éléments muni de la composition des applications forme un groupe d'ordre $n!$ (voir tab. C).

Ex. : La table d'opération du groupe des permutations $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ définies ci-dessus est donnée p. 72 (fig. A_1).

Les groupes des permutations d'ensembles de même cardinal sont isomorphes, car ils ne dépendent pas de la nature des éléments, mais seulement de leur nombre. On peut donc parler *du* groupe des permutations S_n d'ordre $n!$ (*groupe symétrique*). Tous les groupes d'ordre n sont obtenus à partir du groupe des permutations S_n car tout groupe d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n (théorème de CAYLEY). On peut attribuer à tout élément a_i d'un groupe $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ une unique permutation

$$\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ a_i \top a_1, \dots, a_i \top a_n \end{pmatrix}.$$

Cette application est un homomorphisme de groupes injectif, c.-à-d. $G \cong f[G] \subseteq S_n$. On peut donc considérer comme modèles des groupes finis de cardinal n les sous-groupes du groupe S_n des permutations. La structure des groupes de permutations est cependant si complexe qu'on ne peut encore en présenter des résultats généraux.

Groupes quotients, sous-groupes distingués

En p. 73, on a vu que tout groupe $(G, \top)$ se décompose modulo un sous-groupe U en l'ensemble G / U des classes latérales à gauche. Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ (p. 31) aboutit à une telle partition. De $b \in aU \Leftrightarrow a^{-1} \top b \in U$ résulte $a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow a^{-1} \top b \in U$.

Rem. : G / U peut de ce fait être considéré comme l'ensemble quotient $G / \mathcal{R}$. La classe aU est la classe d'équivalence $[\![a]\!]$.

La l.c.i. $\top$ définie sur G permet-elle de définir une l.c.i. sur G / U ? Comme G et G / U sont reliés par l'application canonique $k : G \to G / U$ déf. par $x \mapsto [\![x]\!] = xU$ (pp. 31, 33), on cherche à transporter par k la structure de G à G / U en définissant la loi $\top^*$ par :

Déf. 6 : $[\![a]\!] \top^* [\![b]\!] := [\![a \top b]\!]$ pour tous $[\![a]\!], [\![b]\!] \in G / U$.

$\top^*$ est une l.c.i. sur G / U qui ne doit donc pas dépendre des représentants choisis. Ce sera réalisé si : $x \in [\![a]\!] \wedge y \in [\![b]\!] \Rightarrow x \top y \in [\![a \top b]\!]$ (condition de compatibilité).

Si cette condition est remplie, $(G / U, \top^*)$ est un ensemble muni d'une l.c.i., et de plus l'application canonique k est un homomorphisme surjectif. On en déduit que $(G / U, \top^*)$ est un groupe comme image du groupe G (th. 3, p. 73). La question est maintenant de savoir pour quels sous-groupes la condition de compatibilité est remplie. On montre :

Th. 4 : *Un sous-groupe U de G remplit la condition de compatibilité si, et seulement si, toute classe latérale à gauche xU est en même temps la classe latérale à droite Ux, c.-à-d. lorsque $xU = Ux$ pour tout $x \in G$.*

On a alors $G / U = G / U'$ (p. 73).

Cela conduit à :

Déf. 7 : Un sous-groupe N d'un groupe $(G, \top)$ est appelé *sous-groupe distingué* de G lorsque $xN = Nx$ pour tout $x \in G$.

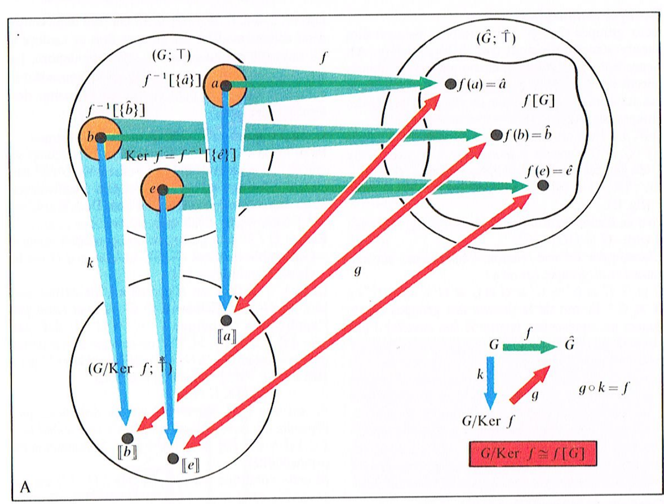
Ex. : Tout sous-groupe d'un groupe commutatif est distingué. Le groupe $\{a_0, a_1, a_2\}$ donné fig. A_1, p. 72 est distingué, contrairement au sous-groupe $\{a_0, a_3\}$.

On obtient avec la déf. 7 le théorème suivant :

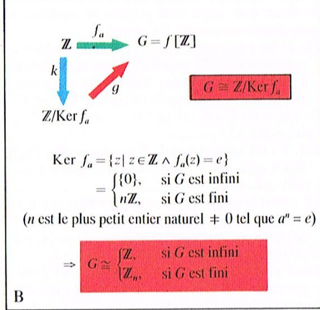
Th. 5 : *Soit $(G, \top)$ un groupe, N un sous-groupe distingué de G et G / N l'ensemble quotient de G par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ ($x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x^{-1} \top y \in N \Leftrightarrow x \top y^{-1} \in N$). Alors $(G / N, \top^*)$, $\top^*$ étant la l.c.i. de la déf. 6, est un groupe et l'application canonique $k : G \to G / N$ est un homomorphisme de groupes.*

Déf. 8 : Le groupe $(G / N, \top^*)$ s'appelle en vertu du th. 4 *groupe quotient* de G par N.

Ex. : $n\mathbb{Z} := \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ($n \in \mathbb{N}$) est un sous-groupe distingué en tant que sous-groupe du groupe commutatif $(\mathbb{Z}, +)$. Le groupe quotient $(\mathbb{Z}_n, +)$ avec $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ et $[\![x]\!] + [\![y]\!] := [\![x + y]\!]$ est aussi appelé *groupe des classes de congruence* modulo n (tab. D). Il est monogène et, pour $n \geq 1$, fini.



Théorème d'homomorphie



$\operatorname{Ker} f_a = \{z \mid z \in \mathbb{Z} \wedge f_a(z) = e\}$

$= \begin{cases} \{0\}, & \text{si } G \text{ est infini} \\ n\mathbb{Z}, & \text{si } G \text{ est fini} \end{cases}$

(n est le plus petit entier naturel $\neq 0$ tel que $a^n = e$)

$\Rightarrow G \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } G \text{ est infini} \\ \mathbb{Z}_n, & \text{si } G \text{ est fini} \end{cases}$

B

Modèles des groupes monogènes

Il y a exactement quatre groupes comm. d'ordre 100

Preuve : Les sous-groupes monogènes intervenant dans la décomposition en produit direct peuvent être représentés par les groupes de classes de congruence $\mathbb{Z}_{n_i}$ (th. 6).

On doit alors avoir :

$n_1 \mid n_2, \ldots, n_{k-1} \mid n_k$ et $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = 100.$

Les diviseurs de 100 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 et 100, qui donnent les factorisations possibles suivantes :

$100 = 1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10$

(Remarquer que le 1 est en fait inutile).

Il y a donc exactement quatre groupes comm. d'ordre 100.

C

Exemple d'application du th. fondamental

D

ord G	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nombre de groupes	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	1	5	1	2	1
dont groupes comm.	1	1	1	2	1	1	1	3	2	1	1	2	1	1	1

Pour un nombre premier on obtient exactement un groupe (comm.). Pour le carré d'un nombre premier on obtient exactement deux groupes (comm.). Le nombre de groupes croît avec le nombre de diviseurs. (On ne peut encore présenter de résultat systématique !)

Groupes finis

Théorème d'homomorphie

Lorsqu'on souhaite énoncer des propriétés structurelles pour un groupe G', on cherche à le comparer à un groupe G connu. Une telle comparaison nécessite un homomorphisme $f : G \to G'$ de façon à obtenir en $f[G]$ un sous-groupe de G'.

Il convient toutefois de préciser l'action de f sur G. Or il existe également dans G un sous-groupe lié à f. C'est $\operatorname{Ker} f$, ensemble des $x \in G$ dont l'image par f est l'élément neutre de G'. Entre les deux couples $(G, \operatorname{Ker} f)$ et $(G', f(G))$, on a une relation remarquable qui s'exprime dans le théorème suivant, illustré par la fig. A :

Théorème d'homomorphie : *Soit* $(G, \top)$ *et* $(G', \top')$ *deux groupes, et* $f : G \to G'$ *un homomorphisme de groupes. Alors on a :*

(1) $\operatorname{Ker} f := \{x \mid x \in G \wedge f(x) = e' \wedge e'$ *élément neutre*$\} = f^{-1}[\{e'\}]$ *est un sous-groupe distingué de* G.

(2) *Le groupe quotient* $G / \operatorname{Ker} f$ *est isomorphe à* $f[G]$ *par l'application* $g : G / \operatorname{Ker} f \to G'$ *définie par* $[\![x]\!] \mapsto f(x)$.

(3) *De l'application canonique* $k : G \to G / \operatorname{Ker} f$ *définie par* $x \mapsto [\![x]\!]$, *on déduit :* $g \circ k = f$. *L'application* g *est déterminée sans ambiguïté par ce résultat.*

Démonstration : (1) On montre que l'image réciproque de tout sous-groupe distingué est distingué. Il s'ensuit que $\operatorname{Ker} f := f^{-1}[\{e'\}]$ est un sous-groupe distingué de G.

(2) L'application g est parfaitement définie, c.-à-d. qu'elle ne dépend pas du représentant choisi, puisque

$[\![x]\!] = [\![y]\!] \Rightarrow y \in [\![x]\!] \Rightarrow x^{-1} \top y \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow$
$f(x^{-1} \top y) = e' \Rightarrow f(x^{-1}) \top' f(y) = e' \Rightarrow$
$f(x)^{-1} \top' f(y) = e' \Rightarrow f(x) = f(y).$

Il est possible de changer le sens de tous les signes d'implication, ce qui prouve également l'injectivité de g. De la déf. de g il vient : $g[G / \operatorname{Ker} f] = f[G]$.

g est un homomorphisme, donc

$$g([\![x]\!] \top^* [\![y]\!]) = g([\![x \top y]\!]) = f(x \top y) = f(x) \top' f(y) = g([\![x]\!]) \top' g([\![y]\!]).$$

On en déduit : $G / \operatorname{Ker} f \cong f[G]$.

(3) De $g \circ k(x) = g(k(x)) = g([\![x]\!]) = f(x)$ pour tout $x \in G$, on déduit : $g \circ k = f$. Soit maintenant g' tel que $g' \circ k = f$, on a alors $g' \circ k = g \circ k$ et donc $g' = g$ puisque k est surjective.

Rem. : Comme $[\![x]\!] = [\![y]\!] \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, la classe $[\![x]\!]$ contient tous les éléments de G qui ont $f(x)$ pour image, c.-à-d. $[\![x]\!] = f^{-1}[\{f(x)\}]$ (fig. A).

Applications du théorème d'homomorphie

1. Modèles des groupes monogènes : Soit G un groupe monogène de générateur a. Alors l'application $f_a : \mathbb{Z} \to G$ déf. par $z \mapsto f_a(z) = a^z$ est un homomorphisme de groupes surjectif, si bien que

$\mathbb{Z} / \operatorname{Ker} f_a \cong f_a[\mathbb{Z}] = G$. Le sous-groupe distingué $\operatorname{Ker} f_a$ est $n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$), d'où $G \cong \mathbb{Z}_n$ (fig. B). Il vient :

Th. 6 : *Le groupe* $\mathbb{Z}_0 = (\mathbb{Z}, +)$ *des entiers relatifs est à un isomorphisme près le seul groupe monogène infini, le groupe des classes de congruence* $\mathbb{Z}_n$, $n > 0$ (p. 75), *est à un isomorphisme près le seul groupe monogène fini d'ordre n.*

2. Petit théorème de Fermat : *Dans tout groupe fini* G *d'élément neutre* e, *on a pour tout* $a \in G : a^{\operatorname{ord} G} = e$.

Démonstration : En considérant le sous-groupe monogène U_a engendré par $a \in G$ (p. 73), on a l'existence d'un plus petit entier naturel $r \neq 0$ vérifiant $a^r = e$. Du th. 6, il vient $U_a \cong \mathbb{Z}_r$, c.-à-d. $\operatorname{ord} U_a = r$. Du th. 2, p. 73, il vient $r \mid n$, d'où

$a^n = a^{r \cdot m} = (a^r)^m = e^m = e$ ($n = \operatorname{ord} G$).

3. I. Th. d'isomorphie : *Soit* G *un groupe,* U *un sous-groupe de* G *et* N *un sous-groupe distingué de* G. *En posant* $U N := \{x \top y \mid x \in U \wedge y \in N\}$ *on obtient :* $U / U \cap N \cong U N / N$.

Démonstration : $U \cap N$ est un sous-groupe distingué de U, UN un sous-groupe de G. N est aussi un sous-groupe distingué de $U N$. En considérant maintenant la restriction (p. 33) de l'application canonique $k : G \to G / N$ à U ou $U N$ selon le cas, on obtient les homomorphismes surjectifs

$k|U : U \to k[U]$ et $k|UN : UN \to k[U]$.

En appliquant deux fois le th. d'homomorphie, on obtient : $U / \operatorname{Ker}(k|U) \cong k[U] \cong UN / \operatorname{Ker}(k|UN)$.

Comme $\operatorname{Ker}(k|U) = U \cap N$ et $\operatorname{Ker}(k|UN) = N$, on a finalement $U / U \cap N \cong UN / N$.

4. II. Th. d'isomorphie : *Soit* G_1 *et* G_2 *deux groupes,* N_1 *(resp.* N_2*) un sous-groupe distingué de* G_1 *(resp.* G_2*). Alors si* $f : G_1 \to G_2$ *est un homomorphisme de groupes surjectif tel que* $f^{-1}[N_2] = N_1$, *on a :* $G_1 / N_1 \cong G_2 / N_2$.

Lorsque G est un groupe et N_1 et N_2 sont deux sous-groupes distingués de G tels que $N_1 \subseteq N_2$, on déduit de ce th. que $(G / N_1) / (N_2 / N_1) \cong G / N_2$.

5. Produit direct, th. fondamental pour les groupes commutatifs (abéliens) de type fini : Le groupe donné en p. 38 (fig. B) n'est manifestement pas monogène, mais tout élément peut s'écrire à l'aide des éléments a_1 et a_2 comme suit :

$a_0 = a_1^2, a_1 = a_1, a_2 = a_2, a_3 = a_1 \top a_2.$

De façon générale on pose :

Déf. 9 : Un groupe $(G, \top)$ est dit *de type fini* de famille génératrice $\{x_1, \ldots, x_r\}$ lorsque

$G = \{x_{k_1}^{z_1} \top \ldots \top x_{k_r}^{z_r} \mid z_i \in \mathbb{Z} \wedge x_{k_i} \in \{x_1, \ldots, x_r\}\}.$

Une telle représentation d'un élément d'un groupe de type fini n'est pas unique (dans l'ex. ci-dessus : $a_0 = a_1^2 = a_2^2$). Dans de nombreux cas on peut cependant obtenir l'unicité en imposant une convention supplémentaire. Dans l'ex. ci-dessus,

$a_0 = a_0 \top a_0, a_1 = a_1 \top a_0, a_2 = a_0 \top a_2, a_3 = a_1 \top a_2$

sont représentés de manière unique, lorsque l'on impose le choix de la première composante dans le sous-groupe $\{a_0, a_1\}$, et celui de la deuxième dans le sous-groupe $\{a_0, a_2\}$.

Déf. 10 : Un groupe commutatif $(G, \top)$ est le *produit direct* des sous-groupes $U_1, \ldots, U_k$ lorsque tout $x \in G$ s'écrit de manière unique

$x = x_1 \top \ldots \top x_k$ ($x_i \in U_i$).

Th. fondamental : *Un groupe abélien de type fini est le produit direct de k sous-groupes monogènes finis* $U_1, \ldots, U_k$ *et l sous-groupes monogènes infinis* $U'_1, \ldots, U'_l$ *avec* $\operatorname{ord} U_i \mid \operatorname{ord} U_{i+1}$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

(Dans le cas $l = 0$ (resp. $k = 0$) le produit direct ne comporte que des sous-groupes finis (resp. infinis).)

Pour les groupes commutatifs finis, on a $l = 0$, et de plus : $\operatorname{ord} U_1 \cdot \operatorname{ord} U_2 \cdot \ldots \cdot \operatorname{ord} U_k = \operatorname{ord} G$.

Le théorème fondamental permet ainsi de déterminer le nombre de groupes commutatifs d'ordre donné (tab. C, D).

$S_3 := \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$
(voir p. 72 fig. A_1 et p. 75)

S_3 est résoluble grâce à la chaîne

$S_3 \supseteq U_1 = \{a_0, a_1, a_2\} \supseteq U_0 = \{a_0\}$,

Alors :

(1) U_1 est un sous-groupe distingué de S_3 et U_0 est un sous-groupe distingué de U_1,

(2) $U_1/\{a_0\}$ est comm., et comme U_1 est comm.,

$S_3/U_1 = \{\{a_0, a_1, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}\}$

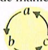
A est comm. en tant que groupe de deux éléments.

Résolubilité du groupe symétrique S_3

Les permutations de la forme

$$\begin{pmatrix} \ldots a \ldots b \ldots c \ldots \\ \ldots b \ldots c \ldots a \ldots \end{pmatrix}$$

s'appellent 3-*cycles*, elles envoient tout autre élément que a, b et c sur lui-même et l'ensemble $\{a, b, c\}$ de manière « cyclique » de la façon suivante :



forme abrégée (abc)

Exemple : $\begin{pmatrix} 1234567 \\ 1532467 \end{pmatrix} = (254)$

B

3-cycles

$H \xrightarrow{f} \widehat{G}$, i, g, G

Soit $\widehat{G}$ un groupe comm. et $f : H \to \widehat{G}$ un homomorphisme injectif (plongement de H dans $\widehat{G}$)

S'il existe un hom. de groupes $g : G \to \widehat{G}$ tel que $g \circ i = f$, on doit nécessairement avoir :

$$g(\llbracket(x, x')\rrbracket) = g(i(x) \top^* i(x')^{-1}) = g(i(x)) \hat{\top} g(i(x')^{-1})$$
$$= g \circ i(x) \hat{\top} g(i(x'))^{-1}$$
$$= g \circ i(x) \hat{\top} (g \circ i(x'))^{-1} = f(x) \hat{\top} f(x')^{-1}.$$

$i : H \to G$ déf. par $h \mapsto \llbracket(a \top h, a)\rrbracket$ avec $\llbracket(x, x')\rrbracket = i(x) \top^* i(x')^{-1}$

$g : G \to \widehat{G}$ déf. par $\llbracket(x, x')\rrbracket \mapsto f(x) \hat{\top} f(x')^{-1}$ est effectivement un hom. de groupes vérifiant $g \circ i = f$.

(a) f et i déf. sur H sont injectives $\Rightarrow \exists\,!\, g$ (injective) telle que $g \circ i = f$.

(b) La déf. donnée de g est indépendante du représentant choisi dans la classe, car
$\llbracket(x, x')\rrbracket = \llbracket(y, y')\rrbracket \Rightarrow x \top y' = y \top x' \Rightarrow f(x \top y') = f(y \top x') \Rightarrow f(x) \hat{\top} f(y') = f(y) \hat{\top} f(x') \Rightarrow f(x) \hat{\top} f(x')^{-1} = f(y) \hat{\top} f(y')^{-1} \Rightarrow g(\llbracket(x, x')\rrbracket) = g(\llbracket(y, y')\rrbracket)$.

(c) g est injective car on peut remonter tous les signes d'implication dans (b)

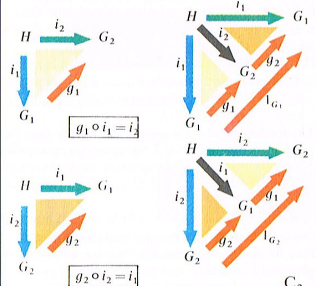
(d) g est un homomorphisme car

$$g(\llbracket(x, x')\rrbracket \top^* \llbracket(y, y')\rrbracket) = g(\llbracket(x \top y, x' \top y')\rrbracket) = f(x \top y) \hat{\top} f(x' \top y')^{-1} =$$
$$f(x) \hat{\top} f(y) \hat{\top} (f(x') \hat{\top} f(y'))^{-1} = f(x) \hat{\top} f(y) \hat{\top} f(y')^{-1} \hat{\top} f(x')^{-1} =$$
$$f(x) \hat{\top} f(x')^{-1} \hat{\top} f(y) \hat{\top} f(y')^{-1} = g(\llbracket(x, x')\rrbracket) \hat{\top} g(\llbracket(y, y')\rrbracket).$$

C_1

Pour tout plongement de H dans $\widehat{G}$ il existe donc un unique plongement de G dans $\widehat{G}$ tel que le diagramme d'applications ci-dessus soit comm.

Soit G_1 et G_2 deux extensions du demi-groupe H vérifiant les propriétés (1) à (3).



$H \xrightarrow{i_1} G_1$, i_2, i_1, G_2, g_2, g_1, 1_{G_1}, G_1

$H \xrightarrow{i_2} G_2$, i_1, i_2, G_1, g_1, g_2, 1_{G_2}, G_2

C_2

De $g_1 \circ i_1 = i_2$ et $g_2 \circ i_2 = i_1$ on obtient par substitution :

$(g_2 \circ g_1) \circ i_1 = i_1$, $\quad (g_1 \circ g_2) \circ i_2 = i_2$

$g_2 \circ g_1$ et $g_1 \circ g_2$ rendent les diagrammes ci-contre commutatifs. D'autre part les diagrammes, grâce à 1_{G_1} et 1_{G_2} sont commutatifs. Un argument d'unicité donne alors :

$$g_2 \circ g_1 = 1_{G_1}, \quad g_1 \circ g_2 = 1_{G_2}.$$

g_1 et g_2 sont alors des applications bijectives (p. 33). Il s'ensuit :

$G_1 \cong G_2$.

C_3

Propriété universelle

Groupes résolubles

La notion de groupe résoluble est d'une portée particulière pour l'application de la théorie de GALOIS à la résolution par radicaux des équations (p. 111).

Déf. 11 : Un groupe G est dit *résoluble* lorsqu'il existe une chaîne de sous-groupes
$G = U_k \supseteq U_{k-1} \supseteq \ldots \supseteq U_1 \supseteq U_0 = \{e\}$ $(k \in \mathbb{N})$,
vérifiant les propriétés :
(1) U_i est un sous-groupe distingué de U_{i+1},
(2) le groupe quotient U_{i+1} / U_i est commutatif $(i \in \{0, \ldots, k-1\})$.

Un groupe commutatif est toujours résoluble car $G \supseteq \{e\}$ et $G / \{e\}$ est commutatif. Les groupes symétriques S_3 (tab. A) et S_4 sont des exemples de groupes non commutatifs résolubles. On a par contre le

Th. 7 : *Pour $n \geq 5$, le groupe symétrique S_n n'est pas résoluble.*

La *preuve* de ce théorème est obtenue indirectement. On suppose, pour $n \geq 5$, que S_n est résoluble, c.-à-d. qu'il existe une chaîne de sous-groupes conforme à la déf. 11, avec $U_k = S_n$.

En notant D l'ensemble de tous les 3-*cycles* (fig. B) de S_n, on montre :

$$D \subseteq U_{i+1} \Rightarrow D \subseteq U_i.$$

Il s'ensuit immédiatement la contradiction $D \subseteq U_0 = \{e\}$, car de $D \subseteq S_n = U_k$ vient $D \subseteq U_{k-1}$, d'où $D \subseteq U_{k-2}$, et finalement par un nombre fini d'itérations $D \subseteq \{e\}$.

Pour prouver l'implication ci-dessus, on prend arbitrairement $\sigma = (abc) \in D$ et on écrit, avec $\tau = (axb) \in D$, $\rho = (bcy) \in D$ $(x \neq y, x, y \notin \{a, b, c\})$:

$$\sigma = \rho \cdot \tau \cdot \rho^{-1} \cdot \tau^{-1}.$$

De $D \subseteq U_{i+1}$ on déduit dans le groupe quotient commutatif U_{i+1} / U_i : $\llbracket\sigma\rrbracket = \llbracket e\rrbracket$, c.-à-d. $\sigma \in e\, U_i = U_i$.

Extension d'un demi-groupe

La construction du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ à partir du demi-groupe $(\mathbb{N}, +)$ représente un exemple important d'extension de structure (p. 55). Les caractéristiques essentielles d'un procédé d'extension sont :

(1) L'extension possède une structure de groupe.

(2) Le demi-groupe peut être plongé dans l'extension à l'aide d'un homomorphisme injectif, c.-à-d. que l'extension « prolonge » le demi-groupe.

(3) Dans tout groupe dans lequel on peut plonger le demi-groupe, on peut également plonger l'extension, et cela d'une manière unique : le diagramme d'applications correspondant est commutatif (*propriété universelle du plongement*).

Le procédé d'extension peut être appliqué aux demi-groupes commutatifs dans lesquels on a la *règle de simplification* :

$\forall a, \forall b, a \top x = b \top x \Rightarrow a = b$. On a :

Th. 8 : *Soit $(H, \top)$ un demi-groupe commutatif dans lequel la règle de simplification est vérifiée. Soit la relation binaire $\mathfrak{R} \subseteq H^2 \times H^2$ définie par $(x, x')\, \mathfrak{R}\, (y, y') :\Leftrightarrow x \top y' = y \top x'$. Alors on a :*
(a) $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
(b) $G := H \times H / \mathfrak{R}$ muni de la l.c.i. $\top^*$ définie par $\llbracket(x, x')\rrbracket \top^* \llbracket(y, y')\rrbracket := \llbracket(x \top y, x' \top y')\rrbracket$ est un groupe commutatif.
(c) L'application $i : H \to G$ définie par $h \mapsto i(h) = \llbracket(a \top h, a)\rrbracket$ est un homomorphisme injectif tel que pour tout $\llbracket(x, x')\rrbracket \in G$ on a :

$$\llbracket(x, x')\rrbracket = i(x) \top i(x')^{-1}.$$

Démonstration : (a) On laisse au lecteur le soin de prouver que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence (pour la transitivité on utilise la commutativité de la loi et la règle de simplification).

(b) Les classes d'équivalence modulo $\mathfrak{R}$,
$\llbracket(x, x')\rrbracket := \{(u, u') \mid x \top u' = u \top x'\}$ forment une partition de $H \times H$. On définit une l.c.i. $\top^*$ sur l'ensemble quotient $G := H \times H / \mathfrak{R}$ par :

$$\llbracket(x, x')\rrbracket \top^* \llbracket(y, y')\rrbracket := \llbracket(x \top y, x' \top y')\rrbracket.$$

Cette définition est indépendante du choix des représentants des classes.

Comme la loi est commutative et associative dans H et comme la déf. de $\top^*$ résulte d'une loi produit, on obtient la commutativité et l'associativité dans G.

L'élément neutre de G est la classe
$\llbracket(a, a)\rrbracket := \{(x, x) \mid x \in H\}$, car
$\llbracket(x, x')\rrbracket \top^* \llbracket(a, a)\rrbracket = \llbracket(x \top a, x' \top a)\rrbracket = \llbracket(x, x')\rrbracket$.

L'inverse de $\llbracket(x, x')\rrbracket$ est $\llbracket(x', x)\rrbracket$ car
$\llbracket(x, x')\rrbracket \top^* \llbracket(x', x)\rrbracket := \llbracket(x \top x', x' \top x)\rrbracket$
$= \llbracket(x \top x', x \top x')\rrbracket = \llbracket(a, a)\rrbracket$.

G est donc un groupe commutatif.

(c) On plonge H dans G par l'application $i : H \to G$ définie par $h \mapsto i(h) = \llbracket(a \top h, a)\rrbracket$, car i est un homomorphisme injectif, comme on le vérifie facilement. Il s'ensuit pour tout élément $\llbracket(x, x')\rrbracket \in G$:
$\llbracket(x, x')\rrbracket = \llbracket(x \top x \top x', x' \top x \top x')\rrbracket$
$= \llbracket(x \top x, x)\rrbracket \top^* \llbracket(x', x' \top x')\rrbracket = i(x) \top^* i(x')^{-1}$.

Rem. : De (c) on déduit que tout élément de G admet une représentation à l'aide d'éléments de $i[H]$ et possède un inverse. G est donc le plus petit groupe prolongeant $i[H]$.

La construction de l'extension suivant le th. 8 satisfait aux propriétés (1) et (2). On trouve la preuve de la propriété universelle (3) au tab. C_1.

On obtient comme conséquence de la propriété universelle le théorème suivant :

Th. 9 : *Toute extension possédant les propriétés* (1) *à* (3) *est isomorphe à l'extension obtenue dans le th.* 8.

Pour la *preuve* du th. 9, on suppose l'existence de deux extensions G_1 et G_2 de H vérifiant les propriétés (1) à (3). On note i_1 (resp. i_2) le plongement correspondant de H dans G_1 (resp. G_2). De (3) on déduit qu'il existe un unique plongement g_1 (resp. g_2) de G_1 dans G_2 (resp. de G_2 dans G_1) rendant commutatifs les diagrammes correspondants de la fig. C_2. Si l'on combine les diagrammes selon le tab. C_3, on montre que g_1 et g_2 sont bijectifs.

G_1 et G_2 sont donc des groupes isomorphes.

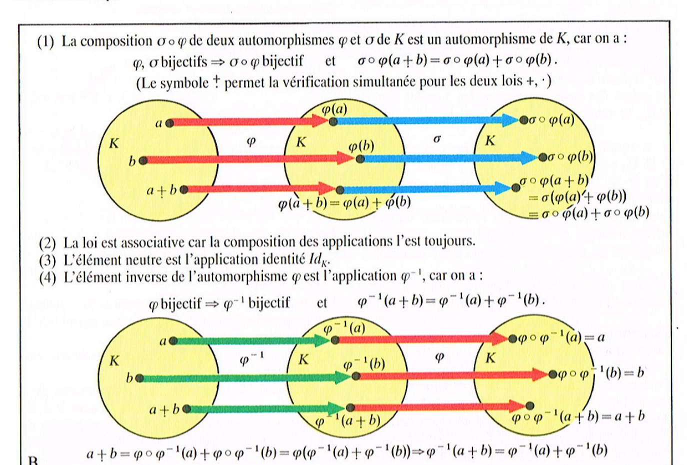
Rem. : Le groupe $H \times H / \mathfrak{R}$, obtenu par un procédé de construction particulier, est donc, à un isomorphisme près, la seule solution au problème d'extension.

Exemples :

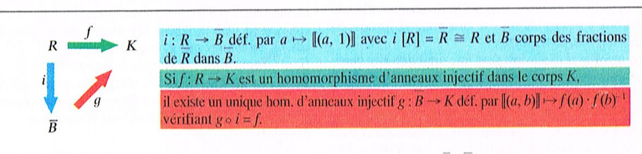
Demi-groupes commutatifs vérifiant la règle de simplification	Groupe obtenu par extension
$(\mathbb{N}, +)$	$(\mathbb{Z}, +)$
$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$	$(\mathbb{Q}^*_+, \cdot)$
$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$	$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
$(\mathbb{Q}^+, +)$	$(\mathbb{Q}, +)$

anneaux comm. unitaires
anneaux intègres
anneaux unitaires
corps commutatif
anneaux comm.
anneaux
A

Anneaux et corps



Le groupe Aut (K, K) des automorphismes de K



On vérifie par un calcul que g est bien un hom. d'anneaux injectif. Si $\bar{g} : \overline{B} \to K$ était aussi un hom. d'anneaux injectif vérifiant $\bar{g} \circ i = f$, on aurait $\bar{g} \circ i = g \circ i : \bar{g} \,|\, \overline{R} = g \,|\, \overline{R}$. Comme $\overline{B}$ est le corps des fractions de $\overline{R}$ dans $\overline{B}$, on peut écrire $[\![(a, b)]\!]$ sous la forme $[\![(a, 1)]\!] \cdot [\![(b, 1)]\!]^{-1}$. On en déduit que $\bar{g} = g$.
$\overline{B}$ est isomorphe au corps des fractions de $f\,[R]$ dans K, et est parfaitement déterminé à un isomorphisme près.
C

Corps des quotients

On renvoie à la p. 41 pour les définitions des notions d'anneau, d'anneau commutatif, d'anneau unitaire, d'anneau intègre et de corps (fig. A).

Sous-structures

Comme pour les groupes les sous-stuctures sont importantes.

Déf. 1 : On appelle *sous-anneau* (resp. *sous-corps*) d'un anneau R (resp. d'un corps K) toute partie non vide de R (resp. de K) qui, munie des mêmes lois, a une structure d'anneau (resp. de corps). R (resp. K) devient alors un *sur-anneau* (resp. *sur-corps*).

Ex. : L'ensemble $n\,\mathbb{Z} := \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ $(n \in \mathbb{N})$ est un sous-anneau de $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Th. 1 : *U est un sous-anneau d'un anneau R si, et seulement si,* $U \neq \emptyset$ *et*
$\forall a, \forall b, (a \in U \wedge b \in U \Rightarrow a + (-b) \in U \wedge ab \in U)$.
Pour un anneau avec unité on exige en plus que $1 \in U$.
U est alors un sous-corps d'un corps K si, et seulement si, U est un sous-anneau et
$\forall a, \forall b, (a \in U \wedge b \in U \setminus \{0\} \Rightarrow ab^{-1} \in U)$.

On montre à l'aide du th. 1 que l'intersection de sous-corps d'un corps est un sous-corps.

Homomorphismes d'anneaux et de corps

De même que pour les homomorphismes de groupes (p. 73), on définit :

Déf. 2 : Soit $(R, +, \cdot)$ et $(S, +, \cdot)$ deux anneaux (resp. deux corps). Alors on appelle *homomorphisme d'anneaux* (resp. *de corps*) toute application $f : R \to S$ vérifiant pour tous $a, b \in R$:
$f(a + b) = f(a) + f(b)$ et $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.
Lorsque R et S sont des anneaux unitaires, on exige en outre : $f(1) = 1 \in S$.
Un homomorphisme d'anneaux (resp. de corps) bijectif s'appelle un *isomorphisme d'anneaux* (resp. *de corps*).

Tout homomorphisme d'anneaux (resp. de corps) f est un homomorphisme de groupes pour les structures de groupes additifs, et également un homomorphisme de groupes pour les structures de groupes multiplicatifs quand il s'agit de corps. De ce fait, l'image par f d'un anneau (resp. d'un corps) est toujours un sous-anneau (resp. un sous-corps).

Automorphismes

Les isomorphismes d'un corps sur lui-même sont d'une importance particulière.

Déf. 3 : Soit K un corps. Alors un isomorphisme de corps $\varphi : K \to K$ s'appelle *automorphisme* de K. L'ensemble des automorphismes de K sera noté Aut (K, K).

On montre facilement que Aut (K, K) muni de la composition des applications est un groupe (fig. B). À tout corps on peut donc associer un groupe. Cette propriété est utilisée dans la théorie de GALOIS (p. 107).
A partir de tout sous-ensemble non vide T de Aut (K, K) on peut construire un sous-corps particulier de K. Pour cela, on considère l'ensemble des éléments de K qui sont leur propre image par tout automorphisme de T. Alors
$F(T) := \{x \mid x \in K \wedge \forall \sigma, (\sigma \in T \Rightarrow \sigma(x) = x)\}$
est effectivement un sous-corps, nommé *corps fixe* de T.

Corps des fractions

Soit R un anneau intègre et K un corps tels que $R \subseteq K$. Alors le plus petit corps B contenant R et vérifiant $B \subseteq K$ est appelé *corps des fractions* de R dans K.
Pour $a, b \in R$ $(b \neq 0)$, b^{-1} et toutes les « fractions » ab^{-1} doivent appartenir à B. On montre facilement que

$$B = \{ab^{-1} \mid a \in R \wedge b \in R \wedge b \neq 0\}$$

est le corps des fractions cherché.

Ex. : $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.
Lorsque E est un corps, K un sous-corps de E, et $\alpha \in E$, alors $K(\alpha)$ (corps obtenu à partir de K par adjonction de α, p. 98) est le corps des fractions de $K[\alpha]$ (anneau des polynômes de α, p. 95) dans E.

Corps des quotients

La précédente construction d'un corps de fractions exige l'existence d'un sur-corps. Mais on peut se passer de cette condition et construire pour tout anneau intègre R un corps $\overline{B}$, nommé *corps des quotients* de R, possédant les propriétés suivantes :
(1) *Il existe un sous-anneau $\overline{R}$ de $\overline{B}$ isomorphe à R.*
(2) *$\overline{B}$ est le plus petit corps contenant $\overline{R}$, donc le corps des fractions de $\overline{R}$ dans $\overline{B}$.*
(3) *$\overline{B}$ est parfaitement déterminé à un isomorphisme près.*

Pour construire $\overline{B}$, on définit pour les couples $(a, b) \in R \times R \setminus \{0\}$ la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$:

$$(a_1, b_1)\,\mathfrak{R}\,(a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

Sur $\overline{B} := R \times R \setminus \{0\} \,/\, \mathfrak{R}$, on définit les l.c.i. :
$[\![(a, b)]\!] + [\![(c, d)]\!] := [\![(ad + bc, bd)]\!]$,
$[\![(a, b)]\!] \cdot [\![(c, d)]\!] := [\![(ac, bd)]\!]$
(règles analogues à celles du calcul sur les « fractions numériques » : (a, b) correspondant à la fraction $\frac{a}{b}$, (c, d) à $\frac{c}{d}$), et on montre que les lois sont indépendantes des représentants choisis. Par un calcul il s'ensuit que $(\overline{B}, +, \cdot)$ est un corps (voir p. 57).
On doit encore vérifier les propriétés (1) à (3).
(1) La partie $\overline{R} := \{[\![(a, 1)]\!] \mid a \in R\}$ est un anneau intègre contenu dans $\overline{B}$ et isomorphe à R par l'application $i : R \to \overline{B}$ déf. par $a \mapsto [\![(a, 1)]\!]$.
(2) $\overline{B}$ est le corps des fractions de $\overline{R}$ dans $\overline{B}$, car, comme $[\![(b, 1)]\!]^{-1} = [\![(1, b)]\!]$ $(b \neq 0)$, on a :
$\{[\![(a, 1)]\!] \cdot [\![(b, 1)]\!]^{-1} \mid a \in R \wedge b \in R \wedge b \neq 0\}$
$= \{[\![(a, b)]\!] \mid a \in R \wedge b \in R \wedge b \neq 0\} = \overline{B}$.
(3) Si K est un corps dans lequel on peut plonger R par un homomorphisme d'anneaux injectif $f : R \to K$, alors on peut aussi plonger $\overline{B}$ dans K par l'homomorphisme d'anneaux $g : \overline{B} \to K$ déf. par :

$$[\![(a, b)]\!] \mapsto f(a) \cdot f(b)^{-1}.$$

g est déterminée de manière unique grâce à la propriété $g \circ i = f$ (fig. C). $\overline{B}$ est par conséquent l'unique corps des quotients de R à un isomorphisme près.

Rem. : Lorsque K est un corps contenant R, $\overline{B}$ est toujours isomorphe au corps des fractions de R dans K.

Ex. : $\mathbb{Q}$ peut être construit comme le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ (p. 57). Lorsque R est un anneau intègre, l'anneau des polynômes $R[X]$ l'est aussi (voir p. 95). On peut alors construire le corps des fractions de $R[X]$:

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in R[X] \wedge g(x) \neq 0 \right\}.$$

Soit $f: R \to S$ un homomorphisme d'anneaux.

$\mathrm{Ker}\, f := \{x \mid x \in R \wedge f(x) = 0\}$ est un idéal bilatère de R ; on peut donc former l'anneau quotient $R/\mathrm{Ker}\, f$ grâce à l'appl. canonique $k: R \to R/\mathrm{Ker}\, f$ qui est un hom. d'anneaux.

Alors $g: R/\mathrm{Ker}\, f \to S$ déf. par $[\![x]\!] \mapsto f(x)$ est un hom. d'anneaux injectif vérifiant $g \circ k = f$, c.-à-d.

$$g\,[R/\mathrm{Ker}\, f] = f\,[R] \quad \text{et donc} \quad R/\mathrm{Ker}\, f \cong f\,[R].$$

$\mathrm{Ker}\, f$ est un idéal bilatère puisque c'est un sous-groupe de $(R, +)$ et que l'on a $R \cdot \mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f$ car $\forall x\ \forall r$ $(x \in \mathrm{Ker}\, f \wedge r \in R \Rightarrow f(rx) = f(r)\, f(x) = 0)$, et qu'il en est de même pour $\mathrm{Ker}\, f \cdot R$.

g, comme f, est aussi un hom. d'anneaux. Par définition, g vérifie $g \circ k = f$; g est inj. car $f(x) = f(y)$ $\Rightarrow f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow x \in y + \mathrm{Ker}\, f = [\![y]\!] \Rightarrow [\![x]\!] = [\![y]\!]$.

A

Théorème d'homomorphie pour les anneaux

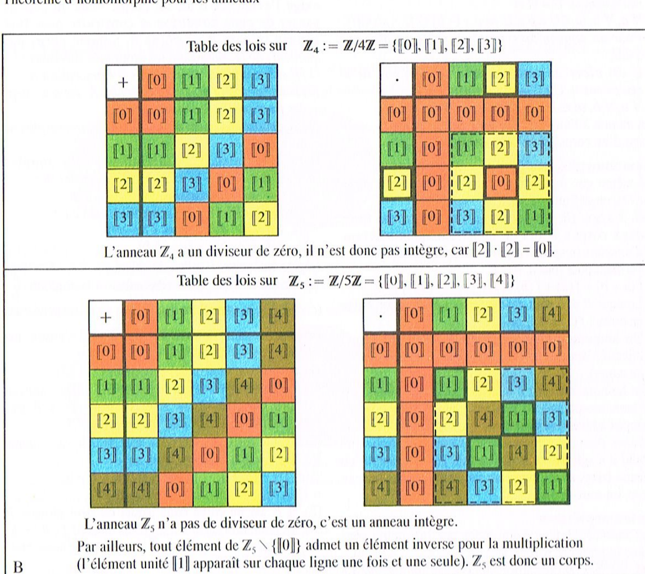


Table des lois sur $\mathbb{Z}_4 := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{[\![0]\!], [\![1]\!], [\![2]\!], [\![3]\!]\}$

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

·	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

L'anneau $\mathbb{Z}_4$ a un diviseur de zéro, il n'est donc pas intègre, car $[\![2]\!] \cdot [\![2]\!] = [\![0]\!]$.

Table des lois sur $\mathbb{Z}_5 := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{[\![0]\!], [\![1]\!], [\![2]\!], [\![3]\!], [\![4]\!]\}$

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

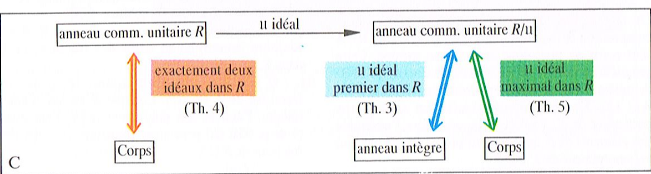
·	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

L'anneau $\mathbb{Z}_5$ n'a pas de diviseur de zéro, c'est un anneau intègre.

Par ailleurs, tout élément de $\mathbb{Z}_5 \setminus \{[\![0]\!]\}$ admet un élément inverse pour la multiplication (l'élément unité $[\![1]\!]$ apparaît sur chaque ligne une fois et une seule). $\mathbb{Z}_5$ est donc un corps.

B

Exemples d'anneaux de classes de congruence (voir aussi p. 74)



Résumé

Anneau quotient, idéaux

On considère le groupe commutatif $(R, +)$ d'un anneau commutatif $(R, +, \cdot)$ et un sous-groupe $\mathfrak{u}$ de $(R, +)$: alors on peut former le groupe quotient commutatif $(R/\mathfrak{u}, +)$ grâce à l'application canonique $k: R \to R/\mathfrak{u}$ qui est un homomorphisme de groupes (p. 75, th. 4). Mais peut-on également définir sur $R/\mathfrak{u}$ une multiplication pour laquelle $R/\mathfrak{u}$ aurait une structure d'anneau et k serait un homomorphisme d'anneaux ? On pose :

Déf. 4 : $[\![x]\!] \cdot [\![y]\!] := [\![x \cdot y]\!]$, pour tous $[\![x]\!], [\![y]\!] \in R/\mathfrak{u}$.

La multiplication ainsi introduite est une l.c.i. sur $R/\mathfrak{u}$ si, et seulement si,
$\forall r, \forall u, (r \in R \wedge u \in \mathfrak{u} \Rightarrow r\,u \in \mathfrak{u})$, c.-à-d. $R\,\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}$ avec $R\,\mathfrak{u} := \{r\,u \mid r \in R \wedge u \in \mathfrak{u}\}$.

Cela suggère la définition suivante :

Déf. 5 : Soit $(R, +, \cdot)$ un anneau commutatif. Une partie $\mathfrak{u}$ de R s'appelle *idéal* de R lorsque $\mathfrak{u}$ est un sous-groupe de $(R, +)$ et vérifie $R\,\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}$.

Rem. : Dans les anneaux non commutatifs on distingue les idéaux *à gauche* ($R\,\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}$), *à droite* ($\mathfrak{u}\,R \subseteq \mathfrak{u}$) et *bilatères*. Un idéal est un sous-anneau particulier. Les seuls idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les sous-anneaux $n\,\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dans tout anneau, $\{0\}$ (*idéal nul* $\mathfrak{o}$) et l'anneau lui-même sont des idéaux.

On peut maintenant énoncer :

Th. 2 : *Soit $(R, +, \cdot)$ un anneau, $\mathfrak{u} \subseteq R$ un sous-groupe de $(R, +)$ et $(R/\mathfrak{u}, +)$ le groupe quotient associé, avec l'appl. canonique $k: R \to R/\mathfrak{u}$, homomorphisme de groupes. Alors $(R/\mathfrak{u}, +, \cdot)$, où · désigne la multiplication de la* déf. 4, *est un anneau, et k un homomorphisme d'anneaux, si, et seulement si, $\mathfrak{u}$ est un idéal bilatère.*

Déf. 6 : L'anneau $(R/\mathfrak{u}, +, \cdot)$ obtenu dans le th. 2 est appelé *anneau quotient* de R par $\mathfrak{u}$.

Rem. : Les idéaux bilatères dans les anneaux correspondent aux sous-groupes distingués dans les groupes. On peut aussi généraliser le *th. d'homomorphie* (p. 77) aux anneaux (fig. A).

Anneau des classes de congruence $\mathbb{Z}_n$

Pour l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, l'idéal $n\,\mathbb{Z}$ ($n \geq 1$) et les groupes de classes de congruence $(\mathbb{Z}_n, +)$ (p. 75) il résulte du th. 2 que $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ est un anneau fini, nommé *anneau des classes de congruence* mod. n. Certains anneaux de classes de congruence ont des diviseurs de zéro ($\mathbb{Z}_4$, fig. B) ; l'anneau $\mathbb{Z}_5$ est sans diviseurs de zéro et c'est un corps. On montre (voir th. 3 et 7) :

$\mathbb{Z}_n$ ($n \geq 2$) *anneau intègre* $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}_n$ *corps* $\Leftrightarrow$ *n premier.*

Caractérisation des anneaux intègres par les idéaux premiers

L'exemple $\mathbb{Z}_n$ suggère d'étudier le cas où l'anneau quotient $R/\mathfrak{u}$ d'un anneau R est un anneau intègre. R doit d'abord être un anneau commutatif unitaire. L'absence de diviseur de zéro dans $R/\mathfrak{u}$ donne :

$$([\![x \cdot y]\!] = 0 \Rightarrow [\![x]\!] = 0 \vee [\![y]\!] = 0)$$
$$\Leftrightarrow (xy \in \mathfrak{u} \Rightarrow x \in \mathfrak{u} \vee y \in \mathfrak{u}).$$

De là provient la définition :

Déf. 7 : Un idéal $\mathfrak{I} \neq R$ est dit *idéal premier* dans R lorsque : $\forall x, \forall y, (x\,y \in \mathfrak{I} \Rightarrow x \in \mathfrak{I} \vee y \in \mathfrak{I})$.

Rem. : L'appellation « idéal premier » provient de l'ex. de $\mathbb{Z}$: $n\,\mathbb{Z}$ *idéal premier* $\Leftrightarrow$ *n premier ou nul.*

Il découle maintenant de la déf. 7 le théorème suivant :

Th. 3 : *Soit R un anneau commutatif unitaire, et $\mathfrak{u}$ un idéal de R. Alors l'anneau quotient $R/\mathfrak{u}$ est un anneau intègre si, et seulement si, $\mathfrak{u}$ est un idéal premier.*

Rem. : Un anneau commutatif unitaire est un anneau intègre si, et seulement si, $\mathfrak{o}$ est un idéal premier (on considère que : $R/\mathfrak{o} \cong R$).

Ex. : $\mathbb{Z}_n$ anneau intègre $\Leftrightarrow$ n entier premier ($n \geq 2$).

Caractérisation des corps par les idéaux

À l'aide des idéaux, on peut indiquer à quelle condition un anneau commutatif unitaire est un corps. Étant donné un idéal $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{o}$ d'un corps commutatif K, il existe un $a \in \mathfrak{u}$ ($a \neq 0$), $a^{-1} \in K$ et $a\,a^{-1} = 1$, si bien que, comme $K\,\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}$, on a aussi $1 \in \mathfrak{u}$, c.-à-d. $\mathfrak{u} = K$. On montre pareillement l'existence d'un élément inverse dans un anneau commutatif unitaire R lorsque R possède exactement deux idéaux. On a :

Th. 4 : *Un anneau commutatif unitaire R est un corps si, et seulement si, R contient exactement deux idéaux* ($\mathfrak{o}$ *et* R).

À l'aide de ce théorème, on peut préciser les cas où l'anneau quotient $R/\mathfrak{u}$ est un corps ($\mathfrak{u} \neq R$).

Si R est un anneau commutatif unitaire, il en est de même pour $R/\mathfrak{u}$. Donc d'après le th. 4, $R/\mathfrak{u}$ est un corps si, et seulement si, $\mathfrak{o}$ et $R/\mathfrak{u} \neq \mathfrak{o}$ sont les seuls idéaux de $R/\mathfrak{u}$. Si $R/\mathfrak{u}$ est un corps et si $\mathfrak{v}$ est un idéal dans R, tel que $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{v} \subseteq R$, alors $k(\mathfrak{v})$ est un idéal $\neq \mathfrak{o}$ dans $R/\mathfrak{u}$, donc $k(\mathfrak{v}) = R/\mathfrak{u}$. Il existe $\alpha \in \mathfrak{v}$ tel que $k(\alpha) = [\![1]\!] \Rightarrow 1 = \alpha + x, x \in \mathfrak{u} \subset \mathfrak{v} \Rightarrow 1 \in \mathfrak{v}$ $\Rightarrow R1 \subseteq \mathfrak{v} \Rightarrow \mathfrak{v} = R$. Par suite $\mathfrak{u}$ est un idéal maximal (p. 43). Réciproquement si $\mathfrak{u}$ est un idéal maximal dans R, et si $\mathfrak{a}$ est un idéal $\neq \mathfrak{o}$ dans $R/\mathfrak{u}$, $k^{-1}(\mathfrak{a})$ est un idéal dans R tel que $k^{-1}(\mathfrak{a}) \supset \mathfrak{u}$, donc $k^{-1}(\mathfrak{a}) = R$ $\Rightarrow \mathfrak{a} \supseteq k(R) \Rightarrow \mathfrak{a} = R/\mathfrak{u}$. $R/\mathfrak{u}$ est un corps.

Th. 5 : *Soit R un anneau commutatif unitaire et $\mathfrak{u}$ un idéal de R. Alors $R/\mathfrak{u}$ est un corps si, et seulement si, $\mathfrak{u}$ est un idéal maximal.*

Rem. : Un anneau commutatif unitaire est donc un corps si, et seulement si, $\mathfrak{o}$ est un idéal maximal (voir th. 4).

Des théorèmes 3 et 5 on déduit :

Th. 6 : *Dans un anneau commutatif unitaire, tout idéal maximal est aussi premier.*

Ce théorème admet une réciproque dans les anneaux dits principaux (th. 7).

Idéaux et anneaux principaux

Dans un anneau commutatif unitaire R, l'ensemble $R\,a := \{r\,a \mid r \in R\}$ est pour tout $a \in R$ un idéal.

Déf. 8 : Soit R un anneau commutatif unitaire. Alors $(a) := R\,a$ s'appelle *idéal engendré par* $a \in R$. Un idéal $\mathfrak{u}$ est dit *principal* lorsque $\mathfrak{u} = (a)$ avec $a \in R$. R est dit *anneau principal* lorsque tous ses idéaux sont principaux.

Ex. : $\mathbb{Z}$ et l'anneau des polynômes $K[X]$ sur un corps K commutatif (p. 95) sont des anneaux principaux.

Th. 7 : *Soit R un anneau commutatif, unitaire, intègre, principal, et $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{o}$ un idéal de R. Alors $\mathfrak{u}$ est un idéal maximal si, et seulement si, $\mathfrak{u}$ est un idéal premier.*

Conséquence : Du théorème 5 on déduit :

$\mathbb{Z}_n$ ($n \geq 2$) *corps* $\Leftrightarrow$ *n entier premier*, resp.
$K[X]/\mathfrak{u}$ ($\mathfrak{u} \neq \mathfrak{o}$) *corps* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{u}$ *idéal premier.*

Soit $(M, +, \Omega, \cdot)$ un Ω-module. On a alors :

(1) $\circ \cdot x = 0, \alpha \cdot 0 = 0$ ($\circ$ élément nul de Ω, 0 élément neutre dans M)

(2) $\alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x) = (-\alpha) \cdot x$ (3) $(-\alpha) \cdot (-x) = \alpha \cdot x$

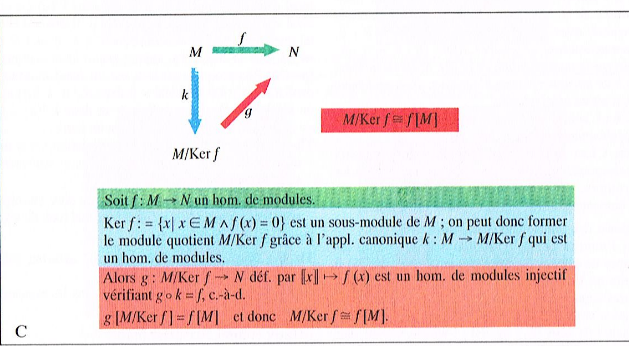
A

Règles de calcul dans les modules

Soit $(R, +, \cdot)$ un anneau unitaire	Soit $(G, \top)$ un groupe comm.
Alors $(R, +)$ est un groupe comm. et la loi mult. « · » est une l.c.e. sur R avec R comme domaine d'opérateurs.	Alors on peut définir sur G une l.c.e. « · » avec $\mathbb{Z}$ comme domaine d'opérateurs par : $z \cdot x := \begin{cases} x \top \ldots \top x & (z \text{ fois}) \text{ pour } z \in \mathbb{Z}_+^* \\ e & \text{pour } z = 0 \\ x^{-1} \top \ldots \top x^{-1} & (\lvert z \rvert \text{ fois}) \text{ pour } z \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}$
Tout anneau unitaire peut être considéré comme un module sur lui-même.	Tout groupe comm. peut être considéré comme module sur $\mathbb{Z}$.
Les *sous-modules* de R sont d'après le th. 1 les *idéaux* à gauche de R.	Les *sous-modules* de G sont d'après le th. 1 les *sous-groupes* de G.

B

Anneaux unitaires et groupes comm. en tant que modules



Théorème d'homomorphie pour les modules

I. Th. d'isomorphie : Soit U et V des sous-modules d'un Ω-module M. Alors :

$$U/U \cap V \cong UV/V$$

II. Th. d'isomorphie : Soit M_1 et M_2 des Ω-modules, U_1 et U_2 des sous-modules de M_1, resp. M_2. Alors si $f: M_1 \to M_2$ est un hom. de modules surjectif vérifiant $f^{-1}[U_2] = U_1$, on a :

$$M_1/U_1 \cong M_2/U_2$$

Si M est un Ω-module et si U_1 et U_2 sont des sous-modules de M, on a :

$$(M/U_1)/(U_2/U_1) \cong M/U_2$$

D

Théorèmes d'isomorphie pour les modules

La théorie des espaces vectoriels s'est développée à partir de l'étude des systèmes d'équations linéaires (p. 93). Une généralisation de cette théorie est la théorie des modules, car les espaces vectoriels sont des modules particuliers. La notion de module possède de très nombreuses applications.

Les définitions de « module », d'« espace vectoriel », et des exemples se trouvent en p. 41.

Rem. : Le tab. A contient trois règles de calcul importantes dans les modules. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on écrit αx pour la loi de composition externe (l.c.e.).

Sous-modules

Comme pour les sous-structures dans les groupes, les anneaux et les corps, on pose :

Déf. 1 : On appelle *sous-module* d'un Ω-module M toute partie non vide U de M ayant une structure d'Ω-module pour les mêmes lois de composition interne et externe.

Ex. : $\{0\}$ et M sont toujours des sous-modules.

Un sous-module est un sous-groupe de $(M, +)$. Mais un sous-groupe U n'est pas toujours un sous-module, car on montre facilement que la condition

$\forall \alpha, \forall a, (\alpha \in \Omega \wedge a \in U \Rightarrow \alpha a \in U)$ doit être remplie.

On a :

Th. 1 : *U est un sous-module de l'Ω-module* $(M, +, \Omega, \cdot)$ *si, et seulement si :*

(1) $(U, +)$ *est un sous-groupe, et*

(2) $\forall \alpha, \forall a, (\alpha \in \Omega \wedge a \in U \Rightarrow \alpha a \in U)$.

Du th. 1 on déduit que l'intersection $\bigcap_{i \in I} U_i$ et la somme $U_1 + \ldots + U_n := \{u_1 + \ldots + u_n \mid u_i \in U_i\}$ de sous-modules est un sous-module d'un Ω-module.

Rem. : La théorie des modules est en étroite relation avec les groupes commutatifs et les idéaux (tab. B).

Homomorphismes de modules

Les applications respectant les structures sont les homomorphismes de groupes (p. 73) qui sont compatibles avec la l.c.e. (même domaine d'opérateurs).

Déf. 2 : Soit M et N deux Ω-modules. Alors on appelle *homomorphisme de modules* toute application $f: M \to N$ vérifiant pour tous $a, b \in M$ et tout $\alpha \in \Omega$:

(1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$, (2) $f(\alpha a) = \alpha f(a)$.

Un homomorphisme de modules bijectif s'appelle un *isomorphisme de modules*.

Rem. : $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$ pour tous $a, b \in M$ et tous $\alpha, \beta \in \Omega$ est équivalent à $(1) \wedge (2)$.

Pour tout homomorphisme de modules $f: M \to N$, l'image $f[U]$ d'un sous-module U de M est un sous-module de N (donc aussi $f[M]$).

On définit comme pour les homomorphismes de groupes $\operatorname{Ker} f := \{x \mid x \in M \wedge f(x) = 0\}$, et l'on obtient ainsi un sous-module important de M (th. d'homomorphie, voir ci-dessous).

Module quotient

Étant donné un sous-module U d'un Ω-module M, on peut former le groupe quotient commutatif M / U (p. 75) car $(M, +)$ est commutatif et donc U est un sous-groupe distingué de M.

Déf. 3 : On définit par : $\alpha [\![x]\!] := [\![\alpha x]\!]$ pour tout $\alpha \in \Omega$ et tout $[\![x]\!] \in M / U$, une l.c.e. sur M / U, de sorte que M / U devient un Ω-module (indépendance du représentant choisi). L'application canonique $k: M \to M / U$ définie par $x \mapsto [\![x]\!]$ est donc un homomorphisme de modules ; d'où le théorème suivant :

Th. 2 : *Soit M un Ω-module et U un sous-module. Alors M / U muni de la l.c.e. de la déf. 3 est un Ω-module et l'application canonique est un homomorphisme de modules.*

Déf. 4 : L'Ω-module M / U du th. 2 s'appelle *module quotient* de M par U.

Rem. : Le *th. d'homomorphie* et les *th. d'isomorphie* pour les groupes (p. 77) sont également valables pour les modules (tab. C, D).

Produit direct de modules

À partir de $M_1, M_2, \ldots, M_n$, Ω-modules, on peut construire un nouvel Ω-module, le produit cartésien $\times_{i=1}^{n} M_i$, que l'on munit des lois-produits interne et externe venant des lois des M_i.

Déf. 5 : On définit pour tous $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in \times_{i=1}^{n} M_i$ et tout $\alpha \in \Omega$:

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,

$\alpha (x_1, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

L'Ω-module construit s'appelle *produit direct* de $M_1, \ldots, M_n$. Lorsque $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, le produit direct est noté M^n.

Ex. : Pour tout anneau unitaire R,

$R^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in R\}$ est un R-module.

Il est caractéristique du produit direct que les projections (p. 33) sont des homomorphismes de modules surjectifs.

Rem. : On peut généraliser le produit direct à des ensembles d'indices quelconques. Dans ce cas il apparaît un important sous-module, la *somme directe* formée des éléments $(x_i)_{i \in I}$ du produit direct $\times_{i \in I} M_i$ tels que $x_i = 0_{M_i}$ sauf pour un nombre fini d'indices i. Pour des ensembles finis d'indices, le produit direct et la somme directe concordent.

Le problème de savoir si l'on peut complètement décrire un module par la donnée de sous-modules appartient au champ d'application du produit direct.

Lorsque l'on forme le produit direct $\times_{i=1}^{n} U_i$ de n sous-modules U_i d'un Ω-module M, et que l'on met ce module en relation avec M par l'homomorphisme de modules $f: \times_{i=1}^{n} U_i \to M$ déf. par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \ldots + x_n$, l'image par f du produit direct est le sous-module $U_1 + \ldots + U_n$.

Si de plus f est un isomorphisme de modules, alors M est parfaitement décrit par la donnée des sous-modules utilisés. Les hypothèses nécessaires et suffisantes pour l'isomorphie sont données par le

Th. 3 : *Un Ω-module M est isomorphe au produit direct $\times_{i=1}^{n} U_i$ des sous-modules U_i si, et seulement si, tout $x \in M$ admet une et une seule représentation* $x = x_1 + \ldots + x_n$, $(x_i \in U_i)$.

L'isomorphie étant connue, on dit plus brièvement :

M est *le produit direct des sous-modules* $U_1, \ldots, U_n$ (voir p. 77 déf. 10).

Pour deux sous-modules il existe un critère simple : M est le produit direct de deux sous-modules U_1 et U_2 si, et seulement si, $M = U_1 + U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

M est un Ω-module.

(1) $L(T) = \bigcap_{T \subseteq U} U$ (U sous-module)

(2) $L\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) = U_1 + \ldots + U_n$ (U_i sous-module)

(3) $T_1 \subseteq T_2 \subseteq M \Rightarrow T_1 \subseteq L(T_1) \subseteq L(T_2) \subseteq L(M) = M$

(4) $L(L(T)) = L(T)$

A

Propriétés de l'opérateur de fermeture

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ peut être considéré comme module sur $\mathbb{Q}$ (voir p. 84 tab. B).

(a) $\{1\}$ est un système gén. de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$, car pour $a \in \mathbb{Q}$ ou a : $a = a \cdot 1$.
(b) $\{1\}$ est libre sur $\mathbb{Q}$, car $a \cdot 1 = 0 \Rightarrow a = 0$.

Le $\mathbb{Q}$-module $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est libre.

Soit $(R, +, \cdot)$ un anneau unitaire. Alors R^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) est un R-module comme produit direct (voir p. 85).

(a) $E := \{1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$ est un système gén. de R^n sur R, car pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ on a :
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot (1, 0, \ldots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n \cdot (0, \ldots, 0, 1)$.
(b) E est libre sur R, car si
$a_1 \cdot (1, 0, \ldots, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + a_n \cdot (0, \ldots, 0, 1) = (0, \ldots, 0)$,
on a alors : $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$, c.-à-d. $a_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Le R-module R^n est libre.

$(\mathbb{Q}, +)$ peut être considéré comme $\mathbb{Z}$-module (voir p. 84 tab. B).

(a) Toute partie de $\mathbb{Q}$ qui contient 0 est liée sur $\mathbb{Z}$ car $1 \cdot 0 + 0 \cdot a + 0 \cdot b + \ldots = 0$, sans que tous les coefficients soient nuls.
(b) Toute paire $\{a, b\} \subset \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ est liée sur $\mathbb{Z}$, car en posant $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{r}{s}$ ($p, q, r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) et $n = r \cdot q$, $m = -s \cdot p$ on obtient :
$n \cdot a + m \cdot b = 0$ avec n et m non nuls tous les deux.
Toute partie de $\mathbb{Q}$ de plus d'un él. est liée sur $\mathbb{Z}$.
(c) Tout singleton $\{a\} \subset \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ est libre sur $\mathbb{Z}$, car $n \cdot a = 0 \Rightarrow n = 0$ ($n \in \mathbb{Z}$).
(d) Cependant un singleton de $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ n'est pas un système gén. de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Z}$, car si $a = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), alors par exemple
$\frac{p}{2q} \notin \{n \cdot a \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Le $\mathbb{Z}$-module $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas libre.

B

Exemples de modules libres et non libres

Soit V un espace vectoriel de dim. finie sur K, U un sous-espace vectoriel de V et V/U l'espace quotient correspondant. Alors on a :

(1) U est de dim. finie et $\dim(U/K) \leq \dim(V/K)$

(2) $\dim(U/K) = \dim(V/K) \Rightarrow U = V$

(3) V/U est de dim. finie et $\dim(V/U/K) = \dim(V/K) - \dim(U/K)$

C

Propriétés des espaces vectoriels de dimension finie

Fermeture linéaire, partie génératrice

Lorsque T est une partie non vide d'un Ω-module M, on peut former dans M des expressions de la forme $\sum_{x \in T} \alpha_x x$, où le nombre des α_x ($\in \Omega$) non nuls est fini (on choisit T comme ensemble d'indices, de telle sorte que tous les éléments de T peuvent intervenir, mais en convenant que la somme porte sur un nombre fini de termes $\neq 0$). Ces expressions sont appelées *combinaisons linéaires* d'éléments de T. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de T est un sous-module de M, le plus petit contenant T. Il est appelé *fermeture linéaire* de T, et est noté $L(T)$; L est appelé *opérateur de fermeture* et T est un ensemble de générateurs, ou *partie génératrice*, de $L(T)$. Le tab. A donne les propriétés de L.

Rem. : $L(T)$ est aussi appelé *sous-module engendré par* T, et on définit $L(\emptyset) := \{0\}$.
Comme $L(T)$ est toujours un sous-module de M, on cherche à savoir s'il existe un $T \subsetneq M$ tel que $L(T) = M$.

Déf. 6 : Soit M un Ω-module. On appelle *partie génératrice* (part. gén.) de M sur Ω toute partie E vérifiant $L(E) = M$.

Comme $L(M) = M$, tout module admet une part. gén. Cependant les part. gén. intéressantes sont celles qui sont des sous-ensembles strictes, voire finis. Dans ce dernier cas le module est dit « *de type fini* ».

Ex. : $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$ est une part. gén. finie du R-module R^n.

Si tout $x \in M$ peut être représenté par une combinaison linéaire d'éléments d'un ensemble E de générateurs, cette représentation n'est cependant pas toujours unique. La recherche d'une représentation unique conduit à la notion suivante.

Indépendance linéaire, base

On a l'unicité de la représentation par une part. gén. E si, et seulement si, $\sum_{x \in E} \alpha_x x = 0$ implique toujours $\alpha_x = 0$ pour tout x.

Déf. 7 : Une partie T d'un Ω-module M est dite *libre* sur Ω si, et seulement si, $\sum_{x \in T} \alpha_x x = 0$ implique $\alpha_x = 0$ pour tout x. Les éléments de T sont alors dits *linéairement indépendants sur* Ω.

Si T n'est pas libre sur Ω, T est *liée* sur Ω, et les éléments de T sont dits *linéairement dépendants* sur Ω.

Rem. : $\emptyset$ est par définition libre.

Dans la recherche des parties libres on peut se limiter aux ensembles finis, car on a :

T est libre si, et seulement si, toute partie finie de T est libre.

On remarque encore que dans tout Ω-module, il existe une partie libre maximale au sens de l'inclusion (application du lemme de Zorn, p. 45).

Une telle partie libre maximale assure l'unicité de la représentation de tout élément de l'Ω-module.

Déf. 8 : Soit M un Ω-module. Une partie libre génératrice de M sur Ω est appelé *base* de M. Un module dans lequel il existe une base est dit *module libre*.

Ex. : $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{Q}$-module libre, de même que tout R-module R^n avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (tab. B). Par contre $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre (tab. B).

La qualité de module libre s'éclaire par le théorème :

Th. 4 : *Soit M un Ω-module libre de base B et N un Ω-module quelconque. Pour toute application $f : B \to N$ définie sur B, il existe un unique homomorphisme de modules $f^* : M \to N$ coïncidant avec f sur B, défini par :*
$x = \sum_{b \in B} \alpha_b b \mapsto \sum_{b \in B} \alpha_b f(b)$, *et appelé prolongement linéaire de f.*

Espaces vectoriels

On considère ici des modules particuliers, ceux sur un corps K, appelés *espaces vectoriels sur K*. On peut montrer qu'il existe toujours une base dans un tel module. L'essentiel réside dans le fait que maintenant les inverses pour la multiplication existent dans le domaine d'opérateurs. On montre que toute partie libre maximale est une base.

Th. 5 : *Tout espace vectoriel V sur un corps K possède une base.*

Rem. : Un espace vectoriel peut parfaitement posséder différentes bases.

Pour construire une base, on choisit une partie libre d'une partie génératrice E ($\emptyset$ éventuellement) et on complète successivement cet ensemble par des éléments de E en une partie libre, jusqu'à l'obtention d'une partie libre maximale. Ce procédé provient du :

Th. 6 (th. de la base incomplète) : *Soit V un espace vectoriel sur un corps K, E une partie génératrice de V et A une partie libre de E. Alors on peut compléter A en une base B de V avec $A \subseteq B \subseteq E$.*

Rem. : Dans les espaces vectoriels il est d'usage de parler de *sous-espaces* et d'*espaces quotients* plutôt que de sous-modules et de modules quotients. Les homomorphismes d'espaces vectoriels sont dits aussi *applications linéaires* (p. 89). On appelle *vecteurs* les éléments d'un espace vectoriel, et on les note selon le cas $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, .. ou $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}$, .. (géométrie analytique).

Espaces vectoriels de dimension finie

Déf. 9 : Un espace vectoriel possédant une base finie est dit de *dimension finie* (dim. finie).

Dans un espace vectoriel de dim. finie V, le nombre d'éléments d'une base est une valeur caractéristique, car ce nombre est le même pour toutes les bases de V.

Déf. 10 : Le nombre des éléments d'une base d'un espace vectoriel de dim. finie V sur un corps K s'appelle la *dimension* de V sur K (notation : $\dim(V/K)$).

Ex. : Pour tout corps K, K^n est un espace vectoriel sur K de dimension n (voir tab. B).

Grâce aux espaces vectoriels K^n, tous les espaces vectoriels de dimension finie sur K sont connus à un isomorphisme près, car on a le théorème suivant :

Th. 8 : *Deux espaces vectoriels de dim. finie sur K sont isomorphes si, et seulement si, leurs dimensions sont égales, c.-à-d. que K^n est, à un isomorphisme près, le seul espace vectoriel de dimension n sur K.*

Ex. : $\mathbb{R}^3$ (p. 191) est, à un isomorphisme près, le seul espace vectoriel de dim. 3 sur $\mathbb{R}$.

Rem. : Le tab. C donne des propriétés des espaces vectoriels de dimension finie.

$f(b_1) = \alpha_{11}\hat{b}_1 + \alpha_{21}\hat{b}_2 + \ldots + \alpha_{n1}\hat{b}_n$
$f(b_2) = \alpha_{12}\hat{b}_1 + \alpha_{22}\hat{b}_2 + \ldots + \alpha_{n2}\hat{b}_n$
$f(b_m) = \alpha_{1m}\hat{b}_1 + \alpha_{2m}\hat{b}_2 + \ldots + \alpha_{nm}\hat{b}_n$

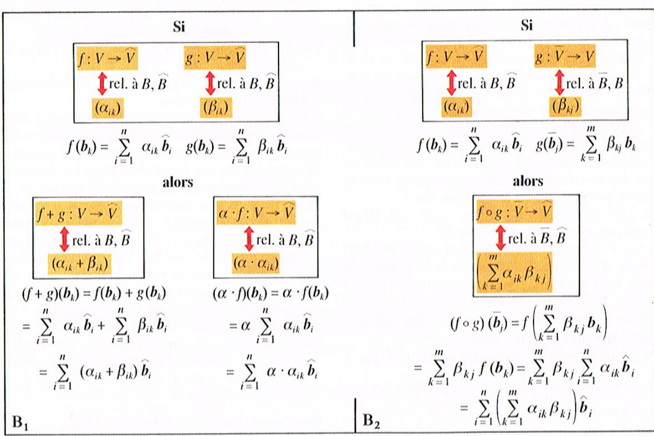
relativement à $B, \hat{B}$

(α_{ik})

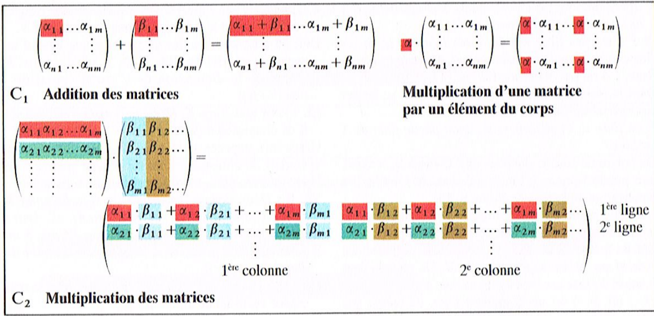
$(\alpha_{ik}) := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ & & \alpha_{ik} & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$ $i^{\text{ème}}$ ligne, $k^{\text{ème}}$ colonne

A

Application linéaire et matrice



Opérations sur les applications linéaires, composition des applications linéaires



Opérations sur les matrices

Applications linéaires

Au lieu d'homomorphismes de modules (déf. 2, p. 85), on parle dans les espaces vectoriels d'*applications linéaires.* Le théorème d'homomorphie et les théorèmes d'isomorphie (p. 84) sont formulés de manière analogue. Comme tout espace vectoriel possède une base (th. 5, p. 87), les applications linéaires sont toujours parfaitement déterminées par la donnée des images des éléments d'une base (th. 4, p. 87). Dans les espaces vectoriels de dimension finie, il résulte de cette propriété une étroite relation entre les applications linéaires et les matrices.

Applications linéaires dans les espaces vectoriels de dimension finie et matrices

Soit V et V' deux espaces vectoriels sur K de dimensions finies m et n resp., de bases $B := \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ et $B' := \{\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_n\}$ resp. Alors pour m éléments non nécessairement distincts $\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_m$ de V', il existe une application linéaire unique $f: V \to V'$ vérifiant $f(\boldsymbol{b}_k) = \boldsymbol{x}'_k$ ($k \in \{1, \ldots, m\}$). Comme les $\boldsymbol{x}'_k$ de V' possèdent sur B' une représentation unique

$\boldsymbol{x}'_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\boldsymbol{b}'_i$, on obtient : $\forall k\, f(\boldsymbol{b}_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\boldsymbol{b}'_i$.

Toute application linéaire est donc parfaitement déterminée relativement aux bases B et B' par un système d'éléments du corps, non nécessairement distincts, α_{ik} ($i \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$). De façon appropriée, on note le système des α_{ik} sous forme d'une matrice (fig. A).

Déf. 11 : Soit K un corps et α_{ik} ($i \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$) des éléments de K non nécessairement distincts. Alors $(\alpha_{ik}) := \begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \cdots, \alpha_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1}, & \cdots, \alpha_{nm} \end{pmatrix}$ (fig. A)
est appelé *matrice* sur K de type (n, m) (plus brièvement (n, m)-matrice sur K). i s'appelle indice de ligne, k indice de colonne. n donne le nombre des lignes, m celui des colonnes.

Comme à toute (n, m)-matrice on peut de même associer une application linéaire $f: V \to V'$, on a :

Th. 9 : *Soit V et V' deux espaces vectoriels sur K de dimensions finies m et n resp., de bases B et B' resp., alors à toute application linéaire $f: V \to V'$ on peut associer de manière bijective une (n, m)-matrice sur K, relativement aux bases B et B'.*

En désignant par $\mathfrak{L}(V, V')$ l'ensemble de toutes les applications linéaires $f: V \to V'$, et par $M_{n,m}(K)$ l'ensemble de toutes les (n, m)-matrices sur K, alors d'après le th. 9 il existe une application bijective l : $\mathfrak{L}(V, V') \to M_{n,m}(K)$.

Les espaces vectoriels $\mathfrak{L}(V, V')$ et $M_{n,m}(K)$

On peut définir sur $\mathfrak{L}(V, V')$ une l.c.i. et une l.c.e. par :
$f + g: V \to V'$ déf. par $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$,
et $\alpha \cdot f: V \to V'$ déf. par $\boldsymbol{x} \mapsto \alpha \cdot f(\boldsymbol{x})$.

$\mathfrak{L}(V, V')$ muni de ces lois est un espace vectoriel sur K. Par le th. 9 on peut associer des matrices aux applications linéaires $f + g$ et $\alpha \cdot f$ (fig. B₁). Il est alors logique de définir les lois suivantes pour les (n, m)-matrices (fig. C₁) :

$(\alpha_{ik}) + (\beta_{ik}) := (\alpha_{ik} + \beta_{ik})$ *Addition des matrices*
$\alpha \cdot (\alpha_{ik}) := (\alpha \cdot \alpha_{ik})$ *Mult. par un scalaire*

De cette manière $M_{n,m}(K)$ devient également un espace vectoriel sur K, car l'application l donnée ci-dessus est un isomorphisme, c.-à-d.
$\mathfrak{L}(V, V') \cong M_{n,m}(K)$.

Rem. : La matrice neutre pour l'addition est la *matrice nulle*, dont chaque élément est l'élément nul de K. La matrice opposée à (α_{ik}) est $(-\alpha_{ik})$.

L'ensemble des matrices ayant un de leurs éléments égal à l'élément unité de K et tous les autres égaux à l'élément nul de K est une base de $M_{n,m}(K)$. Comme il y a $n \cdot m$ matrices de cette forme, on a :
$\dim(\mathfrak{L}(V, V')/K)) = \dim(M_{n,m}(K)/K)) = n \cdot m$.

L'espace vectoriel dual $\mathfrak{L}(V, K)$

Pour tout espace vectoriel V sur K de dimension m on peut considérer l'espace vectoriel $\mathfrak{L}(V, K)$, isomorphe à V car K est un espace vectoriel sur lui-même avec $\dim(K/K) = 1$, si bien que $\dim(\mathfrak{L}(V, K)/K)) = m$.

Déf. 12 : $\mathfrak{L}(V, K)$ s'appelle *espace vectoriel dual* de V et ses éléments sont appelés *formes linéaires.*

L'intérêt de l'espace vectoriel dual réside dans le fait que l'on peut décrire les sous-espaces vectoriels de V (par ex. les droites, les plans dans $\mathbb{R}^3$) par un système de formes linéaires particulières.

Rem. : Les tenseurs sont une généralisation des formes linéaires.

Composition des applications linéaires

Étant donné deux applications linéaires $f: V \to \widehat{V}$ et $g: \overline{V} \to V$ dans des espaces vectoriels sur K de dimensions finies, la composée $f \circ g: \overline{V} \to \widehat{V}$ est aussi une application linéaire. La matrice associée est donnée en fig. B. On l'obtient à partir des matrices correspondant à f et à g en définissant (fig. C₂) :

$(\alpha_{ik}) \cdot (\beta_{kj}) := \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} \cdot \beta_{kj}\right)$ *Mult. des matrices*

Rem. : Pour la composition $f \circ g$ des applications linéaires f et g, l'ensemble d'arrivée de g et l'ensemble de départ de f doivent coïncider. De même on peut effectuer la multiplication MN des matrices M et N seulement si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N.

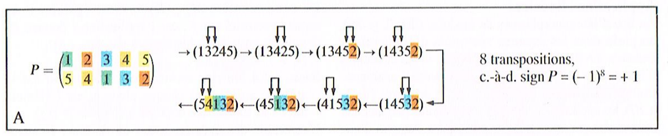
Les anneaux $\mathfrak{L}(V, V)$ et $M_{n,n}(K)$

On considère l'espace vectoriel $\mathfrak{L}(V, V)$ des applications linéaires de V sur lui-même, de sorte que la composition des applications est une l.c.i. dans $\mathfrak{L}(V, V)$. Elle est associative, mais non commutative en dim. > 1. L'application identité est l'élément neutre.

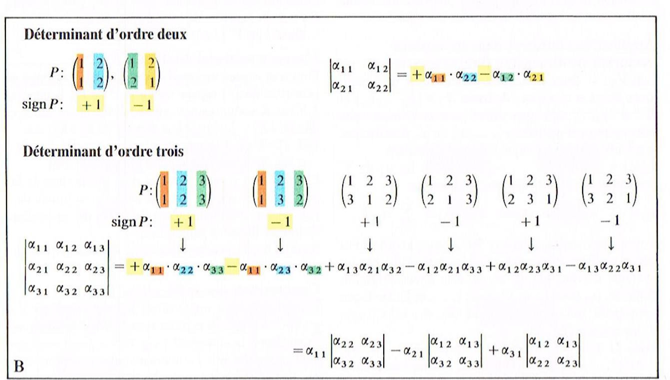
$\mathfrak{L}(V, V)$ muni de l'addition et de la composition des applications linéaires est un anneau unitaire, non intègre et non commutatif en dim. > 1. On obtient des résultats analogues pour l'addition et la multiplication dans l'ensemble $M_{n,n}(K)$ des (n, n)-matrices (appelées également matrices *carrées d'ordre n*) correspondant à $\mathfrak{L}(V, V)$. La matrice neutre de la multiplication est la *matrice identité* (δ_{ik}) avec $\delta_{ik} = 1$ pour $i = k$ et $\delta_{ik} = 0$ pour $i \neq k$.

Comme l'application $l: \mathfrak{L}(V, V) \to M_{n,n}(K)$ est un isomorphisme d'anneaux avec $l(Id_V) = (\delta_{ik})$, on a :
$\mathfrak{L}(V, V) \cong M_{n,n}(K)$.

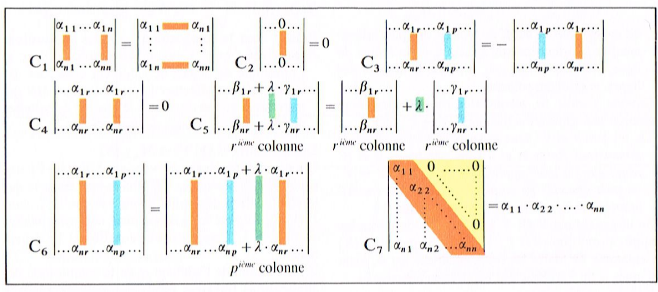
Rem. : En tenant compte aussi de la l.c.e, $\mathfrak{L}(V, V)$ et $M_{n,n}(K)$ sont des *algèbres unitaires* sur K.



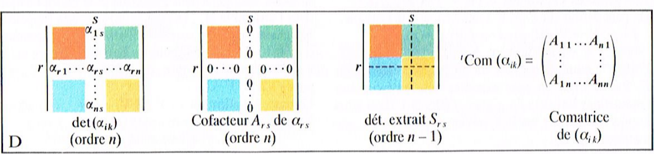
Signature d'une permutation



Déterminants d'ordres deux et trois



Règles de calcul pour les déterminants



Cofacteur, déterminant extrait, Comatrice

Groupe des automorphismes Aut (V, V)

L'ensemble $\mathfrak{L}(V, V)$ de toutes les applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension n sur lui-même (p. 89) muni de la composition des applications ne forme pas un groupe car les éléments inverses (applications réciproques) n'existent pas toujours. Cependant si l'on se restreint aux applications linéaires bijectives $f \in \mathfrak{L}(V, V)$, c.-à-d. aux isomorphismes de V sur lui-même, alors les applications linéaires bijectives $f^{-1} \in \mathfrak{L}(V, V)$ existent, avec $f^{-1} \circ f = Id_V$. De telles applications linéaires sont remarquables.

Déf. 13 : Une application linéaire bijective de $\mathfrak{L}(V, V)$ s'appelle *automorphisme* de V. L'ensemble des automorphismes de V sera noté Aut (V, V).

Aut (V, V) muni de la composition des applications est un *groupe non commutatif* en dim. > 1, appelé également *groupe linéaire* de V.

Matrices régulières

Une base B de V étant fixée, on peut considérer l'ensemble de toutes les matrices de $M_{n,n}(K)$ (p. 89) correspondant relativement à B à Aut (V, V). Il est maintenant essentiel d'obtenir le même ensemble de matrices lorsque l'on choisit une autre base de V. On met alors en évidence une partie de $M_{n,n}(K)$ correspondant à Aut (V, V).

Déf. 14 : Une matrice de $M_{n,n}(K)$ correspondant à un automorphisme de V est dite *régulière*.

Dans la théorie des déterminants (K commutatif), on montre qu'il est possible de caractériser les matrices régulières par un scalaire, leur déterminant.

Déterminant d'une matrice

Pour la déf. du déterminant on a besoin de la notion de *signature d'une permutation*. Soit une permutation $P := \begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ i_1, \ldots, i_n \end{pmatrix}$ de S_n (p. 75) ; on peut transformer la suite $(1, \ldots, n)$ en la suite $(i_1, \ldots, i_n)$ en effectuant un nombre p de transpositions (fig. A). La *signature de P* (sign P) est égale à $(-1)^p$. Elle est parfaitement déterminée, i.e. la parité de p ne dépend que de P.

Déf. 15 : Soit (α_{ik}) une (n, n)-matrice sur K. Alors

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{P \in S_n} \operatorname{sign} P \cdot \alpha_{i_1 1} \cdot \alpha_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_n n}$$

avec $P := \begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ i_1, \ldots, i_n \end{pmatrix}$

est appelé *déterminant d'ordre n* (dét.) de (α_{ik}), plus brièvement : det (α_{ik}). En interprétant les colonnes de la matrice comme des vecteurs $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n \in K^n$, on écrit aussi : det $(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n)$.

Un dét. d'ordre n est une somme de $n!$ termes, chaque terme comporte un et un seul élément de chaque ligne et de chaque colonne de la matrice.

Ex. de calcul : fig. B.

Règles de calcul pour les déterminants

À toute (n, p)-matrice $A = (\alpha_{ik})$ on associe sa transposée ${}^tA = (\beta_{ik})$, (p, n)-matrice telle que $\alpha_{ki} = \beta_{ik}$.

(1) det (A) = det $({}^tA)$ *pour toute matrice carrée.*

Rem. : De (1) on déduit que toutes les règles énoncées sur les colonnes sont aussi valables sur les lignes.

(2) *Un déterminant est nul quand une colonne ne comporte que des zéros* (fig. C_2) : det $(\ldots, \boldsymbol{o}, \ldots) = 0$, *de même quand deux de ses colonnes coïncident* (fig. C_4) : det $(\ldots, \boldsymbol{s}_r, \ldots, \boldsymbol{s}_r, \ldots) = 0$.

(3) *Un déterminant est changé en son opposé lorsqu'on permute deux de ses colonnes* (fig. C_3) :
det $(\ldots, \boldsymbol{s}_r, \ldots, \boldsymbol{s}_p, \ldots) = -$ det $(\ldots, \boldsymbol{s}_p, \ldots, \boldsymbol{s}_r, \ldots)$.

(4) *Propriété de sommation des déterminants* (fig. C_5) :
det $(\ldots, \boldsymbol{a}_r + \lambda \cdot \boldsymbol{b}_r, \ldots)$ = det $(\ldots, \boldsymbol{a}_r, \ldots)$ $+ \lambda \cdot$ det $(\ldots, \boldsymbol{b}_r, \ldots)$ $(\lambda \in K)$.

Conséquences :

(a) La valeur d'un déterminant n'est pas modifiée lorsqu'on ajoute à une de ses colonnes une autre colonne multipliée par λ (fig. C_6) :
det $(\ldots, \boldsymbol{s}_r, \ldots, \boldsymbol{s}_p, \ldots)$ = det $(\ldots, \boldsymbol{s}_r, \ldots, \boldsymbol{s}_p + \lambda \cdot \boldsymbol{s}_r, \ldots)$ $(\lambda \in K)$.

(b) Si l'on multiplie tous les éléments d'une colonne par $\lambda \in K$, le déterminant est multiplié par λ :
det $(\ldots, \lambda \cdot \boldsymbol{s}_r, \ldots) = \lambda \cdot$ det $(\ldots, \boldsymbol{s}_r, \ldots)$.

(c) det $(\lambda \cdot (\alpha_{ik})) = \lambda^n \cdot$ det (α_{ik}).

(d) Un déterminant est différent de 0 si, et seulement si, l'ensemble des vecteurs-colonnes est un système linéaire indépendant sur K.

(5) *Si un déterminant est triangulaire, c.-à-d. si $\alpha_{ik} = 0$ pour $k > i$, alors le déterminant est égal au produit des éléments $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{nn}$* (fig. C_7).

Conséquence : Le déterminant de la matrice identité (δ_{ik}) est 1.

(6) *Propriété de produit des déterminants :*
det $((\alpha_{ik}) \cdot (\beta_{ik}))$ = det $(\alpha_{ik}) \cdot$ det (β_{ik}).

(7) *Propriété de développement d'un déterminant : pour une colonne choisie et fixée d'indice s, on forme tous les cofacteurs A_{rs}, $r \in \{1, \ldots, n\}$* (fig. D), *et l'on obtient :*

$$\det(\alpha_{ik}) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{rs} A_{rs}.$$

Rem. : En calculant le *déterminant extrait* S_{rs} d'ordre $n - 1$ (fig. D), obtenu en barrant la $r^{\text{ième}}$ ligne et la $s^{\text{ième}}$ colonne, on obtient A_{rs} par la formule :

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} S_{rs}.$$

La fig. B montre le développement d'un déterminant d'ordre 3 par rapport à la 1re colonne.

Déf. : On appelle *comatrice* de la matrice carrée A la matrice Com $(A) = (A_{rs})$.

Le groupe $GL_n(K)$ des matrices régulières

Une condition nécessaire d'existence de l'inverse pour la mult. $(\alpha_{ik})^{-1}$ de $(\alpha_{ik}) \in M_{n,n}(K)$ est det $(\alpha_{ik}) \neq 0$, car d'après (6) on a :
$(\alpha_{ik}) \cdot (\alpha_{ik})^{-1} = (\delta_{ik}) \Rightarrow$ det $(\alpha_{ik}) \cdot$ det $(\alpha_{ik})^{-1} = 1$, c.-à-d. det $(\alpha_{ik}) \neq 0$. Mais cette condition est aussi suffisante, car en utilisant la transposée de Com (α_{ik}) (fig. D), on obtient :

$$(\alpha_{ik})^{-1} = \frac{1}{\det(\alpha_{ik})}\, {}^t\mathrm{Com}\,(\alpha_{ik}) \text{ comme inverse de } (\alpha_{ik}).$$

À l'aide de (6), on vérifie facilement que l'ensemble des matrices de $M_{n,n}(K)$ de dét. différent de 0 muni de la mult. des matrices forme un groupe non commutatif si $n > 1$. Cet ensemble est noté $GL_n(K)$. On montre de plus :

Une matrice est régulière si, et seulement si, elle appartient à $GL_n(K)$.

$GL_n(K)$ est donc aussi l'ensemble des matrices régulières correspondant à Aut (V, V). Il s'ensuit : Aut $(V, V) \cong GL_n(K)$.

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 15x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 & 15 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2$$

Formules de CRAMER

$$x_1 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 7 & 15 \\ 4 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -7, \quad x_2 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 15 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}, \quad x_3 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \tfrac{5}{2}$$

Solution : $\boxed{(-7, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2})}$

Procédé d'élimination :

Le but de la méthode est de transformer le système initial en un système équivalent de la forme

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. La solution (c_1, c_2, c_3) apparaît alors de manière évidente : $x_i = c_i$.

Les différentes opérations exécutées sont :

(1) permutation d'équations ;
(2) addition d'équations pour remplacer l'une d'entre elles ;
(3) multiplication d'équations par un facteur réel non nul.

On procède habituellement de la manière suivante, pour un système de 3 équations :
Deux des équations sont transformées pour ne plus contenir que deux inconnues ; on transforme à nouveau l'une d'elles en équation à une inconnue. Les autres équations sont alors transformées l'une après l'autre de manière à ne plus contenir qu'une seule inconnue.

$$\begin{array}{rl} & 5x_1 + 7x_2 + 15x_3 = 6 \\ (+) & x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 / \cdot (-5) \\ \hline & -3x_2 - 5x_3 = -14 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 / \cdot (-2) \\ (+) & 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 5 \\ \hline & x_2 + x_3 = 3 \end{array}$$

$$-2x_3 = -5$$

$$x_3 = \tfrac{5}{2} \qquad x_2 = \tfrac{1}{2} \qquad x_1 = -7$$

Solution : $\boxed{(-7, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2})}$

Aspect matriciel du procédé d'élimination

On note le système sous la forme $M = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 15 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Alors cette matrice doit être transformée en M', à l'aide de (1) échange de lignes, (2) addition de lignes, (3) multiplication de lignes par des facteurs réels $\neq 0$.

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 7 & 15 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 15 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Solution : $\boxed{(-7, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2})}$

Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}$

Équations

Résoudre une équation de la forme $f(x) = g(x)$, où f et g sont des applications d'un ensemble E dans un ensemble H, c'est déterminer les éléments r de E (appelés racines ou solutions de l'équation) pour lesquels l'égalité $f(r) = g(r)$ est vérifiée.

$f(x)$ et $g(x)$ sont les deux membres de l'équation, x est l'inconnue.

Ex. 1 : $E = \mathbb{N}, H = \mathbb{Z}, f(x) = x^2 - 2, g(x) = x^3 - 2x ; r = 1$.

Ex. 1* : $E = \mathbb{R}, H = \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2, \ g(x) = x^3 - 2x$;
$r_1 = 1, r_2 = \sqrt{2}, r_3 = -\sqrt{2}$.

L'ensemble E peut être un ensemble produit $E_1 \times \ldots \times E_n$, alors $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un *n-uplet* et il est d'usage de dire que l'équation est en n inconnues $x_1, \ldots, x_n, x_i \in E_i$. De même, H peut être de la forme $H_1 \times \ldots \times H_m$.

Ex. 2 : $E = \mathbb{R}^3, H = \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_3 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix} ;$$

$r_\lambda = (\lambda, 0, 1), r'_\mu = (\mu, \mu, 2), r''_\nu = (0, 0, \nu)$, où λ, μ, ν sont des réels arbitraires (à noter que $r_0 = r''_1$ et $r'_0 = r''_2$).

On remarquera que l'*équation matricielle* proposée est équivalente au *système* des deux équations
$x_1 + x_2 = x_1 x_3, 2x_2 = x_2 x_3$.

Si maintenant on suppose que f et g appliquent respectivement les ensembles F et G dans H, on substituera à E l'ensemble $D = F \cap G$, sous réserve qu'il soit non vide (si $D = \emptyset$, l'équation est évidemment impossible). D s'appelle l'ensemble de définition de l'équation.

Ex. 3 : $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, H = \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{3}{x_1 - x_2} x_3$, $g(x) = x_1 - 3$.
$D = \mathbb{R}^3 \setminus P$, où P est le plan $x_1 - x_2 = 0$.
L'ensemble des solutions est le paraboloïde hyperbolique $x_1(x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2 + x_3) = 0$ diminué de sa génératrice $(x_1 = x_2 ; x_3 = 0)$ (voir quadriques p. 203).

Le but de la théorie des équations étant de déterminer les solutions d'une équation ou d'un système d'équations, la première opération à effectuer est celle dite de la *réduction*. En remarquant qu'un système d'équations $(f_i(x) = g_i(x), i = 1, \ldots, m)$ est équivalent à une équation $f(x) = g(x)$ en posant $f = (f_1, \ldots, f_m)$ et $g = (g_1, \ldots, g_m)$, on utilise la structure de H pour réduire l'équation $f(x) = g(x)$, c.-à-d. pour la ramener à une équation équivalente plus simple, entrant si possible dans un type connu. Ainsi si H est un groupe additif, $(f(x) = g(x))$ est équivalent à $(f(x) - g(x) = 0)$, soit $((f - g)(x) = 0)$: le problème est donc d'étudier les racines de la fonction $h = f - g$. Si H est un corps commutatif K, ou même un espace vectoriel sur K, on dispose encore d'autres règles opératoires.

Ex. 4 : $4x^2 - 4x - 5 = 2x^2 + 1, E = D = \mathbb{R}$;
$4x^2 - 4x - 5 = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1 + 2)(x - 1 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$
$S = \{-1, 3\}$.

Une réduction peut donc éventuellement permettre de ramener une équation à un type dont l'importance est telle qu'une étude générale en a été faite. L'exemple précédent entre dans le cadre de l'étude des racines d'un polynôme à coefficients dans un corps commutatif K (p. 96 *sqq.*). Le paragraphe qui suit est consacré aux systèmes d'équations linéaires.

Systèmes d'équations linéaires

Déf. : K désignant un corps commutatif, le système de m équations à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$:

$$\text{(I)} \begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \qquad (a_{ik}, b_i \in K), (x_i \in K)$$

est appelé *système d'équations linéaires* sur K. Si tous les b_i sont nuls, on dit que le système est homogène. Un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ vérifiant les m équations est appelé solution de (I).

En posant $A = [a_{ik}]$, $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \ldots, x_n] \in K^n$ et $\boldsymbol{b} = {}^t[b_1, \ldots, b_m] \in K^m$, on obtient ainsi l'écriture matricielle du système : (II) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (les vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{b}$ sont notés en colonnes). Cette écriture sera souvent plus facile à manier que l'écriture (I). Dans le cas important du système de CRAMER, la solution est particulièrement facile à exprimer, sinon à calculer.

Formules de CRAMER

Théorème 1 : *Si* $n = m$ *et* $\det A \neq 0$, *alors le système* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *possède une et une seule solution* $\boldsymbol{x}$ *définie par* $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

En utilisant la définition de A^{-1} et en développant la solution $(x_1, \ldots x_n) \in K^n$, il vient :

$$x_k = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \ldots a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(formules de CRAMER).

Ex. : voir p. 92.

Rem. : Dans la pratique, l'emploi des formules de CRAMER est parfois maladroit, car le calcul d'un déterminant d'ordre élevé peut être pénible. On utilisera alors un procédé d'élimination (p. 92), ou même un procédé d'approximation si on a besoin de résultats numériques.

Les formules de CRAMER sont très importantes sur le plan théorique car les méthodes générales de résolution des systèmes homogènes ou non homogènes s'appuient sur ce théorème d'existence et d'unicité.

Système homogène

Un système homogène $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ possède toujours au moins une solution, car $\boldsymbol{0} \in K^n$ est solution. Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont solutions du système, alors $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ et $\lambda \boldsymbol{x}$ $(\lambda \in K)$ sont aussi solutions. L'ensemble S_h des solutions d'un système homogène est donc un espace vectoriel sur K, et plus précisément un sous-espace vectoriel de K^n (prop. 1, p. 85).

La dimension de S_h dépend de la matrice A. Si r (rang de A) est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) de A linéairement indépendants, alors $\dim(S_h) = n - r$.

Si l'on connaît $n - r$ solutions linéairement indépendantes $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$, alors $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}\}$ est une base de S_h, c'est-à-dire
$S_h = \{\boldsymbol{x} / \boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \boldsymbol{x}_{n-r}, \lambda_i \in K\}$.

Rem. : $\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \boldsymbol{x}_{n-r}$ est appelée *solution générale* du système. Les $\boldsymbol{x}_i$ peuvent être déterminés par un procédé de résolution découlant des formules de CRAMER.

$$\mathbb{Z}[q] := \left\{ \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu q^\nu \mid q \in \mathbb{Q} \wedge a_\nu \in \mathbb{Z} \wedge r \in \mathbb{N} \right\} \text{ est un sous-anneau unitaire de } \mathbb{Q}$$

L'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication sont valables dans $\mathbb{Z}[q]$, puisqu'elles le sont dans $\mathbb{Q}$. De même pour la distributivité. L'élément unité 1 est dans $\mathbb{Z}[q]$ puisque $1 \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[q]$.

a) $z_1 \in \mathbb{Z}[q] \wedge z_2 \in \mathbb{Z}[q] \Rightarrow z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}[q]$

$z_1 := \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu q^\nu \wedge z_2 := \sum_{\nu=0}^{s} b_\nu q^\nu$ (on suppose $r \geq s$) $\Rightarrow z_1 - z_2 = \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu q^\nu - \sum_{\nu=0}^{s} b_\nu q^\nu \Rightarrow$

$z_1 - z_2 = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)q + \ldots + (a_s - b_s)q^s + a_{s+1}q^{s+1} + \ldots + a_r q^r \Rightarrow z_1 - z_2 = \sum_{\nu=0}^{r} c_\nu q^\nu \in \mathbb{Z}[q]$

b) $z_1 \in \mathbb{Z}[q] \wedge z_2 \in \mathbb{Z}[q] \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{Z}[q]$

$z_1 := \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu q^\nu \wedge z_2 := \sum_{\nu=0}^{s} b_\nu q^\nu \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu q^\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{s} b_\nu q^\nu \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)q +$

$+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)q^2 + \ldots + (a_{r-1} b_s + a_r b_{s-1})q^{r+s-1} + a_r b_s q^{r+s} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \sum_{\nu=0}^{r+s} d_\nu q^\nu \in \mathbb{Z}[q]$

Rem. : Pour b), la commutativité de la multiplication est indispensable.

A

Anneau intermédiaire $\mathbb{Z}[q]$

Soit $(A ; +, .)$ un anneau unitaire. On construit l'ensemble S de toutes les suites $(a_0, a_1, \ldots)$ avec $a_\nu \in A$, et ne comportant qu'un nombre fini de $a_\nu \neq 0$. S est donc l'ensemble de toutes les applications $f : \mathbb{N} \to A$ telles que $f(\mathbb{N}) \cap A \setminus \{0\}$ soit un ensemble fini. On définit sur S :

Égalité :	$(a_0, a_1, \ldots) = (b_0, b_1, \ldots) :\Leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots$
Addition :	$(a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots)$
Multiplication :	$(a_0, a_1, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots) := (a_0 b_0, \ldots, a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \ldots + a_i b_0, \ldots)$
Élément neutre pour l'addition :	$(0, 0, \ldots)$ Élément unité : $(1, 0, 0, \ldots)$
Élément opposé :	$(-a_0, -a_1, \ldots)$ de $(a_0, a_1, \ldots)$
Il s'ensuit que	$(S ; +, \cdot)$ est un anneau unitaire.

$(\{(a, 0, 0, \ldots) \mid a \in A\} ; +, \cdot)$ est un sous-anneau de S isomorphe à A que l'on identifie à A.
S peut alors être considéré comme un sur-anneau de A.

S possède un élément remarquable :

$$X := (0, 1, 0, 0, \ldots)$$

On a : $X^2 := X \cdot X = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, $X^3 := X \cdot X^2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ etc., d'où

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_0, 0, 0, \ldots) + (a_1, 0, 0, \ldots) \cdot X + (a_2, 0, 0, \ldots) \cdot X^2 + \ldots$$

(comme les ν tels que $a_\nu \neq 0$ constituent un ensemble fini, il s'agit d'une somme finie).
L'identification mentionnée plus haut permet d'écrire :

$$(a_0, a_1, \ldots) = \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu X^\nu$$

S est par définition l'anneau des polynômes en X sur A. Sa notation définitive est $A[X]$: c'est « le plus petit anneau » contenant A et X.
X est appelée indéterminée car $\sum_{\nu=0}^{r} a_\nu X^\nu = 0 \in A$ implique toujours $\forall_\nu, a_\nu = 0 \in A$.

B

Construction de l'anneau des polynômes $A[X]$

$$\begin{array}{rl|l} & X^4 + 2X^3 \qquad + X + 1 & X^2 - 1 \\ \cline{3-3} - & (X^4 \qquad - X^2) & X^2 + 2X + 1 \\ & 2X^3 + X^2 + X + 1 & \\ - & (2X^3 \qquad - 2X) & \\ & X^2 + 3X + 1 & \\ - & (X^2 \qquad - 1) & \\ & 3X + 2 & \end{array}$$

soit $X^4 + 2X^3 + X + 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 2X + 1) + 3X + 2$.

C

Algorithme de la division de $X^4 + 2X^3 + X + 1$ par $X^2 - 1$.

Construction d'anneaux intermédiaires, adjonction à un anneau

$\mathbb{Q}$ est le plus petit corps contenant l'anneau $\mathbb{Z}$ (p. 57). Toute partie S telle que $\mathbb{Z} \subseteq S \subset \mathbb{Q}$ admet donc, comme sous-structure de $\mathbb{Q}$, au plus une structure d'anneau. On peut facilement construire des anneaux *intermédiaires* entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.
Si S est un anneau et si $q \in S^*$, nécessairement toute somme finie $\sum_{\nu=0}^{r} a_\nu q^\nu$ où les a_ν sont dans $\mathbb{Z}$ est un élément de S. On peut alors démontrer (tab. A) que

$$\mathbb{Z}[q] := \left\{ \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu q^\nu \mid q \in \mathbb{Q}^* \wedge a_\nu \in \mathbb{Z} \wedge r \in \mathbb{N} \right\} \text{ est}$$

le plus petit anneau intermédiaire contenant q. Cet anneau est évidemment commutatif unitaire. Il s'identifie à $\mathbb{Z}$ si $q \in \mathbb{Z}^*$.
Une telle construction peut se généraliser.

Théorème 1 : *Soit A un anneau commutatif unitaire* (voir rem. tab. A) *et S un sous-anneau unitaire de A.*

$$S[\alpha] = \left\{ \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu \alpha^\nu \mid \alpha \in A \wedge a_\nu \in S \wedge r \in \mathbb{N} \right\} \textit{ est un}$$

anneau commutatif unitaire.

$S[\alpha]$ est le plus petit anneau contenant S et α.

Déf. 1 : $S[\alpha]$ est l'extension de A obtenue par *l'adjonction* de α à S.

Polynômes, anneau des polynômes $A[X]$

Le tableau B p. 94 donne une construction particulièrement importante d'un sur-anneau d'un anneau A simplement supposé unitaire : il s'agit de l'anneau $A[X]$ des polynômes en X sur A. La notation $A[X]$ indique d'ailleurs qu'il s'agit d'une adjonction (tout polynôme $P(X)$ de $A[X]$ s'écrit $\sum_{\nu=0}^{r} a_\nu X^\nu$, $a_\nu \in A$, $r \in \mathbb{N}$), mais celle-ci est moins simple que celles étudiées précédemment, pour lesquelles A était supposé commutatif. On peut énoncer le théorème :

Théorème 2 : *L'anneau $A[X]$ est un sur-anneau de A, unitaire comme A, commutatif, si, et seulement si, A l'est, intègre si, et seulement si, A l'est.*

Dans l'anneau $A[X]$ des polynômes en X sur A, X est un élément particulier de $A[X]$ qui commute avec tous les éléments de $A[X]$. X n'est pas une variable bien que la notation $P(X)$ et l'appellation *indéterminée* semblent suggérer le contraire. On ne peut pas remplacer X par un élément arbitraire. Ainsi par exemple :
$(X - \alpha)(X - \beta) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta$ (1) alors que $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - \alpha x - x\beta + \alpha\beta$ (2) si $x \in A$. On a le droit de remplacer x par α dans (2), on n'a pas le droit de remplacer X par α dans (1) (faire l'essai !).
En définitive, il ne faut pas confondre polynôme et fonction polynôme (voir plus loin $K[X]$, K corps commutatif).

Degré d'un polynôme

Déf. 2 : Soit $P(X) = \sum_{\nu=1}^{r} a_\nu X^\nu \neq 0$ un polynôme de $A[X]$. Le plus grand entier ν tel que $a_\nu \neq 0$ est appelé *degré* de $P(X)$ $(\deg P(X))$. Le coefficient associé est le coefficient dominant du polynôme. Un polynôme de coefficient dominant $1 \in A$ est dit *unitaire*.

Exemples : Les polynômes *constants* $P(X) = a_0 \neq 0$ sont de degré 0, le polynôme nul n'a pas de degré. $X + X^r$ $(r > 1)$ est unitaire de degré r.

On a toujours :
$\deg(P(X) + Q(X)) \leq \sup(\deg P(X), \deg Q(X))$,
$\deg(P(X) \times Q(X)) \leq \deg P(X) + \deg Q(X)$.
Si A est un anneau intègre, alors :
$\deg(P(X) \times Q(X)) = \deg P(X) + \deg Q(X)$,
car si $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$ sont les coefficients dominants de $P(X)$, resp. $Q(X)$, $a_n b_p \neq 0$ est le coefficient de X^{n+p}, donc aussi le coefficient dominant de $P(X)\,Q(X)$.

Anneau des polynômes $A[X_1, \ldots, X_p]$

En adjoignant les indéterminées $X_1, \ldots, X_p$ à un anneau unitaire A, on définit les expressions formelles

$$\sum_{0 \leq \alpha_\nu \leq r} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} X_1^{\alpha_1} \ldots X_p^{\alpha_p} \quad (a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \in A, n \in \mathbb{N}).$$

L'ensemble de ces *polynômes* est noté $A[X_1, \ldots, X_p]$.
$A[X_1, \ldots, X_p]$ est un anneau unitaire. Le théorème 2 est encore valable, en remplaçant X par $X_1, \ldots, X_p$.

Rem. : $A[X_1, \ldots, X_p]$ peut aussi être construit par adjonctions successives des indéterminées dans un ordre quelconque, car $A[X_1, \ldots, X_\nu] = A[X_1, \ldots, X_{\nu-1}][X_\nu]$, $\nu \in \{2, \ldots, p\}$ (les X_ν commutent avec tous les éléments de $A[X_1, \ldots, X_p]$).

Divisibilité dans l'anneau des polynômes $K[X]$ sur un corps K commutatif

Remarque préliminaire : Les points abordés ici peuvent en partie être traités dans un anneau de polynômes sur un anneau. Pour éviter toute difficulté, les coefficients sont pris dans un corps K commutatif et non dans un anneau unitaire quelconque.

La définition de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$:
$a \mid b \Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z} \,/\, b = qa$ peut s'étendre à $K[X]$.

Déf. 3 : $S(X) \in K[X]$ divise $P(X) \in K[X]$ (notation $S(X) \mid P(X)$), s'il existe $T(X) \in K[X]$ tel que $P(X) = S(X) \times T(X)$ (on a donc aussi $T(X) \mid P(X)$). $S(X)$ est un diviseur de $P(X)$, il sera dit diviseur propre de $P(X)$ si $0 < \deg S(X) < \deg P(X)$, ce qui suppose $P(X) \neq 0$.

Un polynôme non nul est dit *irréductible* lorsqu'il ne possède aucun diviseur propre, *factorisable* dans le cas contraire.

Système non homogène (suite de la p. 93)

Un système non homogène ne possède pas toujours de solution, par exemple $x_1 + x_2 = 0$ et $x_1 + x_2 = 1$.
Il existe un critère d'existence des solutions :

Théorème 2 : *Un système non homogène $Ax = \mathbf{b}$ possède des solutions si, et seulement si, $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire de r vecteurs colonnes indépendants de A, r désignant le rang de A.*

L'ensemble S des solutions d'un système non homogène compatible $A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ peut être représenté à l'aide de l'ensemble S_h des solutions du système homogène associé $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$: si $\boldsymbol{x}_0$ est une *solution particulière* du système $A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$, on a $S = \boldsymbol{x}_0 + S_h$.

Rem. : Les polynômes factorisables correspondent aux entiers possédant des diviseurs propres, les polynômes irréductibles aux nombres premiers.

Ex. : $X^2 - 1$ est factorisable sur $\mathbb{Q}$, car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. $X^2 + 1$ est factorisable sur $\mathbb{C}$, car $X^2 + 1 = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$, mais irréductible sur $\mathbb{R}$. Tout polynôme de degré 1 est irréductible. Si $S(X)$ divise $P(X)$, alors $\lambda S(X)$ où $\lambda \in K \setminus \{0\}$ est aussi un diviseur de $P(X)$.

Le théorème correspondant à l'unicité de la décomposition des entiers en facteurs premiers est :

Théorème 3 : *Tout polynôme unitaire de $K[X]$ peut être décomposé de manière unique en un produit de polynômes irréductibles unitaires de $K[X]$, à l'ordre près des facteurs qui est indifférent.*

Ex. : $X^4 - 2X^3 - X^2 + 4X - 2$ se factorise sur $\mathbb{Q}$ en $(X^2-2)(X-1)^2$, et sur $\mathbb{R}$ en $\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{2}\right)(X-1)^2$.

La décomposition dépend donc du choix du corps contenant les coefficients.

Division polynomiale euclidienne

On peut introduire dans $\mathbb{N}$ une « division entière » à l'aide des opérations définies sur les entiers. Par exemple, la division entière de 112 par 25 est :
$112 = 25 \times 4 + 12$.

De manière générale, à tout couple $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ est associé un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = b \cdot q + r$ et $0 \leq r < b$. Cette notion de division peut être étendue à l'anneau $K[X]$.

Théorème 4 : *À tout couple $\big(P(X), S(X)\big) \in K[X] \times K[X]^*$ correspond un unique couple $\big(Q(X), R(X)\big) \in K[X]^2$ tel que $P(X) = S(X) \cdot Q(X) + R(X)$ avec $\deg R(X) < \deg S(X)$ ou $R(X) = 0$.*

Ex. : Tab. C p. 94.

Déf. 4 : pgcd $\big(P(X), S(X)\big)$ désigne l'unique polynôme unitaire de degré maximal divisant à la fois $P(X)$ et $S(X)$. $P(X)$ et $S(X)$ sont dits premiers entre eux lorsque pgcd $\big(P(X), S(X)\big) = 1$. (pgcd signifie plus grand commun diviseur).

Rem. : On verra que $K[X]$ est un anneau euclidien (p. 117). En appliquant l'algorithme d'Euclide (p. 116) à $\big(P(X), S(X)\big)$, on détermine leur pgcd. C'est, à une constante multiplicative non nulle près, le dernier reste non nul apparaissant dans l'algorithme.

Théorème 5 : *Soient $P(X)$ et $S(X)$ deux polynômes non nuls de $K[X]$. Il existe deux polynômes $u(X), v(X) \in K[X]$ premiers entre eux, tels que $u(X) \cdot P(X) + v(X) \cdot S(X) = \mathrm{pgcd}\big(P(X), S(X)\big)$.*

Rem. : Lorsque $P(X)$ et $S(X)$ sont premiers entre eux, il vient $u(X) \cdot P(X) + v(X) \cdot S(X) = 1$. Cette relation, dite de Bézout, caractérise deux polynômes premiers entre eux.

Racines d'un polynôme

Si f est une application d'un ensemble E dans un groupe additif H, tout élément α de E tel que $f(\alpha) = 0$ est une racine de f.

Théorème 6 : *Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction polynôme non constante $x \mapsto f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ du corps commutatif K dans lui-même admette α comme racine est que le polynôme $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0 \in K[X]$ soit divisible par $X - \alpha$.*

En effet, si on divise $P(X)$ par $X - \alpha$ dans $K[X]$, on constate que le reste vaut $a_n \alpha^n + \ldots + a_0 = f(\alpha)$ (algorithme de la division) :
$P(X) = (X - \alpha) Q(X) + f(\alpha)$.
On en tire bien :
$P(X)$ multiple de $X - \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$.

Rem. 1 : Ce théorème n'est plus vrai si K n'est pas commutatif.
Ainsi si α et β ne commutent pas, la fonction $x \mapsto x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta$ ne s'annule pas pour $x = \alpha$, bien que $X^2 - (\alpha + \beta) X + \alpha\beta = (X - \alpha)(X - \beta)$.

Rem. 2 : Par abus de langage, dans le cas d'un corps commutatif, si $P(X) = (X - \alpha) Q(X)$, on dit que α est une racine de P et l'on écrit $P(\alpha) = 0$.

Racines multiples

Lorsque $P(X) = (X - \alpha) Q(X)$, il est encore possible que $(X - \alpha) \mid Q(X)$. Dans ce cas, on parlera de racine multiple. Par exemple, 1 est racine multiple de $X^4 - 2X^3 - X^2 + 4X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, tandis que $\sqrt{2}$ est racine simple.

Déf. 5 : On dit que $\alpha \in K$ est une racine d'ordre m ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) de $P(X) \in K[X]$ lorsque $(X - \alpha)^m$ divise $P(X)$ et que $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas $P(X)$.

Théorème 7 : *Un polynôme $P(X) \in K[X]$ de degré $n \geq 1$ possède au plus n racines distinctes dans K. Plus précisément, la somme des ordres de multiplicité des racines de $P(X)$ est inférieure ou égale à n.*

Rem. : Il existe dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes n'admettant aucune racine dans $\mathbb{R}$, par exemple $X^2 + 1$. Par contre, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ (*cf.* p. 67). D'après le théorème 7, la somme des ordres de multiplicité des racines d'un tel polynôme est exactement n. Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ peut donc être décomposé en

$a_n (X - \alpha_1)^{m_1} \ldots (X - \alpha_s)^{m_s}$ avec $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$. On dit que le polynôme se décompose entièrement en facteurs du premier degré.

Pour l'étude des racines multiples, on introduit la notion de dérivation :

Déf. 6 : Le polynôme $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ où $k a_k$ représente la somme de k éléments égaux à a_k est appelé *polynôme dérivé* de $P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$.

La dérivation suit les règles suivantes :
(1) $\big(P(X) + Q(X)\big)' = P'(X) + Q'(X)$
(2) $\big(a \cdot P(X)\big)' = a \cdot P'(X)$ pour $a \in K$
(3) $\big(P(X) \cdot Q(X)\big)' = P'(X) \cdot Q(X) + P(X) \cdot Q'(X)$
(4) $\big(P(X)^n\big)' = n P(X)^{n-1} \cdot P'(X)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Il s'ensuit :

Théorème 8 : *$\alpha \in K$ est racine simple de $P(X) \in K[X]$ si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$.*
Une racine d'ordre m ($m \geq 2$) de $P(X) \in K[X]$ est au moins racine d'ordre $m - 1$ de $P'(X)$.

Ex. : $X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$ avec $n \geq 1$ ne possède que des racines simples, car 0 n'est pas racine et $n\alpha^{n-1} \neq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ce polynôme possède donc exactement n racines distinctes dans $\mathbb{C}$, situées sur le cercle trigonométrique (p. 67).

Critères d'irréductibilité

Il n'y a pas de critère général permettant d'affirmer qu'un polynôme quelconque est irréductible. On n'abordera ici que les critères les plus importants.

Si un polynôme $P(X) \in K[X]$ de degré n, $n \geq 2$ est irréductible, alors $P(X)$ ne peut pas avoir de racine dans K. Mais cette condition nécessaire n'est en général pas suffisante : un polynôme n'ayant pas de racine dans K peut être factorisable.

Ex. : $X^4 - 4 = (X^2 - 2)(X^2 + 2) \in \mathbb{Q}[X]$ est factorisable sur $\mathbb{Q}$, mais ne possède aucune racine dans $\mathbb{Q}$.

Cependant, pour des polynômes de degré 2 ou 3, la condition précédente est aussi suffisante, car si le polynôme était factorisable, un facteur de degré 1 apparaîtrait dans la décomposition.

Théorème 9 : *Un polynôme $P(X) \in K[X]$ de degré 2 ou 3 est irréductible sur K si, et seulement si, $P(X)$ ne possède pas de racine dans K.*

Un théorème semblable concernant des polynômes particuliers a été énoncé par Abel.

Théorème 10 : *Le polynôme $X^p - a_0 \in K[X]$ de degré p premier est irréductible sur K si, et seulement si, il ne possède pas de racine dans K.*

Rem. : ($X^p - a_0$ n'a aucune racine dans K) équivaut à $a_0 \neq \alpha^p$ pour tout $\alpha \in K$.

Ex. : $X^2 + 1$, $X^3 - 2$, $X^{11} - 6 \in \mathbb{Q}[X]$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

Irréductibilité sur $\mathbb{Q}$

Le problème de l'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}[X]$ se ramène au même problème sur $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}[X]$. D'abord,

si $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ où $a_i = \frac{p_i}{q_i}$, $(p_i, q_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,

alors $P(X) = \frac{1}{b} \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ avec $b = \mathrm{ppcm}(q_0, \ldots, q_n)$,

soit encore $P(X) = \frac{a}{b} \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$ avec $a = \mathrm{pgcd}(b_0, \ldots, b_n)$.

(a et $b > 0$) (ppcm signifie plus petit commun multiple.)

$P^*(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ est appelé *polynôme primitif* de $P(X)$. Ensuite, on a le théorème :

Théorème 11 : *$P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si, et seulement si, son polynôme primitif $P^*(X) \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.*

Une condition suffisante d'irréductibilité importante est le critère d'Eisenstein :

Théorème 12 : *Le polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ s'il existe un nombre premier p tel que p ne divise pas a_n, $p \mid a_i$ ($i = 0, \ldots, n-1$) et p^2 ne divise pas a_0.*

Ex. : $X^2 + 2X + 2$, $5X^4 + 6X^2 - 3X + 12$ et $X^n + 2^n X^{n-1} + \ldots + 2^2 X + 2$ ($n \geq 1$) sont irréductibles sur $\mathbb{Z}$. Le dernier exemple montre qu'il existe des polynômes irréductibles de degré quelconque dans $\mathbb{Q}[X]$.

Rem. : La réciproque du théorème 12 est fausse, car le polynôme $X^2 + 4 \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, bien que les conditions du théorème ne soient pas remplies.

Les racines entières d'un polynôme unitaire $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ divisent toujours a_0. D'après le théorème 9, on a :

Théorème 13 : *Un polynôme unitaire $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ de degré 2 ou 3 est irréductible sur $\mathbb{Z}$ lorsqu'aucun diviseur de a_0 n'est racine de P.*

Ex. : Le polynôme $X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ admet -1 et 1 pour seuls diviseurs de $a_0 = 1$, mais aucune de ces valeurs n'est racine du polynôme, donc $X^3 - 3X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$, donc sur $\mathbb{Q}$.

Rem. : Si $P^*(X) = c_n X^n + \ldots + c_0$ est un polynôme primitif tel que $c_n c_0 \neq 0$, pour que la fraction irréductible $\frac{p}{q}$ soit racine de P^*, il est nécessaire que $p \mid c_0$ et $q \mid a_n$, mais la condition n'est pas suffisante.

Éléments algébriques d'un corps

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ est racine du polynôme $X - \sqrt{2} \in \mathbb{R}[X]$, et du polynôme $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. On peut donc se demander si tout nombre réel ou même complexe peut être considéré comme racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]^*$. La réponse est non. Il existe un ensemble non dénombrable de nombres dits transcendants (e et π par exemple) qui ne sont racines d'aucun polynôme de $\mathbb{Q}[X]^*$ (p. 69). Les nombres réels ou complexes qui sont racines de polynômes de $\mathbb{Q}[X]^*$ sont dits *algébriques*.

D'une manière générale :

Déf. 7 : Soit E un sur-corps commutatif du corps K. $\alpha \in E$ est dit *algébrique* sur K s'il existe un polynôme *non nul* de $K[X]$ dont α soit racine, *transcendant* dans le cas contraire.

Soit $\alpha \in E$ algébrique sur K. Parmi tous les polynômes non nuls de $K[X]$ qui admettent α pour racine, il existe des polynômes de degré minimal. Ils divisent tout polynôme de $K[X]$ admettant α pour racine (application du théorème 4). On peut à l'aide de cette propriété démontrer qu'il y a un unique polynôme unitaire de degré minimal dans $K[X]$ s'annulant en α.

Théorème 14 : *Si $\alpha \in E$ est algébrique sur K, alors il existe un polynôme unique $m_\alpha(X) \in K[X]$ associé à α tel que :*
(1) $m_\alpha(X)$ est unitaire.
(2) $m_\alpha(X)$ est le polynôme unitaire de degré minimal admettant α pour racine.
(3) $m_\alpha(X)$ divise tout polynôme de $K[X]$ dont α est racine.

Déf. 8 : On dit que $m_\alpha(X) \in K[X]$ est le *polynôme minimal* de l'élément algébrique α.

Pour déterminer le polynôme minimal, on utilise le théorème suivant :

Théorème 15 : *$P(X) \in K[X]$ est le polynôme minimal associé à α si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$ et $P(X)$ est unitaire irréductible sur K.*

Ex. : $X^n - 2$ est unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$. Comme $\left(\sqrt[n]{2}\right)^n - 2 = 0$, $X^n - 2$ est le polynôme minimal associé à $\sqrt[n]{2}$.

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

En effet, $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = 2\sqrt{6} + 5$ d'où $\left(\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 - 5\right)^2 = 24$, et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est racine de $(X^2 - 5)^2 - 24 = X^4 - 10X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Ce polynôme étant irréductible sur $\mathbb{Q}$ est le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Chaîne de corps :

$$\overbrace{\underbrace{E \supseteq F_s}_{(E:F_s)} \supseteq \ldots \supseteq \underbrace{F_{i+1} \supseteq F_i}_{(F_{i+1}:F_i)} \ldots \supseteq \underbrace{F_1 \supseteq K}_{(F_1:K)}}^{(E:K)=n}$$

$$(E:K) = (E:F_s) \times \ldots (F_{i+1}:F_i) \times \ldots (F_1:K).$$

La démonstration se fait par récurrence sur s, en appliquant le théorème sur le degré.

A

Généralisation du théorème concernant le degré à une chaîne de corps

Dans le sous-corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$, l'addition et la multiplication doivent être des opérations internes. Ainsi par ex. :

$b \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \Rightarrow b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $a \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \Rightarrow a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

On montre que tous les éléments de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sont de la forme $a + b\sqrt{2}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$.

a) $(\{x \mid x = a + b\sqrt{2} \wedge a, b \in \mathbb{Q}\}\,;+,\cdot)$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, car

(1) $(a+b\sqrt{2}) - (c+d\sqrt{2}) = (a-c) + (b-d)\sqrt{2}$,

(2) $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})^{-1} = (a+b\sqrt{2})\dfrac{c-d\sqrt{2}}{c^2-2d^2} = \dfrac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}$ $(c+d\sqrt{2} \neq 0)$.

b) Comme $\sqrt{2} = 0 + 1\sqrt{2}$ on a $\sqrt{2} \in \{x \mid x = a + b\sqrt{2} \wedge a, b \in \mathbb{Q}\}$. D'après la définition de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, il vient donc : $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \{x \mid x = a + b\sqrt{2} \wedge a, b \in \mathbb{Q}\}$.

a) et b) impliquent :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x \mid x = a + b\sqrt{2} \wedge a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Comme $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \Leftrightarrow x = a + b\sqrt{2} \wedge a, b \in \mathbb{Q}$, $\{1, \sqrt{2}\}$ est un système générateur de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sur $\mathbb{Q}$. $\{1, \sqrt{2}\}$ est de plus une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sur $\mathbb{Q}$, puisque $\{1, \sqrt{2}\}$ est linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$, car $a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$. Il vient donc :

$$(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}) = 2.$$

(*cf.* p. 103, *Ex.* (a))

B

Étude de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

I. De même que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ appartient aussi à $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ en tant que produit $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$. Une démonstration analogue à celle du tableau B conduit à :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{x \mid x = a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6} \wedge a_i \in \mathbb{Q}\}.$$

II. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ est une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ sur $\mathbb{Q}$, d'où :

$$(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}) = 4.$$

III. Comme $\frac{1}{6}(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 - \frac{3}{2} = \sqrt{2}$ et $\frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 - 2 = \sqrt{3}$, on peut également considérer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est engendré par l'adjonction à $\mathbb{Q}$ de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ ou encore $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$, soit :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{6}).$$

IV. On a $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3}$ et $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{2}$ d'où :

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ et $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, soit $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

D'autre part $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, soit $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

On en déduit donc : $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

C

Étude de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Tous les corps qui interviennent dans les pages 98 à 103 sont supposés commutatifs.

Extension d'un corps

Lors de la construction des ensembles usuels de nombres, les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ont été construits de telle sorte que $\mathbb{Q}$ apparaisse comme un sous-corps de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. D'où l'expression : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des *extensions de corps*.

Déf. 1 : Soient E et K deux corps. Si E contient un sous-corps isomorphe à K, on dit que E est une *extension* du corps K. Un corps F tel que $K \subseteq F \subseteq E$ est dit *corps intermédiaire*.

Soit E une extension du corps K. On peut considérer E comme espace vectoriel sur K (p. 87) et préciser la dimension de E sur K. Si elle est finie, elle est égale au degré d'un certain polynôme associé à l'extension du corps (pp. 101, 103). Aussi dit-on de manière équivalente dimension ou degré de E sur K, même dans le cas infini, avec la notation commune $(E : K)$.

Déf. 2 : Si $(E : K)$ est fini, alors E est dit *extension finie* de K.

Ex. : $(\mathbb{C} : \mathbb{R}) = 2$ car $\{1, \mathrm{i}\}$ est une base de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En revanche, $(\mathbb{C} : \mathbb{Q})$ est infini (p. 101, clôture algébrique).

Pour décrire la structure d'une extension de corps, l'étude des corps intermédiaires se montre efficace, en particulier pour les extensions finies.

Extensions finies

$\mathbb{C}$ a été introduit comme plus petit corps contenant $\mathbb{R}$ et différent de $\mathbb{R}$ (p. 65) ; il n'existe donc aucun corps intermédiaire entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. On retrouve ce résultat dans $(\mathbb{C} : \mathbb{R}) = 2$.

Dans le cas d'extensions finies, on peut démontrer en effet que pour tout corps intermédiaire F, $K \subseteq F \subseteq E$, $(F : K)$ est un diviseur de $(E : K)$. Ainsi, il ne peut pas y avoir de corps intermédiaire non trivial entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Théorème 1 : *Soit E une extension de K et F un corps intermédiaire. Alors :*

(1) $(E : K)$ fini $\Rightarrow$ $(E : F)$ fini et $(F : K)$ fini.

(2) $(E : K)$ fini $\Rightarrow$ $(E : K) = (E : F) \cdot (F : K)$ (tab. A).

Ce théorème permet d'affirmer que toute extension de corps dont le degré est un nombre premier n'admet pas de corps intermédiaire propre.

Tout nombre entier admettant un nombre fini de diviseurs, ce même théorème montre qu'il existe un nombre fini de degrés distincts possibles pour les corps intermédiaires d'une extension finie.

Rem. : Cette dernière propriété ne signifie pas que le nombre des corps intermédiaires soit fini (*cf.* p. 101, théorème 6, ou p. 107). Si le nombre des corps intermédiaires est infini, alors il y aura une infinité de corps intermédiaires d'un même degré.

Construction de corps intermédiaires, adjonction à un corps

Le procédé général de construction des corps intermédiaires est le suivant :

Déf. 3 : Soit A un sous-ensemble d'une extension E du corps K. Alors il y a un plus petit corps intermédiaire contenant A : c'est l'intersection de tous les sous-corps de E qui contiennent A et K (p. 81). Ce corps obtenu par *l'adjonction de A à K* sera noté $K(A)$. Si $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est fini, alors on emploie aussi la notation $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

En tant que corps, $K(A)$ contient, outre K et A, tous les éléments formés par addition, soustraction, multiplication et division d'éléments de K et A. Les éléments formés de cette manière sont appelés expressions rationnelles d'éléments de A et K. On peut démontrer que l'ensemble de ces expressions rationnelles forme un corps K'. Par construction $K' \subseteq K(A)$. Or K' est un corps contenant K et A. Donc $K(A) \subseteq K'$. Finalement $K(A) = K'$: $K(A)$ est le corps de toutes les expressions rationnelles d'éléments de K et A.

Théorème 2 : *Soit E une extension du corps K et $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, alors :*

(1) $K(A)(B) = K(B)(A) = K(A \cup B)$

(2) $A \subseteq (B) \Rightarrow K(A) \subseteq K(B)$

(3) $K(A) = \bigcup_{T \subseteq A} K(T)$ (T fini)

Rem. : D'après (1), l'adjonction d'un ensemble fini de n éléments peut être remplacée par n adjonctions successives d'un seul élément :

$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = K(\alpha_1)(\alpha_2) \ldots (\alpha_n)$.

(3) signifie que l'adjonction d'un sous-ensemble quelconque peut se ramener à l'adjonction d'ensembles finis.

Toute extension finie d'un corps K peut être obtenue par l'adjonction à K d'un système générateur (p. 87). Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ un système générateur de E considéré comme K-espace vectoriel, alors d'après la définition 3, $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq E$. Mais on a également $E \subseteq K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ car $x \in E \Rightarrow x = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \alpha_\nu$ avec $\lambda_\nu \in K \Rightarrow x \in K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ainsi :

Théorème 3 : *Si E est une extension finie d'un corps K et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une base (ou un système générateur) de E sur K, alors $E = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.*

Exemples : (1) $\{1, \mathrm{i}\}$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, d'où $\mathbb{C} = \mathbb{R}(1, \mathrm{i})$. Comme $1 \in \mathbb{R}$, on a : $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\mathrm{i})$. $\mathbb{C}$ est l'extension de corps obtenue par adjonction de i à $\mathbb{R}$.

(2) De même, on peut construire de vrais corps intermédiaires entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ par l'adjonction de réels non rationnels à $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ par exemple est un de ces corps intermédiaires (tab. B).

De manière générale, pour $m \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{x \mid x = a + b\sqrt{m}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps intermédiaire de degré 2 sur $\mathbb{Q}$.

(3) Des corps de degré supérieur peuvent être construits par exemple par adjonctions successives de plusieurs réels (tab. C).

Rem. : Les exemples (1) à (3) montrent que des extensions finies peuvent être construites par adjonction d'un sous-ensemble extrait d'une base (*cf.* théorème 3).

f

$K[X]$ → $K[\alpha]$

s ↓ ↗ i

$K[X] / \operatorname{Ker} f$

$f : K[X] \to K[\alpha]$ définie par $P(X) \mapsto P(\alpha)$
est un homomorphisme d'anneaux surjectif par construction de $K[X]$.

$\operatorname{Ker} f = \{P(X) \mid P(X) \in K[X] \wedge P(\alpha) = 0\}$
est l'ensemble de tous les polynômes de $K[X]$ admettant α pour racine.

Le théorème d'homomorphisme (p. 82) montre que :
$K[X] / \operatorname{Ker} f \cong K[\alpha]$.

$K[\alpha]$ anneau intègre $\Longrightarrow K[X] / \operatorname{Ker} f$ anneau intègre $\Longrightarrow \operatorname{Ker} f$ idéal premier de $K[X]$ (th. 3, p. 83).

$\Rightarrow \begin{cases} K[X] / \operatorname{Ker} f \cong K[\alpha] \text{ est un corps pour } \operatorname{Ker} f \neq \{0\} \\ K[X] \cong K[\alpha] \text{ n'est pas un corps pour } \operatorname{Ker} f = \{0\} \end{cases}$ (conséquence du théorème 7, p. 83).

$\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$	$\operatorname{Ker} f = \{0\}$
⇕	⇕
α est racine d'un polynôme non-nul de $K[X]$ (α algébrique sur K)	α n'est racine d'aucun polynôme non nul de $K[X]$ (α transcendant sur K)
⇕	⇕
$K[\alpha] \cong K(\alpha)$	$K[\alpha] \cong K[X]$
$K[\alpha]$ est donc un corps.	$K[\alpha]$ est un anneau intègre, mais n'est pas un corps. $K(\alpha)$ est isomorphe au corps des fractions de $K[X]$.

A

Extension de corps simple $K(\alpha)$

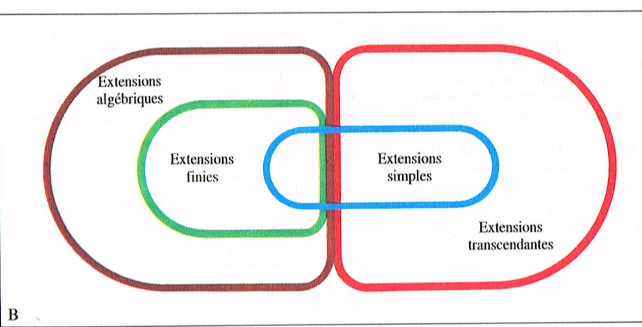


Schéma récapitulatif

Le cas le plus simple est celui de l'extension d'un corps obtenue par adjonction d'un seul élément.

Extension simple

Déf. 4 : Une extension E du corps K est dite *simple* lorsqu'il existe $\alpha \in E$ tel que $E = K(\alpha)$. α est alors appelé *élément primitif*.

Ex. : $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ sont des extensions simples (p. 99).

D'après la définition, $K(\alpha)$ est le plus petit corps contenant l'anneau intègre $K[\alpha]$

($K[\alpha] = \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \alpha^\nu \mid \lambda_\nu \in K, n \in \mathbb{N} \right\}$, p. 95), donc $K(\alpha)$ est le corps des fractions de $K[\alpha]$. Ainsi :
$K(\alpha) = \{ab^{-1} \mid a, b \in K[\alpha] \wedge b \neq 0\}$ (p. 81).

Caractérisation des extensions simples

Les extensions simples peuvent être caractérisées à l'aide de l'anneau des polynômes $K[X]$.

Théorème 4 : *Soit $K(\alpha)$ une extension simple du corps K. Ou bien $K(\alpha) = K[\alpha]$ ($\Leftrightarrow \alpha$ algébrique sur K), ou bien $K(\alpha)$ est isomorphe au corps des fractions rationnelles de l'indéterminée X sur K($\Leftrightarrow \alpha$ transcendant sur K).*

On considère l'application $f : K[X] \to K[\alpha]$ définie par $P(X) \mapsto P(\alpha)$. C'est un homomorphisme d'anneaux surjectif, donc (tab. A) :
$K[X] / \operatorname{Ker} f \cong K[\alpha]$.
Si $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, c.-à-d. α algébrique sur K (p. 97), alors $K[X] / \operatorname{Ker} f$ est un corps. Par isomorphisme, on a donc $K(\alpha) = K[\alpha]$.
Si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, c.-à-d. α transcendant sur K (p. 97), alors $K[\alpha]$ est isomorphe à $K[X]$, et donc n'est pas un corps. $K(\alpha)$ est alors isomorphe au corps des fractions rationnelles de l'indéterminée X sur K (p. 81).

Extensions simples finies

I. Soit $E = K(\alpha)$ une extension simple finie, avec par exemple $(E : K) = n$. Les $n + 1$ éléments $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ sont donc linéairement dépendants sur K : cela signifie que α est racine d'un polynôme non nul $\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu X^\nu \in K[X]$, c'est-à-dire que α est algébrique sur K.

II. Réciproquement, si α est algébrique sur K, $K(\alpha)$ est une extension simple, et on montre facilement, à l'aide de la relation de BÉZOUT, que l'extension est finie. Le théorème 4 assure que $K(\alpha) = K[\alpha]$. Le polynôme minimal associé à α, $m_\alpha = \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu X^\nu \in K[X]$ (p. 97), avec $\sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu \alpha^\nu = 0$ et $\lambda_m = 1$, montre que $\alpha^m = -\sum_{\nu=0}^{m-1} \lambda_\nu \alpha^\nu$. Ainsi, tout élément de $K(\alpha)$ peut être représenté comme combinaison linéaire de $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}\}$. On a donc obtenu un système générateur fini de $K(\alpha)$, et $K(\alpha)$ est une extension finie de K.

Rem. : Les propriétés de $m_\alpha(X)$ (p. 97) permettent de montrer que $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}\}$ est une base de $K(\alpha)$ sur K. On a alors $(K(\alpha) : K) = \deg m_\alpha(X)$.

I et II impliquent :

Théorème 5 : *Une extension simple du corps K est finie si, et seulement si, l'élément primitif est algébrique sur K.*

On peut compléter ce théorème par le suivant, dû à STEINITZ :

Théorème 6 : *Une extension finie du corps K est simple si, et seulement si, elle n'admet qu'un nombre fini de corps intermédiaires.*

Extensions algébriques

Si E est une extension finie du corps K (non nécessairement simple), alors, de même qu'au I, tout élément de E est algébrique sur K.

Déf. 5 : Une extension E de K est dite *algébrique* si tout élément de E est algébrique sur K, *transcendante* dans le cas contraire.

Une extension finie est donc toujours algébrique. La réciproque n'est pas vraie en général, par exemple le corps des nombres algébriques $\mathbb{A}$ (p. 69) est algébrique sur $\mathbb{Q}$, mais de degré infini sur $\mathbb{Q}$ (voir ci-dessous). Toute extension E du corps K construite par adjonctions successives sur K d'éléments algébriques α_i ($i = 1, 2, \ldots n$) est de degré fini sur K (On obtient $E = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ par adjonctions successives des α_i).
Comme réciproquement, toute extension finie peut être construite par adjonction d'un nombre fini d'éléments algébriques (par exemple, par adjonction d'un système générateur, théorème 3, p. 99), il vient :

Théorème 7 : *Toute extension finie est algébrique. Une extension E du corps K est finie si, et seulement si, E peut être construite par adjonction à K d'un nombre fini d'éléments algébriques sur K.*

Clôture algébrique

Le sous-ensemble d'une extension E du corps K formé des éléments algébriques sur K est appelé clôture algébrique de K dans E. C'est un corps intermédiaire algébrique sur K.

Ex. : La clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ est le corps $\mathbb{A}$ des nombres algébriques (p. 69). $\mathbb{A}$ n'est pas une extension finie de $\mathbb{Q}$, car il y a dans $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes irréductibles de degré quelconque (p. 97), si bien que $\mathbb{A}$ n'admet aucun système générateur fini sur $\mathbb{Q}$. Par conséquent, $\mathbb{A}$ ne peut pas être une extension finie de $\mathbb{Q}$.

Un corps K est dit *algébriquement clos* si pour toute extension E de K, la clôture algébrique de K dans E est égale à K. Le corps des nombres complexes, par exemple, possède cette propriété remarquable (p. 69).

Les corps finis (p.105) ne sont pas algébriquement clos. Cependant, on peut démontrer que tout corps admet un sur-corps algébriquement clos (KRONECKER-STEINITZ). La démonstration nécessite l'intervention du lemme de ZORN.

(1) Anneau quotient $K[X] / (f(X))$

Soit $f(X) \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré $n > 1$ et $(f(X))$ l'idéal principal engendré par ce polynôme (p. 83). La relation d'équivalence R permettant de définir l'anneau quotient $K[X] / (f(X))$ (p. 75) est définie par : $p(X)\, R\, q(X) :\Leftrightarrow q(X) - p(X) \in (f(X))$. Un élément de $K[X] / (f(X))$ sera ainsi défini par la classe $[\![p(X)]\!] = \{q(X) \mid q(X) - p(X) = h(X) f(X) \wedge h(X) \in K[X]\}$.

On désigne par A l'ensemble constitué du polynôme nul ainsi que de tous les polynômes de degré strictement inférieur à n :

$$A := \{r(X) \mid r(X) = \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu X^\nu \in K[X]\}$$

(a) Dans toute classe de $K[X] / (f(X))$, il y a *au plus un* polynôme de A, car pour deux polynômes distincts $p_1(X)$ et $p_2(X)$ d'une même classe, on doit avoir $\deg(p_1(X) - p_2(X)) \geq n$. Mais il existe également *au moins un* polynôme de A dans chaque classe, car à tout $g(X) \in [\![p(X)]\!]$ peut être associé par l'algorithme de la division de $g(X)$ par $f(X)$ (p. 96) un reste unique $r(X)$: $g(X) = q(X) f(X) + r(X)$, tel que $r(X) \in A$. De $g(X) - r(X) = q(X) f(X)$ on déduit que $g(X)$ et $r(X)$ définissent une même classe dans $K[X] / (f(X))$. Toute classe de $K[X] / (f(X))$ contient donc *exactement un* polynôme de A. Tout polynôme de A devient ainsi un représentant particulier pour une classe. Comme de plus tout polynôme de A est aussi dans une classe, il vient :

L'ensemble A est un système de représentants complet de $K[X] / (f(X))$.

(b) On peut remarquer que finalement

Les polynômes d'une même classe sont ceux qui admettent le même reste $r(X)$ dans leur division par $f(X)$.
On désigne généralement un élément de $K[X] / (f(X))$ par classe résiduelle modulo $f(X)$ et $K[X] / (f(X))$ par anneau des classes résiduelles modulo $f(X)$.

Rem. : Un calcul concernant les classes modulo $f(X)$ peut être ramené à un calcul entre éléments de A, si lors de chaque multiplication, le degré des polynômes obtenus est réduit dès qu'il est $\geq n$.

(c) D'après les théorèmes 5 et 7, p. 83, $K[X] / (f(X))$ est un corps si, et seulement si, $(f(X))$ est un idéal premier (Déf. 7, p. 83). Si $f(X)$ est irréductible, $(f(X))$ est un idéal premier, car $K[X]$ est un anneau euclidien, donc factoriel (p. 117).

On a ainsi : Pour tout polynôme irréductible $f(X)$, $K[X] / (f(X))$ est un corps.

Rem. : Si $f(X)$ n'est pas irréductible, $K[X] / (f(X))$ n'est pas intègre et ne peut donc être un corps.

(2) Existence d'un sous-corps de $K[X] / (f(X))$ isomorphe à K

Soit $K' := \{[\![a]\!] \mid a \in K\}$. Alors, l'application $\varphi : K \to K'$, définie par $a \mapsto [\![a]\!]$ est un isomorphisme de K sur K' muni des lois induites d'addition et de multiplication. K' est un corps isomorphe à K :

$$K' \cong K$$

(3) Existence d'une racine de $f(\widehat{X})$ dans $K[X]/ (f(X))$

Puisque $K' \cong K$, on peut immerger K dans le corps $K[X] / (f(X))$ par identification à K' et considérer $f(\widehat{X}) = a_0 + a_1 \widehat{X} + \cdots + a_n \widehat{X}^n$ comme élément de $K'[\widehat{X}] \subset [K[X] / f(X))][\widehat{X}]$. En posant $\alpha = [\![X]\!]$, on a : $f(\alpha) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \alpha^n = [\![a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n]\!] = 0$.

α est donc racine de f dans le corps des classes :

Dans $K[X] / (f(X))$, $f(\widehat{X})$ possède une racine.

(4) $K[X] / (f(X))$ comme extension simple

Dans $K[X] / (f(X))$, on considère le sous-corps $K'(\alpha)$ avec $\alpha = [\![X]\!]$. Puisque α est algébrique, le théorème 4, p. 101 implique : $K'(\alpha) = K[\alpha]$.

Soit maintenant un élément quelconque $[\![r(X)]\!] \in K[X] / (f(X))$ avec $r(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n-1} X^{n-1} \in A$.

On a $[\![r(X)]\!] = [\![\lambda_0]\!] + [\![\lambda_1]\!] [\![X]\!] + \cdots + [\![\lambda_{n-1}]\!] [\![X]\!]^{n-1} \in K'(\alpha)$.

Il vient alors :

$$K[X] / (f(X)) = K'(\alpha) = K'[\alpha].$$

Démonstration du théorème 8

Corps de décomposition d'un polynôme

$\mathbb{C}$ a été introduit comme la plus petite extension du corps $\mathbb{R}$ contenant une racine du polynôme $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ (p. 65). On peut alors se demander si, pour tout polynôme de degré ≥ 1 à coefficients dans un corps K, on peut construire une extension E du corps K dans laquelle ce polynôme admette une racine.

On se ramène au cas d'un polynôme de degré ≥ 1 irréductible dans K, puisque tout polynôme peut être décomposé en produit de facteurs irréductibles (p. 96). Lorsque $\deg P(X) = 1$, la racine de P appartient à K, donc K est le corps de décomposition recherché. Lorsque $\deg P(X) > 1$, on a le théorème suivant :

Théorème 8 : *Si $P(X) \in K[X]$ est un polynôme irréductible de degré > 1, alors :*

(1) L'anneau quotient $K[X] / (P(X))$, où $(P(X))$ représente l'idéal principal engendré par $P(X)$, est un corps.

(2) K peut être identifié à un sous-corps K' de $K[X] / (P(X))$.

(3) Dans $K[X] / (P(X))$, P possède une racine α.

(4) $K[X] / (P(X)) = K'(\alpha) = K'[\alpha]$ (extension algébrique simple).

La *démonstration* se trouve dans le tableau A.

On peut construire, pour tout polynôme de degré $n > 1$ $P(X) \in K[X]$, des extensions de corps successives qui contiennent K, et dans lesquelles le polynôme peut être décomposé en facteurs dont les degrés vont en diminuant pour aboutir à :

$P(X) = a_n (X - \alpha_1)^{r_1} \ldots (X - \alpha_s)^{r_s}$ (*cf.* p. 96).

Déf. 6 : Soit E une extension du corps K dans laquelle $P(X) \in K[X]$ peut être décomposé en facteurs du premier degré. Le plus petit corps intermédiaire possédant cette propriété est appelé *corps de décomposition* de $P(X)$ sur K.

Tout polynôme possède un corps de décomposition. D'après le théorème 7, p. 101, c'est une extension finie du corps des coefficients du polynôme. De plus, deux corps de décomposition d'un même polynôme, contenus dans deux extensions de corps distinctes ou non, sont toujours isomorphes. On peut donc considérer *le* corps de décomposition d'un polynôme.

Théorème 9 : *Tout polynôme $P(X) \in K[X]$ possède un corps de décomposition, unique à un isomorphisme près. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont les racines de $P(X)$, alors $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ est le corps de décomposition de $P(X)$.*

Ex. : $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\mathrm{i})$ est le corps de décomposition de $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$, de même $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ pour $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\right)$ pour $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

Pour beaucoup de problèmes (par exemple la théorie de Galois, p. 107), il est important de connaître le degré du corps de décomposition, considéré comme extension du corps des coefficients. Lorsque le corps de décomposition est une extension simple $K(\alpha)$, $(K(\alpha) : K)$ est le degré m du polynôme minimal $m_\alpha(X)$ associé à α. Ce polynôme est un élément de $K[X]$, unitaire et irréductible : α est une de ses racines et $(1, \alpha, \ldots, \alpha^{m-1})$ est une base de $K(\alpha)$ sur K (Rem. p. 101).

Ex. : (a) $(\mathbb{C} : \mathbb{R}) = 2$ avec $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\mathrm{i})$ car $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ est le polynôme minimal associé à i, de même $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}) = 2$ puisque $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ est le polynôme minimal associé à $\sqrt{2}$.

(b) Le corps de décomposition de $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ est l'extension simple $\mathbb{Q}(\zeta)$, avec $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{C}$. En effet, ζ est une *racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité*, c'est-à-dire que $\zeta^0, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$ sont exactement les n racines de $X^n - 1$.

D'une manière générale, les puissances successives de $\omega_{qp} = \cos\frac{2p\pi}{q} + \mathrm{i}\sin\frac{2p\pi}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, décrivent l'ensemble des q racines $q^{\text{ièmes}}$ complexes de l'unité si, et seulement si, p et q sont premiers entre eux. Dans ce cas, on dit que ω_{qp} est une racine primitive $q^{\text{ième}}$ de l'unité. Si p et q ne sont pas premiers entre eux, $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ avec p' et q' premiers entre eux ($q' > 0$). Alors $\omega_{qp} = \omega_{q'p'}$ est une racine primitive $q'^{\text{ième}}$ de l'unité, q' étant un diviseur de q.

On appelle polynôme cyclotomique d'ordre k le polynôme $\Phi_k(X) = \prod_\nu (X - \eta_{k\nu})$, où $\eta_{k\nu}$ parcourt l'ensemble des racines primitives $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Ainsi $\Phi_1 = X - 1$, $\Phi_2 = X + 1$, $\Phi_3 = X^2 + X + 1$, etc. On démontre que tous les polynômes cyclotomiques appartiennent à $\mathbb{Q}[X]$ et sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$. Le degré de Φ_k est le nombre des racines primitives $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité : il est donné par la fonction d'Euler φ (p. 119). On peut décomposer $X^n - 1$ en produit de facteurs unitaires irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$. On obtient

$$X^n - 1 = \prod_{k \mid n} \Phi_k(X)$$

où k parcourt l'ensemble des diviseurs de n. On voit que le corps de décomposition $\mathbb{Q}(\zeta)$ de $X^n - 1$ est de dimension $\varphi(n)$ puisque ζ est racine de $\Phi_n(X)$, de degré $\varphi(n)$, irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et donc polynôme minimal de ζ.

Polynômes séparables

En décomposant un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ en facteurs irréductibles, on constate que les facteurs qui apparaissent ne possèdent que des racines simples dans $\mathbb{C}$. On parle alors de polynôme séparable.

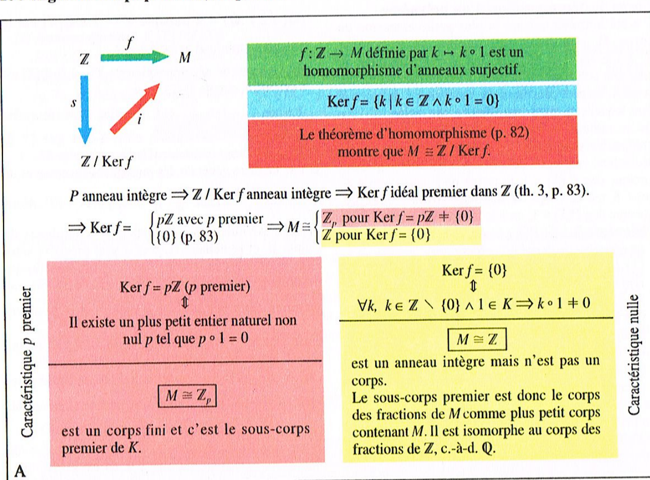
Déf. 7 : Un polynôme $P(X) \in K[X]$ de degré ≥ 1 est dit *séparable* si tout facteur irréductible de $P[X]$ ne possède que des racines simples dans son corps de décomposition.

K est dit *parfait* si tout polynôme de $K[X]$ de degré ≥ 1 est séparable.

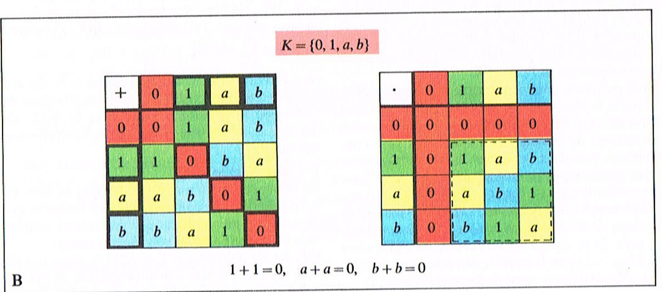
Pour déterminer si un polynôme est ou non séparable, le critère suivant est très utile :

Théorème 10 : *Un polynôme $P(X) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu X^\nu \in K[X]$, irréductible sur K et tel que son polynôme dérivé* (p. 96) *$P'(X) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu X^{\nu-1}$ soit non nul, n'admet que des racines simples dans son corps de décomposition.*

Dans un corps de caractéristique nulle (p. 105), on a $\nu a_\nu \neq 0$ pour $a_\nu \neq 0$ et $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $P'(X) \neq 0$ pour tout polynôme irréductible $P(X)$. Le théorème 10 implique donc :



Corps premier, caractéristique, classification des corps



+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

·	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Corps de caractéristique 2 à 4 éléments

(Suite de la page 103)

Théorème 11 : *Tout corps de caractéristique nulle est parfait.*

Ex. : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont parfaits. Le polynôme $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ est donc séparable.

Rem. : Tout corps fini est également parfait, bien qu'admettant une caractéristique non nulle. Des polynômes non séparables ne pourront donc éventuellement se présenter que si le corps de leurs coefficients est infini et de caractéristique non nulle (p. 105). Si on a affaire à un tel corps, une condition nécessaire pour que le polynôme $P(X)$ ne soit pas séparable est que son polynôme dérivé $P'(X)$ soit nul.

Dans ce chapitre, un corps K n'est pas supposé a priori commutatif.

Corps premier

Déf. 1 : Un corps est dit *premier* s'il n'admet pas d'autre sous-corps que lui-même.

Ex. : $\mathbb{Q}$ est premier par construction, comme plus petit corps contenant $\mathbb{Z}$. Le corps des entiers modulo p, $\mathbb{Z}_p$, où p est un nombre premier, est également un corps premier, car ses seuls sous-groupes additifs sont $\mathbb{Z}_p$ et $\{[\![0]\!]\}$ (p. 83).

Tout corps contient exactement un sous-corps premier, qui s'identifie à l'intersection de tous ses sous-corps (p. 81, th. 1). Il est clair que ce corps est également le plus petit sous-corps contenant 0 et 1. On va montrer qu'il est isomorphe soit à l'un des corps $\mathbb{Z}_p$ soit au corps $\mathbb{Q}$.

Construction du sous-corps premier d'un corps K

On considère, dans un corps $(K\,;+\,,\cdot)$, l'ensemble M des multiples $k \circ 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) de $1 \in K$, définis par :

$$k \circ 1 = \begin{cases} 1 + \ldots + 1 \quad (k \quad \textit{fois}) & \textit{pour } k \in \mathbb{Z}^*_+ \\ 0 & \textit{pour } k = 0 \\ -(1 + \ldots + 1)\,(-k \quad \textit{fois}) & \textit{pour } k \in \mathbb{Z}^*_- \end{cases}$$

M est fermé pour l'addition et la multiplication dans K, les règles de calcul étant :
$k \circ 1 + l \circ 1 = (k + l) \circ 1$
$(k \circ 1) \cdot (l \circ 1) = (kl) \circ 1$
M a donc une structure d'anneau commutatif unitaire, intègre puisque K l'est.

Le tableau A montre que s'il existe un $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tel que $k \circ 1 = 0$, alors M est un corps, et donc le sous-corps premier recherché. Dans ce cas, le sous-corps premier est fini et isomorphe à l'un des corps $\mathbb{Z}_p$.

Dans le cas contraire, M est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Le corps des fractions de M est le sous-corps premier recherché et il est isomorphe à $\mathbb{Q}$. En résumé :

Théorème 1 : *Le sous-corps premier d'un corps K est, à un isomorphisme près, soit le corps des entiers modulo p, $\mathbb{Z}_p$, soit le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.*

Caractéristique d'un corps

L'énoncé du théorème 1 va permettre de classer les corps selon que leur corps premier est ou non fini (fig. B).

Déf. 2 : Un corps est dit *de caractéristique p* (p premier) si son corps premier est isomorphe au corps $\mathbb{Z}_p$. Sinon, son corps premier est isomorphe à $\mathbb{Q}$ et on lui attribue la caractéristique 0.

Un corps est de caractéristique p si, et seulement si, il existe un plus petit entier naturel non nul p tel que $p \circ 1 = 0$ (*cf.* tab. A). Cette condition impose bien que p soit premier, car si $p = p'p''$, $p' > 1$, $p'' > 1$, la condition $(p'\,p'') \circ 1 = 0$ équivaudrait à $(p' \circ 1) \cdot (p'' \circ 1) = 0$, soit $(p' \circ 1) = 0 \vee (p'' \circ 1 = 0)$ et p ne serait pas le plus petit.

Ex. : Le tableau C donne les tables d'opérations d'un corps de caractéristique 2. Les corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont de caractéristique nulle.

Un corps de caractéristique p possède les propriétés suivantes :
(1) $p \circ a = 0$ pour tout $a \in K$,
(2) $n \circ a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee n = q \cdot p$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $a \in K$,
et s'il est commutatif :
(3) $(a + b)^p = a^p + b^p$, $(a - b)^p = a^p - b^p$, $(ab)^p = a^p \cdot b^p$, pour tous $a, b \in K$.

Conséquence :
La propriété (3) montre que l'application $\sigma : K \to K$ définie par $a \mapsto a^p$ dans un corps K commutatif de caractéristique p est un homomorphisme de corps injectif. Lorsque K est fini, σ est surjectif, c'est donc un automorphisme de K.

Corps finis

L'étude des corps finis remontant à GALOIS, ces derniers sont également appelés *champs de GALOIS.*

Ex. : Le corps des entiers modulo p, le corps défini au tableau C.

Les corps finis sont toujours de caractéristique non nulle, car ils ne peuvent pas contenir de sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$. Par ailleurs, ils sont toujours commutatifs (WEDDERBURN).

Tout corps fini de caractéristique p peut donc être considéré comme une extension finie de son corps premier P. Si $(K : P) = r$ et si $\{\alpha_1, \ldots \alpha_r\}$ est une base de K considéré comme P-espace vectoriel, alors il existe une application bijective $f : K \to P^r$ définie par

$$x = \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \alpha_\nu (\lambda_\nu \in P) \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_r).$$ On a donc card (K) = card $(P^r) = p^r$. Ainsi :

Théorème 2 : *La caractéristique d'un corps fini K étant un nombre premier p, K possédera p^r éléments, si r est le degré de K relativement à son sous-corps premier.*

La démonstration précédente ne faisant pas intervenir les propriétés du corps premier, on peut la généraliser :

Théorème 3 : *Si E est une extension finie d'un corps fini K telle que* $(E : K) : n$ *et* card $(K) = q$, *alors* card $(E) = q^n$.

Existence de corps finis

L'étude des corps finis est grandement facilitée par le théorème suivant :

Théorème 4 : *Deux corps finis de même cardinal sont isomorphes.*

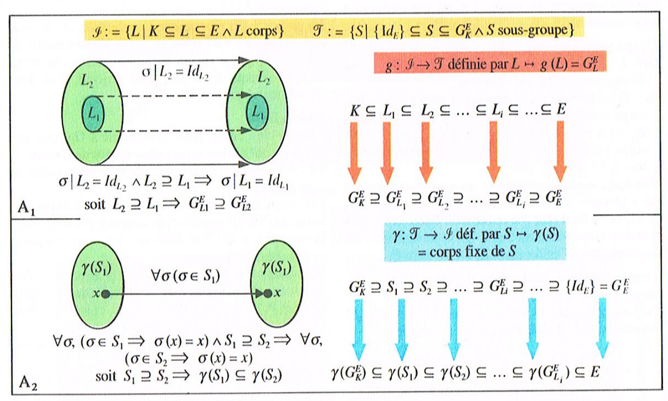
Ce théorème repose sur la propriété suivante : dans le groupe multiplicatif $K \setminus \{0\}$ de cardinal $p^r - 1$, on a, pour tout $\alpha \in K \setminus \{0\}$, $\alpha^{p^r - 1} = 1$. Par suite, $\alpha^{p^r} - \alpha = 0$ pour tout $\alpha \in K$, donc tous les éléments de K sont racines du polynôme $X^{p^r} - X \in P[X]$ (P désigne le corps premier). K est donc défini, à un isomorphisme près, comme corps de décomposition du polynôme $X^{p^r} - X$.

Ex. : À un isomorphisme près, il n'existe qu'un seul corps dont le nombre d'éléments soit 2 ($\mathbb{Z}_2$), 3 ($\mathbb{Z}_3$), 4 (le corps décrit par le tableau C), 5 ($\mathbb{Z}_5$), etc.

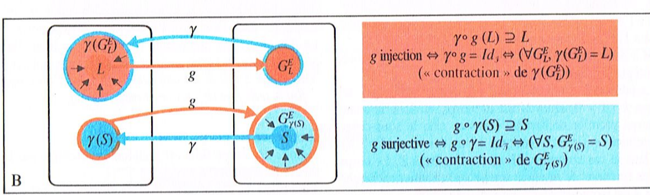
On peut maintenant se demander s'il existe, pour toute puissance de nombre premier p^r ($r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), un corps K de cardinal p^r. Pour $r = 1$, on connaît le corps des entiers modulo p : $\mathbb{Z}_p$. Lorsque r est quelconque, on considère une extension E du corps $\mathbb{Z}_p$ dans laquelle le polynôme $X^{p^r} - X \in \mathbb{Z}_p[X]$ se décompose entièrement en facteurs du premier degré. L'ensemble K de toutes les racines dans E de $X^{p^r} - X$ forme alors un corps à p^r éléments. Avec le théorème 4, il vient donc :

Théorème 5 : *À toute puissance p^r d'un nombre premier p, on peut associer un corps de cardinal p^r, unique à un isomorphisme près.*

Rem. : Finalement, on peut considérer que les corps finis sont fondamentalement connus puisqu'ils sont déterminés par leur corps premier $\mathbb{Z}_p$ et leur degré r par rapport à $\mathbb{Z}_p$.



Correspondance entre corps intermédiaires et sous-groupes



Bijectivité de l'application de GALOIS g

$E := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une extension finie galoisienne de $\mathbb{Q}$, de groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}}^E = V_4$ (groupe de Klein à 4 éléments, p. 38, fig. B).

a) $(E : \mathbb{Q}) = 4$.

$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ est une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ considéré comme $\mathbb{Q}$ espace vectoriel d'où $(E : \mathbb{Q}) = 4$ et $x \in E \Leftrightarrow x = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2} + \alpha_3\sqrt{3} + \alpha_4\sqrt{6} \wedge \alpha_i \in \mathbb{Q}$ (*cf.* p. 98).

b) $G_{\mathbb{Q}}^E = V_4$.

Comme $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}^E \Rightarrow \sigma \mid \mathbb{Q} = Id_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \forall x\,(\sigma(x) = \alpha_1 + \alpha_2\,\sigma(\sqrt{2}) + \alpha_3\,\sigma(\sqrt{3}) + \alpha_4\,\sigma(\sqrt{2})\,\sigma(\sqrt{3}))$,
$\sigma \in G_{\mathbb{Q}}^E$ est défini de façon unique par $\{\sigma(\sqrt{2}), \sigma(\sqrt{3})\}$.

Or σ est un homomorphisme ; on a donc de plus $\sigma^2(\sqrt{2}) = 2$, $\sigma^2(\sqrt{3}) = 3$, d'où :

$$\sigma(\sqrt{2}) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}, \quad \sigma(\sqrt{3}) \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\} \quad \text{et donc card } G_{\mathbb{Q}}^E \leqslant 4.$$

Quatre automorphismes peuvent ainsi être définis par :

$\sigma_0(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$	$\sigma_1(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$	$\sigma_2(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$	$\sigma_3(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$
$\sigma_0(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$	$\sigma_1(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$	$\sigma_2(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$	$\sigma_3(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

On a donc $G_{\mathbb{Q}}^E = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = V_4$ (*cf.* p. 38, fig. B).

c) $\gamma(G_{\mathbb{Q}}^E) = \mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q} \subseteq \gamma(G_{\mathbb{Q}}^E)$ est toujours vérifié (fig. B). Il reste à montrer $\gamma(G_{\mathbb{Q}}^E) \subseteq \mathbb{Q}$.

$$x \in \gamma(G_{\mathbb{Q}}^E) \Rightarrow \forall i\,(\sigma_i(x) = x) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2\sqrt{2} + \alpha_4\sqrt{6} = 0 \\ \alpha_3\sqrt{3} + \alpha_4\sqrt{6} = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \quad \text{soit } x \in \gamma(G_{\mathbb{Q}}^E) \Rightarrow x = \alpha_1 \in \mathbb{Q}.$$

C

Exemple d'extension finie galoisienne

Tous les corps qui interviennent ici sont supposés commutatifs.

La théorie de GALOIS permet entre autres d'aborder le problème de la résolution des équations algébriques par les radicaux ainsi que certains problèmes de construction géométrique, par exemple la quadrature du cercle (pp. 113-115). Cette théorie nécessite la construction d'une *extension* d'un corps de base K (p. 99). L'étude de cette extension s'intéresse d'abord aux corps intermédiaires. La théorie de GALOIS (théorème fondamental) montre que dans le cas particulier de l'*extension finie galoisienne* (voir ci-dessous), les corps intermédiaires peuvent être décrits à l'aide de la théorie des groupes. Des problèmes relevant de la théorie des corps peuvent ainsi être ramenés à des études de groupes.

Exposé du problème

Soit E une extension donnée du corps de base K et Aut (E) le groupe de ses automorphismes. Le sous-ensemble des automorphismes de E qui laisse fixe chacun des éléments d'une partie non vide de E est, comme on peut le voir facilement, un sous-groupe de Aut (E). En particulier :

Déf. 1 : L étant un sous-corps de E, $\sigma \in$ Aut (E) est appelé *L-automorphisme* de E si sa restriction à L est l'identité Id_L. L'ensemble des L-automorphismes de E est un sous-groupe de Aut (E) appelé *groupe de GALOIS de L* et noté G_L^E.

Parmi les sous-corps de E, il y a évidemment E, K, mais aussi P le sous-corps premier de E. P est d'ailleurs le sous-corps premier commun à tous les sous-corps de E, puisque P est engendré par la paire $\{0,1\}$, incluse dans tous les sous-corps de E. On remarquera que $G_E^E = \{Id_E\}$, $G_P^E = \text{Aut}(E)$ et qu'on a l'implication
$P \subseteq M \subseteq L \subseteq E \Rightarrow G_P^E \supseteq G_M^E \supseteq G_L^E \supseteq G_E^E$.

L'application f de l'ensemble $\mathscr{J}$ des sous-corps de E dans l'ensemble $\mathscr{S}$ des sous-groupes de Aut (E) :
$L \mapsto f(L) = G_L^E$ est décroissante pour les relations d'inclusion dans $\mathscr{J}$ et $\mathscr{S}$. On notera toutefois que la relation d'inclusion sur $\mathscr{J}$ n'est pas en général une relation d'ordre total comme le montre l'exemple $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{R}$ (donc $P = \mathbb{Q}$), $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $M = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Il en est de même pour la relation définie sur $\mathscr{S}$.

Déf. 2 : La restriction g de f à l'ensemble $\mathscr{J}$ des sous-corps intermédiaires au sens large compris entre K et E est appelée *application galoisienne* relative à K.

Bijectivité de l'application galoisienne

L'ensemble des éléments de E laissés fixes par un automorphisme σ de E est, on le vérifie aisément, un sous-corps $M(\sigma)$ de E. Si σ parcourt un sous-groupe S de Aut (E), $\bigcap_{\sigma \in S} M(\sigma)$ est un sous-corps de E. C'est le plus grand sous-corps invariant, point par point, sous chacun des éléments de S. On l'appelle le corps fixe de S. L'application φ de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{J}$ qui à tout $S \in \mathscr{S}$ associe son corps fixe : $S \mapsto \varphi(S)$ est

également décroissante pour les relations d'inclusion dans $\mathscr{J}$ et $\mathscr{S}$. Elle vérifie par ailleurs les deux propriétés :
$\forall L \in \mathscr{J}, \varphi(G_L^E) \supseteq L$ (1)
$\forall S \in \mathscr{S}, G_{\varphi(S)}^E \supseteq S$ (2)

On peut en déduire que f est bijective de $\mathscr{J}$ sur $\mathscr{S}$ si, et seulement si, les deux relations $\supseteq$ dans (1) et (2) sont des égalités. On a alors $f \circ \varphi = Id_{\mathscr{S}}$ et $\varphi \circ f = Id_{\mathscr{J}}$: f et φ sont réciproques l'une de l'autre.

On considère maintenant l'application g : $g(\mathscr{J})$ est incluse dans le sous-ensemble $\mathscr{T}$ des sous-groupes S de Aut (E) tels que $G_K^E \supseteq S \supseteq G_E^E$; g sera bijective de $\mathscr{J}$ sur $\mathscr{T}$ si, et seulement si, les relations (1) et (2) sont satisfaites avec le signe d'égalité pour tout $L \in \mathscr{J}$ et tout $S \in \mathscr{T}$. La restriction γ de φ à $\mathscr{T}$ devient alors la réciproque de g.

Extension finie galoisienne, th. fondamental

Théorème fond. : *Pour une extension finie* $((E : K) = n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$, *l'application galoisienne g est bijective si, et seulement si, le corps de base K est le corps fixe du sous-groupe de GALOIS* G_K^E.

Déf. 3 : E s'appelle alors une *extension finie galoisienne de K*.

Du théorème fondamental, on tire les conséquences :

(1) *Si E est une extension finie galoisienne de K, quel que soit le corps intermédiaire L (au sens large) entre K et E, L est le corps fixe de son groupe de GALOIS et par suite E est une extension finie galoisienne de L ;*
(2) $\forall L$, card $(G_L^E) = (E : L)$;
(3) *Quel que soit le sous-groupe S de* Aut (E) *inclus dans* G_K^E, *S est le groupe de GALOIS de son corps fixe ;*
(4) *L'ensemble des corps intermédiaires entre K et E est fini, car il est en bijection avec l'ensemble des sous-groupes de* Aut (E) *inclus dans* G_K^E *dont le cardinal n est fini.*

Critère polynomial pour les extensions finies galoisiennes

On montre dans le tableau C que le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une extension finie galoisienne de $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ peut également être caractérisé comme corps de décomposition de $(X^2 - 2)(X^2 - 3) \in \mathbb{Q}[X]$. Ce polynôme est séparable (p. 103) puisque ses facteurs irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ n'ont pas de racine multiple.

L'extension finie galoisienne $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est donc le corps de décomposition d'un polynôme séparable. Le fait que les extensions finies galoisiennes puissent toujours être décrites à partir des polynômes séparables provient du

Théorème 1 : *E est une extension finie galoisienne de K si, et seulement si, E est le corps de décomposition d'un polynôme séparable sur K.*

$E := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une extension finie galoisienne de $\mathbb{Q}$ avec $G_{\mathbb{Q}}^{E} = V_4$ (*cf.* tab. C, p. 106).

$\{Id_E\}$ — E

G_L^E — L — $\{Id_L\}$

Diviseur normal de — finie galoisienne sur

G_K^E — K — $G_K^L \cong G_K^E / G_L^E$

L'ordre de tout sous-groupe est un diviseur de l'ordre du groupe. Les seuls sous-groupes non triviaux seront donc d'ordre 2. Ce sont :

$S_1 = \{\sigma_0, \sigma_1\}$ $S_2 = \{\sigma_0, \sigma_2\}$ $S_3 = \{\sigma_0, \sigma_3\}$

À ces sous-groupes correspondent les corps intermédiaires :

$L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ $L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $L_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$

Comme corps de décomposition des polynômes séparables

$X^2 - 3$ $X^2 - 2$ $X^2 - 6$

tous les corps intermédiaires sont des extensions finies galoisiennes de $\mathbb{Q}$. D'autre part V_4 est abélien, donc tout sous-groupe est un diviseur normal de V_4. Il vient :

$$G_{\mathbb{Q}}^{L_1} = \{\sigma_0 | L_1, \sigma_2 | L_1\} \cong G_{\mathbb{Q}}^{E}/G_{L_1}^{E} = \{\sigma_0 G_{L_1}^{E}, \sigma_2 G_{L_1}^{E}\}$$
$$G_{\mathbb{Q}}^{L_2} = \{\sigma_0 | L_2, \sigma_1 | L_2\} \cong G_{\mathbb{Q}}^{E}/G_{L_2}^{E} = \{\sigma_0 G_{L_2}^{E}, \sigma_1 G_{L_2}^{E}\}$$
$$G_{\mathbb{Q}}^{L_3} = \{\sigma_0 | L_3, \sigma_3 | L_3\} \cong G_{\mathbb{Q}}^{E}/G_{L_3}^{E} = \{\sigma_0 G_{L_3}^{E}, \sigma_3 G_{L_3}^{E}\}$$

A

Diviseur normal d'un groupe de GALOIS

$$p(\sigma) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & ,\dots, & \alpha_r \\ \sigma(\alpha_1), & \dots, & \sigma(\alpha_r) \end{pmatrix}$$
$$p(\tau) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & ,\dots, & \alpha_r \\ \tau(\alpha_1), & \dots, & \tau(\alpha_r) \end{pmatrix}$$

(1) *p* injectif

$$p(\sigma) = p(\tau) \Rightarrow \forall i\ (\sigma(\alpha_i) = \tau(\alpha_i))$$
$$\forall i\ (\sigma(\alpha_i) = \tau(\alpha_i)) \Rightarrow \sigma = \tau$$

(2) *p* homomorphisme

$$p(\tau \circ \sigma) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & ,\dots, & \alpha_r \\ \tau\circ\sigma(\alpha_1), & \dots, & \tau\circ\sigma(\alpha_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & ,\dots, & \alpha_r \\ \sigma(\alpha_1), & \dots, & \sigma(\alpha_r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & ,\dots, & \alpha_r \\ \tau(\alpha_1), & \dots, & \tau(\alpha_r) \end{pmatrix} = p(\sigma) \cdot p(\tau)$$

(*cf.* p. 75)

B

Homomorphisme injectif $p : G_K^E \to S_r$

Soit $P(X) \in K[X]$ de degré n, admettant n racines deux à deux distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
Si $P(X)$ est factorisable sur K alors :
$P(X) = Q_1(X)\, Q_2(X) \cdot \dots$ ($Q_i(X)$ irréductible sur K). Soit $\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ l'ensemble de toutes les racines de $Q_i(X)$. Comme les racines de $Q_i(X)$ ont pour images les racines de $Q_i(X)$, il vient pour $\sigma \in G_K^E$:

$$p(\sigma) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12} & ,\dots, & \alpha_{21}, \alpha_{22} & ,\dots \\ \underbrace{\sigma(\alpha_{11}), \sigma(\alpha_{12}), \dots}_{\text{racines de } Q_1(X)}, & & \underbrace{\sigma(\alpha_{21}), \sigma(\alpha_{22}), \dots}_{\text{racines de } Q_2(X)} & \end{pmatrix} \in S_n$$

Classes de transitivité

Pour la permutation $\begin{pmatrix} \alpha_{11}, \dots \\ \alpha_{21}, \dots \end{pmatrix} \in S_n$, on ne peut toutefois associer aucun $\sigma \in G_K^E$ car α_{21} devrait appartenir à la classe de transitivité de $Q_2(X)$.

Une condition nécessaire pour que p soit surjective est donc qu'il n'existe qu'une seule classe de transitivité, c.-à-d. que $P(X)$ soit irréductible sur K.

C

Condition nécessaire pour $G_K^E \cong S_n$

Exemples : $f(X) = (X - x_1)(X - x_2) \Rightarrow f(X) = X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1 x_2$

$f(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) \Rightarrow f(X) = X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - x_1x_2x_3$

Généralisation : $f(X) = (X - x_1)(X - x_2) \cdot \dots \cdot (X - x_n) \Rightarrow$

$$f(X) = X^n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)X^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots)X^{n-2}$$
$$- (x_1x_2x_3 + \dots)X^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1}(x_1x_2 \dots x_{n-1} + x_1x_2 \dots x_{n-2}x_n + \dots + x_2x_3 \dots x_n)X$$
$$+ (-1)^n x_1x_2 \dots x_n \Rightarrow$$

$$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_1X + a_0 \text{ avec : } a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad a_{n-2} = \sum_{i<j}^{1\dots n} x_i x_j; \quad \dots;$$
$$a_r = (-1)^k \left(\sum_{\substack{r_1 < \dots < r_k \\ k = n-r}}^{1\dots n} x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_k} \right); \dots; \quad a_1 = (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_1 \dots \not{x_i} \dots x_n \right); \quad a_0 = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$$

Les a_i s'appellent les fonctions symétriques élémentaires en les indéterminées $x_1, \dots, x_n$. Elles sont invariantes sous toute permutation effectuée sur les x_i, d'où l'adjectif « symétrique ».

D

Fonctions symétriques élémentaires

Propriétés des extensions finies galoisiennes

(A) Soit E une extension finie galoisienne de groupe de GALOIS G_K^E. Alors, pour tout $\sigma \in G_K^E$, et tout corps intermédiaire L, le groupe de GALOIS du corps intermédiaire $\sigma[L]$ est
$G_{\sigma[L]}^{E} = \sigma G_L^E \sigma^{-1} = \{\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}, \tau \in G_L^E\}$

(B) Soit E une extension finie galoisienne de K, de groupe de GALOIS G_K^E et L un corps intermédiaire. On a alors (ex. tab. A) :

(1) L est une extension finie galoisienne de K si, et seulement si, G_L^E est un sous-groupe normal de G_K^E.

(2) Si L est une extension finie galoisienne de K, alors $G_K^L \cong G_K^E / G_L^E$.

(C) On note $A \overline{\cap} B$ le plus grand sous-corps commun aux deux sous-corps donnés A et B et $A \underline{\cup} B$ le plus petit sur-corps contenant ces deux sous-corps. Ces notions peuvent également s'adapter à des sous-groupes. Dans le cas d'une extension finie galoisienne, il vient :

$g(L_1 \overline{\cap} L_2) = G_{L_1}^E \underline{\cup} G_{L_2}^E$, $\gamma(S_1 \overline{\cap} S_2) = \gamma(S_1) \underline{\cup} \gamma(S_2)$,

$g(L_1 \underline{\cup} L_2) = G_{L_1}^E \overline{\cap} G_{L_2}^E$, $\gamma(S_1 \underline{\cup} S_2) = \gamma(S_1) \overline{\cap} \gamma(S_2)$.

Rem. : Munie des lois $\overline{\cap}$ et $\underline{\cup}$, les ensembles $\mathcal{J}$ et $\mathcal{T}$ sont des treillis complets (p. 27), si bien que l'application galoisienne g peut être interprétée comme un isomorphisme de treillis complets échangeant les lois $\overline{\cap}$ et $\underline{\cup}$.

Groupe de GALOIS d'un polynôme

Déf. 4 : Soit E le corps de décomposition du polynôme $P(X) \in K[X]$. G_K^E est alors appelé *groupe de GALOIS du polynôme $P(X)$*.

Théorème 2 : *Le groupe de GALOIS G_K^E d'un polynôme $P(X) \in K[X]$ de degré n est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_r ($r \leq n$) où r représente le nombre de racines deux à deux distinctes de $P(X)$.*

Démonstration : Si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ est l'ensemble des racines deux à deux distinctes de $P(X)$, alors $E = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ (th. 9, p. 103). $\sigma \in G_K^E$ est déterminé de façon unique par l'ensemble des images $\{\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_r)\}$. Cet ensemble coïncide avec $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ puisque σ est injective et $P(\alpha_i) = 0 \Rightarrow P(\sigma(\alpha_i)) = 0$. À tout $\sigma \in G_K^E$ peut donc être associée de façon unique une permutation

$$p(\sigma) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r \\ \sigma(\alpha_1) & \dots & \sigma(\alpha_r) \end{pmatrix} \in S_r \text{ (p. 75).}$$

Comme cette application $p : G_K^E \to S_r$ est un homomorphisme de groupes injectif (tab. B), on obtient le théorème 2.

Rem. : Si toutes les racines de P sont distinctes deux à deux, alors $G_K^E \cong p(G_K^E) \subseteq S_n$.
Une condition nécessaire pour que $G_K^E \cong S_n$ est que $P(X)$ soit irréductible et séparable sur K (tab. C).

Théorème 3 : *Soit*
$P(X) = (X - x_1) \dots (X - x_n) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in K(a_0, \dots, a_{n-1})[X]$ *où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont les fonctions symétriques élémentaires* (tab. D) *en les variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$. Alors le groupe de GALOIS de P est isomorphe au groupe symétrique S_n.*

Démonstration : $E = K(x_1, \dots, x_n)$ est le corps de décomposition de $P(X)$. Soit $L = K(a_0, \dots, a_{n-1})$. À l'aide du théorème 2 et de la remarque, on a $G_L^E \cong p(G_L^E) \subseteq S_n$. Il reste à prouver que p est surjective. *Chaque* permutation $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_{v_1} & \dots & x_{v_n} \end{pmatrix} \in S_n$ induit un automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}(E)$.
Comme les a_i sont symétriques en $x_1, \dots, x_n$, L reste invariant point par point, c.-à-d. $\sigma \in G_L^E$. p est donc surjective.
En raison de la remarque du théorème 2, $P(X)$ est irréductible et séparable sur $K(a_0, \dots, a_{n-1})$. Le corps de décomposition est une extension finie galoisienne de $K(a_0, \dots a_{n-1})$, avec un groupe de GALOIS isomorphe à S_n.

Groupe de GALOIS du polynôme unitaire général de degré *n*

Déf. 5 : $Q(X) = X^n + u_{n-1}X^{n-1} + \dots + u_1X + u_0 \in K(u_0, \dots u_{n-1})[X]$ est appelé *polynôme unitaire général de degré n*, où $u_0, \dots, u_{n-1}$ sont des indéterminées.

Le polynôme unitaire général est une notion correspondant à celle d'équation générale (p. 111). Aussi convient-il de préciser son groupe de GALOIS.

Théorème 4 : *Le polynôme unitaire général de degré n est irréductible et séparable sur $K(u_0, \dots, u_{n-1})$; son groupe de GALOIS est isomorphe à S_n.*

Groupe de GALOIS du polynôme $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$

Théorème 5 : *Le corps de décomposition $\mathbb{Q}(\zeta)$ de $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ (ζ racine primitive $n^{ième}$ de l'unité) est une extension finie galoisienne de $\mathbb{Q}$ et possède un groupe de GALOIS commutatif.*

Démonstration : $E := \mathbb{Q}(\zeta)$ est le corps de décomposition du polynôme $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ (p. 103) ; ainsi E est une extension finie galoisienne de $\mathbb{Q}$. $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}^E$ est déterminé de manière unique par $\sigma(\zeta)$. Comme $\sigma(\zeta)$ est aussi une racine primitive $n^{ième}$ de l'unité, il vient : $\sigma(\zeta) = \zeta^m$ où m et n sont premiers entre eux. À tout $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}^E$ peut être associée biunivoquement une classe d'équivalence $[\![m]\!]$ dans $\mathbb{Z}$ modulo n. Il y aura $\varphi(n)$ classes (fonction indicatrice d'EULER). L'ensemble de ces $\varphi(n)$ classes a une structure de groupe multiplicatif commutatif (dans l'anneau $\mathbb{Z}_n$), auquel $G_{\mathbb{Q}}^E$ est isomorphe. D'où le résultat.

Groupe de GALOIS d'un corps fini

Théorème 6 : *Toute extension finie E d'un corps fini K est galoisienne et possède un groupe de GALOIS cyclique.*

Démonstration : Soit $n = (E : K)$ et $q = \mathrm{card}(K)$. E contient exactement q^n éléments (p. 105, th. 3). E est le corps de décomposition du polynôme $X^{q^n} - X$ dont les q^n racines sont exactement les éléments de E (p. 105, th. 4). L'extension finie E de K est donc galoisienne.
$\sigma : E \to E$ définie par $x \mapsto x^q$ est un automorphisme de E (p. 105). $x^q = x$ pour tout $x \in K$, donc $\sigma|_K = Id_K$, soit $\sigma \in G_K^E$. Puisque $\mathrm{card}(G_K^E) = n$ (théorème fondamental), il existe $s \leq n$ tel que $\sigma^s = Id_E$, c.-à-d. $\sigma^s(x) = x^{q^s} = x$ pour tout x dans E. Il s'ensuit que l'on doit avoir $s = n$. Ainsi $G_K^E = \{Id_E, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}\}$ et est donc cyclique.

Équation du 3e degré

Forme normale		Forme réduite
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$	$x = z - \frac{a}{3}$ $\Leftarrow$	$z^3 + pz + q = 0$
$(a, b, c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$		$(p = b - \frac{1}{3}a^2, q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c)$

Si on remplace dans l'équation normale x par $z - \dfrac{a}{3}$, on obtient l'équation réduite. À toute solution z_0 de l'équation réduite correspond la solution $x_0 = z_0 - \dfrac{a}{3}$ de l'équation normale.

$$z^3 + pz + q = 0 \quad \overset{z = u + v}{\Leftarrow} \quad u^3 + v^3 + q = 0 \wedge 3uv + p = 0.$$

Pour $p = 0$, la résolution de l'équation réduite est triviale (voir ci-dessous).
Dans le cas $p \neq 0$, on pose $z = u + v$.
L'équation réduite devient $u^3 + v^3 + q + (3\,uv + p)\,(u + v) = 0$. Soit alors (u_0, v_0) une solution du système d'équations $u^3 + v^3 + q = 0 \wedge 3\,uv + p = 0$: on voit que $z_0 = u_0 + v_0$ est solution de l'équation réduite.
Par des transformations convenables on obtient le système d'équations suivant, équivalent au précédent :

$$u^3 = -\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3} \wedge 3uv + p = 0$$
$$(p = b - \tfrac{1}{3}a^2, q = \tfrac{2}{27}a^3 - \tfrac{1}{3}ab + c).$$

On est donc amené à résoudre une équation de la forme

$$u^3 = k \ (k \in \mathbb{C}).$$

Cette équation admet dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ les trois solutions :

$$u_1 = \sqrt[3]{k}, \quad u_2 = \varepsilon \cdot u_1, \quad u_3 = \varepsilon^2 \cdot u_1 \quad (\varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}).$$

l'équation $3\,uv + p = 0$ conduit aux valeurs v_1, v_2, v_3 correspondant à u_1, u_2, u_3. On obtient alors les solutions de l'équation réduite :

$$z_1 = u_1 + v_1 \quad \text{avec} \quad u_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} \quad \text{et} \quad v_1 = -\tfrac{p}{3u_1},$$
$$z_2 = u_2 + v_2 = \varepsilon \cdot u_1 + \varepsilon^2 \cdot v_1, \quad z_3 = u_3 + v_3 = \varepsilon^2 \cdot u_1 + \varepsilon \cdot v_1 \quad (\varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}).$$

(Méthode de CARDAN)

A

Résolution d'une équation du 3e degré

Équation du 4e degré

Forme normale		Forme réduite
$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$	$x = z - \frac{a}{4}$ $\Leftarrow$	$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$
$(a, b, c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$		$(p = b - \frac{3}{8}a^2,\ q = c - \frac{ab}{2} + \frac{1}{8}a^3,$ $r = d - \frac{ac}{4} + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4)$

Résolution de l'équation réduite

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0 \ \Leftarrow\ (z^2 + P)^2 - (Qz + R)^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ z^2 + P = Qz + R \vee z^2 + P = -Qz - R$$
$$(2P - Q^2 = p,\ -2QR = q,\ P^2 - R^2 = r).$$

Si $q = 0$, alors l'équation bicarrée $z^4 + pz^2 + r = 0$ peut être ramenée à des équations du second degré.
Si $q \neq 0$, il faut d'abord déterminer une solution (P_0, Q_0, R_0) du système : $2\,P - Q^2 = p \wedge -2\,QR = q \wedge P^2 - R^2 = r$. On a facilement (1), (2), (3). (4) s'obtient en observant que (1) · (2) = (3) · (3) :

$$(1)\quad Q^2 = \frac{q^2}{4(P^2 - r)} \qquad (2)\quad R^2 = P^2 - r, \qquad (3)\quad QR = -\tfrac{q}{2}, \qquad (4)\quad P^3 - \tfrac{p}{2}P^2 - rP + \tfrac{pr}{2} - \tfrac{1}{8}q^2 = 0.$$

À une solution P_0 de (4), on associe un couple (Q_0, R_0) de solutions de (1) et (2) satisfaisant (3). On obtient ainsi le système $z^2 + P_0 = Q_0\,z + R_0 \vee z^2 + P_0 = -Q_0\,z - R_0$. Les solutions de ce système sont les quatre solutions de l'équation réduite.

(Méthode de FERRARI)

B

Résolution d'une équation du 4e degré

Un facteur important du développement de la théorie de GALOIS est apparu avec le problème de la **résolution des équations par radicaux.**

La résolution dans le corps des complexes de l'équation générale du second degré $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$ ou même $p, q \in \mathbb{C}$, est bien connue. On opère par « extraction des racines » :

$$S = \left\{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right\}.$$

De telles opérations peuvent également être utilisées pour la résolution des équations générales de degré 3 et 4 (tab. A, B). On peut alors se demander si les équations générales de degré supérieur ou égal à cinq peuvent être résolues de la même manière. Le théorème d'ABEL (voir ci-dessous) prouve que ce n'est plus possible.

Exposé du problème

Remarque préliminaire : Pour faciliter les raisonnements, on supposera toujours que la caractéristique du corps K commutatif choisi comme corps de base est nulle (p. 105).

Déf. 1 : Soit K un corps et $u_0, \ldots, u_{n-1}$ des indéterminées. L'équation
$x^n + u_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + u_1\,x + u_0 = 0\ (n \in \mathbb{N})$
est appelée *équation générale de degré n* sur $K(u_0, \ldots, u_{n-1})$.

À toute équation générale de degré n correspond le *polynôme unitaire général de degré n* (*cf.* déf. 5, p. 109)
$g(X) = X^n + u_{n-1}\,X^{n-1} + \ldots + u_1\,X + u_0$
dans $K(u_0, \ldots, u_{n-1})\,[X]$.
Toute racine de $g(X)$ peut être considérée comme *solution* de l'équation générale.

Déf. 2 : L'équation $X^n - a = 0$ avec $a \in K$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est appelée *équation binôme* sur K. Les solutions sont appelées *radicaux* sur K. Elles peuvent nécessiter une extension de K.

Lors de la résolution des équations du second degré par les radicaux relativement à un corps de base K, on constate que chaque solution peut être représentée comme élément d'un corps obtenu par adjonction à $K(p, q)$ du radical $\sqrt{p^2 - 4q}$ (équation réduite $y^2 - p^2 + 4\,q = 0$).
Une telle extension de $K(p, q)$ est appelée *extension radicielle simple.* Pourtant, comme l'indique la résolution des équations de degré 3 et 4 (tab. A et B), les extensions radicielles simples ne sont pas suffisantes, car des expressions de la forme $\sqrt[n]{\ldots + \sqrt[m]{\ldots} + \sqrt[k]{\ldots} + \ldots}$ apparaissent. De telles expressions peuvent être décrites comme éléments d'adjonctions successives de radicaux à un corps.

Déf. 3 : Soit K un corps et $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_s = E$ une chaîne de corps. E est appelée *extension radicielle de K* si :
(1) $K_{i+1} = K_i\,(\alpha_i)$ pour $i \in \{0, \ldots, s-1\}$,
(2) α_i est un radical sur K_i.

Déf. 4 : L'équation générale de degré n est dite *résoluble par radicaux* lorsque le corps de décomposition du polynôme général de $n^{\text{ième}}$ degré est contenu dans une extension radicielle.

Pour une équation résoluble par radicaux, les zéros du polynôme associé (solutions de l'équation) peuvent être calculés à l'aide de radicaux. Par exemple, $K(p, q, \sqrt{p^2 - 4q}\,)$ est à la fois le corps de décomposition de $X^2 + pX + q$ et une extension radicielle de $K(p, q)$.
Le problème peut alors être reformulé de la manière suivante :
Le corps de décomposition du polynôme général de degré n est-il contenu dans une extension radicielle pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Condition nécessaire pour la résolution

À l'aide de la théorie de GALOIS, il est possible de transformer la condition de résolution relative au corps K (déf. 4) en une condition faisant appel à la théorie des groupes.
D'après le théorème 4 (p. 109), le polynôme unitaire général de degré n, $g(X)$, est irréductible et séparable sur $K(u_0, \ldots, u_{n-1})$.
En tant que polynôme séparable, $g(X)$ possède comme corps de décomposition une extension finie galoisienne E (th. 1, p. 107) ; le groupe de GALOIS correspondant est isomorphe au groupe symétrique S_n (th. 4, p. 109).
Si l'équation générale de degré n est résoluble par radicaux, alors E doit être contenu dans une extension radicielle. On doit s'attendre à ce que cette condition nécessaire pour le corps de décomposition corresponde à une propriété particulière du groupe de GALOIS. Cette propriété est le fait que le groupe de GALOIS soit résoluble (p. 79). On a :

Théorème 1 : *Si l'équation générale de degré n est résoluble par radicaux, alors le groupe de GALOIS du polynôme unitaire général est résoluble.*

Rem. : Cette condition correspond bien évidemment au fait que le groupe symétrique S_n soit résoluble.

Théorème d'ABEL

La théorie des groupes (p. 79) permet de démontrer que le groupe symétrique S_n n'est pas résoluble pour $n \geq 5$. On en déduit donc d'après la remarque :

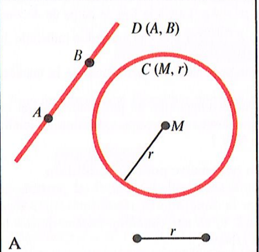
Théorème 2 (Théorème d'ABEL) **:** *L'équation générale de degré n sur un corps de caractéristique nulle n'est pas résoluble par radicaux pour n ≥ 5.*

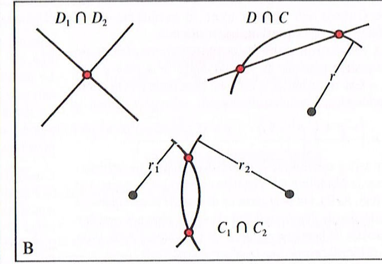
Rem. : On peut démontrer de plus que la résolubilité du groupe de GALOIS est une condition suffisante pour assurer la résolution par radicaux.

Comme S_2, S_3 et S_4 sont résolubles (p. 79), les équations de degré 2, 3 ou 4 pourront toujours être résolues par radicaux.

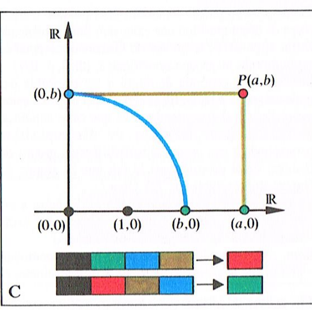
Rem. : Le procédé de résolution de même que les formules des solutions des équations de degré 3 ou 4 sont rarement utilisés en pratique car peu commodes et très lourds.

Si on opère avec $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on se contente souvent de solutions approchées. De telles solutions peuvent être obtenues pour des équations du troisième degré sur $\mathbb{R}$ par des procédés trigonométriques par exemple. Des procédés généraux, valables pour des équations de degré quelconque à coefficients réels, voire complexes (algorithme des parties proportionnelles, approximation de NEWTON, méthode itérative, procédé de GRAFFE, voir Analyse) peuvent également être utilisés.

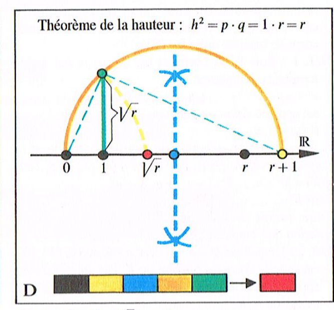




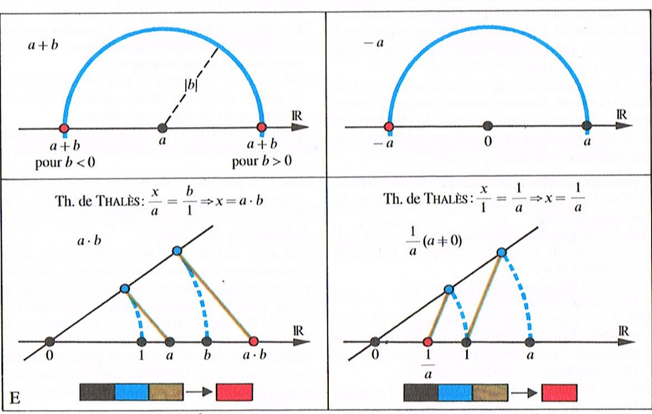
Constructions permises



Construction d'un point



Construction de $\sqrt{r}\,(r > 0)$



Construction de $a + b, -a, a \cdot b, \frac{1}{a}\ (a \neq 0)$

Les problèmes de construction géométrique font partie des classiques de la géométrie. Les outils utilisés sont parfois imposés. Ainsi, on peut par exemple exiger que les constructions soient entièrement réalisées uniquement à l'aide de la règle, ou uniquement avec le compas, ou encore uniquement à l'aide de la règle et du compas. Les constructions *à la règle et au compas* ont particulièrement suscité l'intérêt des chercheurs. Pour toute une série de problèmes, il est possible de déterminer, par une simple algébrisation de l'énoncé, si la construction est ou non réalisable.

Constructions à la règle et au compas

Une figure géométrique plane est *constructible à la règle et au compas* si elle peut être définie par un ensemble fini de points (par ex. un triangle par ses trois sommets), chacun de ces points pouvant être construit en un nombre fini d'étapes à l'aide de la règle et du compas, à partir des données du problème ou de points précédemment construits. Les *étapes de construction possibles* sont (fig. A, B) :

(1) Construction de segments ou de cercles à l'aide de points donnés ou préalablement construits.

(2) Construction de l'intersection de deux droites, de deux cercles, ou d'un cercle et d'une droite.

En introduisant un repère de coordonnées cartésien, le problème de construction se ramène à un problème algébrique. On peut en effet associer un couple de réels à chaque point et réciproquement (voir Géométrie analytique). Le système de coordonnées (pris orthonormal) est défini à l'aide des points $O(0, 0)$ et $I(1, 0)$. Dans la suite, on supposera toujours que ces deux points font partie des données. Par la règle et le compas, on peut construire le point $J(0, 1)$.

Il reste maintenant à construire un point $P(a, b)$ à partir des points donnés. Cette construction est équivalente à celle des points $A(a, 0)$ et $B(b, 0)$ (fig. C). La construction d'un point $P(x, 0)$ peut être considérée comme la construction d'un réel x sur la droite réelle. On en déduit :

$P(a, b)$ constructible $\Leftrightarrow$ a et b constructibles.

Critère de constructibilité

Comme on le constate à partir de la figure E, la donnée de $0, 1, a, b \in \mathbb{R}$ permet toujours de construire $a + b, -a, a \cdot b, 1 / a\ (a \neq 0)$ à la règle et au compas. On en déduit que toute expression rationnelle de nombres réels donnés (auxquels doivent appartenir 0 et 1) est constructible.

À partir des seuls nombres 0 et 1 peuvent ainsi être construits tous les $x \in \mathbb{Q}$, à partir de $a_0, \ldots, a_n$, tous les éléments de $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_n)$. De cette manière, on retrouve la notion de corps, car $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_n)$ est le corps engendré par adjonction de $a_0, \ldots, a_n$ à $\mathbb{Q}$ (p. 99). La figure D permet de constater que la racine carrée de tout nombre réel positif donné est constructible, donc toutes les racines carrées de tous les éléments positifs de $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_n)$ seront également constructibles. Ainsi, il devient possible d'adjoindre à $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_n)$ une telle racine carrée, si bien que tout élément du sur-corps ainsi obtenu devient également constructible.

Ce procédé peut être répété de manière à obtenir une chaîne de corps (I)

$K_0(a_0, \ldots, a_n) \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \ldots,$

où $K_{i+1} = K_i(\sqrt{r_i})$ avec $r_i \in K_i, r_i > 0\ (i = 0, 1, \ldots)$.

Une *condition suffisante* pour que $x \in \mathbb{R}$ soit constructible à la règle et au compas est son appartenance à l'un des corps d'une telle chaîne (I).

Si $x \in K_i$, alors x peut être construit à la règle et au compas à partir de la donnée des réels $a_0, \ldots, a_n$.

Cette condition suffisante s'avère également *nécessaire*.

Si x est constructible, alors $P(x, 0)$ doit être construit en un nombre fini d'étapes. L'enchaînement des étapes de construction devient en termes algébriques :

(1′) Donnée des équations de droites, resp. de cercles (leurs coefficients sont des expressions rationnelles des données ou des nombres précédemment construits),

(2′) Calcul des coordonnées des points d'intersection (ici n'apparaissent, à côté des expressions rationnelles des données ou des nombres précédemment construits, que des expressions comprenant des racines carrées, car il ne faut résoudre que des équations linéaires ou du second degré ; voir Géométrie analytique).

Au cas où x est constructible, x doit donc aussi s'exprimer au moyen d'opérations rationnelles et de racines carrées d'expressions préalablement données, c.-à-d. x doit appartenir à un corps qui peut être engendré par adjonctions successives de racines carrées à $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_n)$. On a donc :

Théorème 1 : $x \in \mathbb{R}$ *est constructible à la règle et au compas à partir de $a_0, \ldots, a_n$ si, et seulement si, x appartient à l'un des corps de la chaîne (I).*

Raffinement du théorème 1

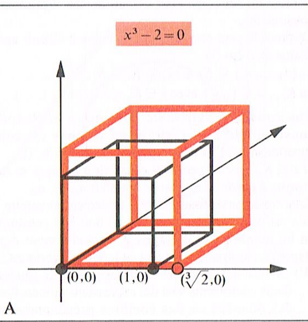
Le théorème 1 permet de ramener le problème géométrique à un problème algébrique. Il reste à déterminer à l'aide de procédés algébriques à quelles conditions x appartient à l'un des corps de la chaîne de corps. La théorie de GALOIS permet de démontrer

Théorème 2 : $x \in \mathbb{R}$ *est constructible à la règle et au compas à partir de $a_0, \ldots, a_n$, nombres réels supposés construits, si, et seulement si, x appartient à une des extensions finies galoisiennes de $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_n)$ de degré 2^m ($m \in \mathbb{N}$).*

Pour que $x \in \mathbb{R}$ soit constructible, il est donc en particulier nécessaire que x appartienne à une extension algébrique de $\mathbb{Q}$.

Rem. : La démonstration du théorème 2 pourra être trouvée dans la littérature mathématique. Le point important du théorème est l'énoncé de la forme du degré de l'extension. De cette manière, il devient possible de décider de la résolution des problèmes de construction à l'aide de la règle et du compas en passant par les polynômes.

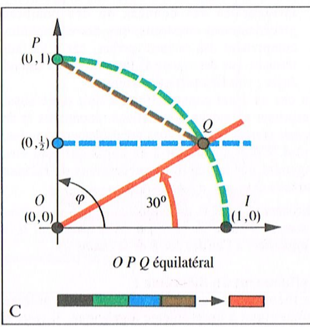
On montre l'intervention du théorème 2 pour toute une série d'exemples (p. 115).



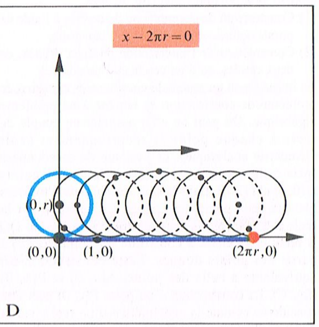
Duplication du cube

$\varphi = 60^0 | 8x^3 - 6x - 1 = 0$

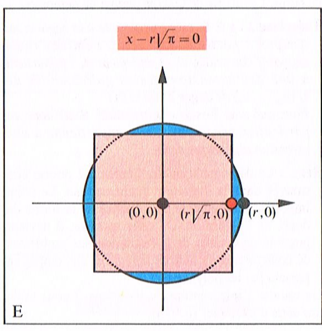
Trisection d'un angle



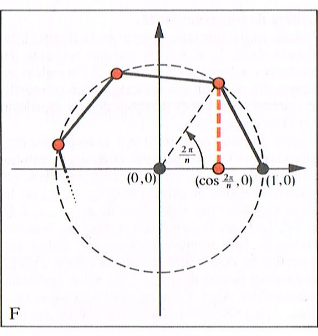
Trisection d'un angle droit



Rectification d'une circonférence



Quadrature du cercle



Construction d'un polygone régulier à n côtés

Exemples de problèmes de construction

a) **Duplication du cube**

Soit un cube de côté unité à partir duquel il faut construire un cube de volume double. Il faut donc construire $\sqrt[3]{2}$ (fig. A).

Théorème 3 : *La duplication du cube n'est pas constructible à la règle et au compas.*

Démonstration : Le corps de base est $\mathbb{Q}$. $\sqrt[3]{2}$ est racine du polynôme $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, irréductible sur $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ est donc de degré 3 sur $\mathbb{Q}$. Si $\sqrt[3]{2}$ était constructible, alors $\sqrt[3]{2}$ devrait appartenir à une extension E de degré 2^m sur $\mathbb{Q}$ (th. 2, p. 113).

Comme $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq E$, cette supposition conduirait d'après le théorème du degré (p. 99) à la propriété $3 | 2^m$ qui est fausse.

b) **Trisection d'un angle**

Soit un angle φ défini par les trois points O, I, P $(\varphi = (OI, OP))$. Il s'agit de construire un point Q tel que l'angle (OI, OQ) soit égal à $\varphi / 3$ (fig. B). On peut, sans aucune restriction sur la généralité du problème, supposer que les points O, I, P sont choisis comme sur la figure B. P se projette sur l'axe des abscisses en $(\cos\varphi, 0)$. Il reste à construire $\cos(\varphi / 3)$.

Théorème 4 : *La trisection d'un angle à l'aide de la règle et du compas n'est pas possible pour tout angle.*

Démonstration : Le corps de base est $\mathbb{Q}(\cos\varphi)$. $\cos(\varphi / 3)$ est racine du polynôme $4X^3 - 3X - \cos\varphi \in \mathbb{Q}(\cos\varphi)[X]$ (d'après la formule trigonométrique $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$). Ainsi, si ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{Q}(\cos\varphi)$, $\cos(\varphi / 3)$ ne sera pas constructible à la règle et au compas (*cf.* démonstration du a)). Il suffit alors de démontrer qu'il existe un angle pour lequel ce polynôme est irréductible. Pour $\varphi = 60°$, le polynôme associé est $4X^3 - 3X - 1/2 \in \mathbb{Q}[X]$. En posant $2X = Y$, le polynôme devient : $Y^3 - 3Y - 1$ qui est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (*cf.* p. 97, th. 13, exemple). De même, $4X^3 - 3X - 1/2$ sera irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Rem. : Il existe des angles pour lesquels cette trisection est possible, par ex. $\varphi = 90°$ (fig. C).

c) **Rectification de la circonférence d'un cercle**

Ce terme désigne la construction d'un segment de longueur égale à la circonférence d'un cercle de rayon r (fig. D, « déroulement » de la circonférence).

Théorème 5 : *La rectification de la circonférence du cercle n'est pas réalisable à la règle et au compas.*

Démonstration : Puisque $x = 2\pi r$, il faut construire π. Ce n'est pas possible car π est un nombre transcendant (p. 69), et ne peut donc être contenu dans aucune extension algébrique de $\mathbb{Q}$ (p. 113, th. 2).

d) **Quadrature du cercle**

Théorème 6 : *Il n'est pas possible de construire à la règle et au compas un carré ayant même aire qu'un disque donné de rayon r.*

Démonstration : Il s'agit de construire le côté du carré $x = r\sqrt{\pi}$ (fig. E). Si la construction était réalisable, alors on pourrait aussi construire $(\sqrt{\pi})^2 = \pi$, ce qui est impossible.

e) **Construction d'un polygone régulier à *n* côtés**

On suppose donné le cercle de rayon 1. Il s'agit de construire un polygone régulier à n côtés inscrit dans ce cercle. La construction à la règle et au compas est possible pour certaines valeurs de n (voir ci-dessous). D'après la figure F, le polygone est constructible dès qu'il est possible de construire le point $(\cos\alpha_n, 0)$ avec $\alpha_n = 2\pi / n$. D'après le théorème 2 (p. 113), c'est le cas si, et seulement si, la plus petite extension finie galoisienne de $\mathbb{Q}$ contenant $\cos\alpha_n$ est de degré 2^m sur $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}(\cos\alpha_n)$ est elle-même une extension finie galoisienne de $\mathbb{Q}$, car on a :

(1) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\cos\alpha_n) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)$ avec $\zeta = \cos\alpha_n + i\sin\alpha_n$,

(2) ζ racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité (p. 103), si bien que $\mathbb{Q}(\zeta)$, en tant que corps de décomposition du polynôme séparable $X^n - 1$, est une extension finie galoisienne de $\mathbb{Q}$ avec un groupe de Galois abélien G (th. 5, p. 109),

(3) Tout sous-groupe de G est normal (p. 75), c.-à-d. $\mathbb{Q}(\cos\alpha_n)$ est extension finie galoisienne de $\mathbb{Q}$ (p. 109, (B)).

Il est possible de déterminer le degré de $\mathbb{Q}(\cos\alpha_n)$ sur $\mathbb{Q}$:

(4) $(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}) = \varphi(n)$, (p. 103),

(5) $(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\cos\alpha_n)) \in \{1, 2\}$, car ζ est racine du polynôme $X^2 - 2\cos\alpha_n X + 1 \in \mathbb{Q}(\cos\alpha_n)[X]$,

(6) Le théorème fondamental (p. 99) implique : $(\mathbb{Q}(\cos\alpha_n) : \mathbb{Q}) \in \{\varphi(n), \varphi(n) / 2\}$.

On en déduit alors :

$\cos\alpha_n$ est constructible si, et seulement si, $\varphi(n) = 2^m$ ou $\varphi(n) / 2 = 2^m$, c.-à-d. si $\varphi(n) = 2^r$.

D'après les propriétés de $\varphi(n)$ (p. 119), si $p_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\lambda_s}$ $(p_i < p_{i+1}, \lambda_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ est la décomposition de n en facteurs premiers :

$\varphi(n) = (p_1 - 1)\, p_1^{\lambda_1 - 1} \cdot \ldots \cdot (p_s - 1)\, p_s^{\lambda_s - 1}$.

On aura donc $\varphi(n) = 2^r$ si, et seulement si :

$p_i - 1 = 2^{k_i}$ $(i \in \{1, \ldots, s\}, k_i \in \mathbb{N})$ et

$$\begin{cases} \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 1 & pour \quad p_1 = 2 \\ \lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 1 & pour \quad p_1 \neq 2 \end{cases},$$

c.-à-d. $\varphi(n) = 2^r$ si, et seulement si, $n = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$

avec $p_i = 2^{k_i} + 1$ et $\begin{cases} \lambda_1 \; quelconque & pour \; p_1 = 2 \\ \lambda_1 = 1 & pour \; p_1 \neq 2 \end{cases}$

(les nombres premiers de la forme $2^k + 1$ sont appelés nombres de Fermat, p. 127).

Théorème 7 : *Un polygone régulier à n côtés peut être construit à la règle et au compas si, et seulement si, n est un produit fini de puissances de 2 et de nombres de* Fermat.

Rem. : On peut facilement montrer que tout nombre de Fermat s'écrit nécessairement $2^{2^t} + 1$ $(t \in \mathbb{N})$, mais tout nombre de cette forme n'est pas forcément premier. Les nombres découverts par Fermat étaient : 3, 5, 17, 257, 65537 (c.-à-d. $t = 0, \ldots, 4$).

D'après le théorème 7, les polygones réguliers à n côtés avec n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, … sont constructibles. Par contre, les polygones réguliers de moins de 20 côtés n'apparaissant pas dans la suite ne peuvent pas être construits à la règle et au compas.

Le nombre 6 possède dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ les deux décompositions suivantes :

$$6 = 2 \cdot 3 \text{ et } 6 = \left(1+\sqrt{-5}\right)\cdot\left(1-\sqrt{-5}\right).$$

$g : \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] \to \mathbb{N}$ définie par $a + b\sqrt{-5} \mapsto a^2 + 5b^2$ est une fonction arithmétique monotone, et on a :

$$g(2) = 4, \qquad g(3) = 9,$$
$$g\left(1+\sqrt{-5}\right) = 6, \quad g\left(1-\sqrt{-5}\right) = 6.$$

Pour un diviseur propre t de ces 4 éléments, $g(t)$ devrait diviser 4, 6 ou 9, c.-à-d. valoir 2 ou 3. Mais de tels éléments t n'existent pas dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$, car l'égalité $a^2 + 5b^2 = 2$ resp. 3 ne possède pas de solution entière. La décomposition de 6 en éléments irréductibles n'est donc pas unique. Les facteurs ne sont pas des éléments premiers.

A₁

$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ n'est pas un anneau factoriel.

On construit alors les idéaux suivants :

$$\mathfrak{a} = (2, 1+\sqrt{-5}) = (2, 1-\sqrt{-5}), \quad \mathfrak{b} = (3, 1+\sqrt{-5}), \quad \mathfrak{c} = (3, 1-\sqrt{-5}),$$

et on a :

$$\mathfrak{a}^2 = (2)$$
$$\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} = (3)$$
$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = (1+\sqrt{-5})$$
$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} = (1-\sqrt{-5}).$$

Les idéaux obtenus à partir des éléments irréductibles ci-dessus sont donc décomposables. Les idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont des idéaux premiers. Leur rôle est comparable à celui des nombres premiers dans une décomposition en facteurs. Et on a pour (6) la décomposition unique $(6) = \mathfrak{a}^2\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

$\mathbb{Z}\sqrt{-5}$ est un anneau de Dedekind.

A₂

Décomposition en éléments irréductibles

Dans un anneau euclidien, on peut déterminer à partir de deux éléments a_1 et a_2, avec $g(a_1) \geqslant g(a_2) > 0$, les restes $q_2, q_3, \dots$ des divisions entières suivantes :

$$a_1 = a_2 q_2 + a_3 \quad \text{avec} \quad g(a_3) < g(a_2)$$
$$a_2 = a_3 q_3 + a_4 \quad \text{avec} \quad g(a_4) < g(a_3)$$
$$a_3 = a_4 q_4 + a_5 \quad \text{avec} \quad g(a_5) < g(a_4)$$
$$\dots \qquad\qquad \dots$$

La suite $(g(a_i))$ atteint 0 au bout d'un nombre fini d'itérations, donc la suite (a_i) aussi. Soit a_n le dernier élément non nul de la suite (a_i), $g(a_n) > 0$ et $g\,a_{n+1} = 0$, alors
$a_n = \text{PGCD}(a_1, a_2)$.
Effectivement, on divise tous les a_i précédents, et tout diviseur commun de a_1 et a_2 divise tous les a_i.

Exemple : $a_1 = 816$, $a_2 = 294$.

$816 : 294 = 2$	$816 = 294 \cdot 2 + 228$
588	
$294 : 228 = 1$	$294 = 228 \cdot 1 + 66$
228	
$228 : 66 = 3$	$228 = 66 \cdot 3 + 30$
198	
$66 : 30 = 2$	$66 = 30 \cdot 2 + 6$
60	
$30 : 6 = 5$	$30 = 6 \cdot 5$
30	
0	

ggT (816, 294) = 6

On obtient en remplaçant :

$$6 = 1 \cdot 66 - 2 \cdot 30$$
$$= -2 \cdot 228 + 7 \cdot 66$$
$$= -9 \cdot 228 + 7 \cdot 294$$
$$6 = -9 \cdot 816 + 25 \cdot 294 \quad \text{(Représentation linéaire du PGCD)}$$

B

Algorithme d'Euclide et PGCD

Introduction

Le premier objet de la théorie des nombres est l'étude de l'anneau $\mathbb{Z}$ des nombres entiers ; si dans $\mathbb{Z}$, addition, soustraction et multiplication sont des lois internes, il n'en est pas de même de la division. Si pour $a, b \in \mathbb{Z}$, $a : b \in \mathbb{Z}$ alors on dit que a est *divisible* par b. La théorie des nombres étudie la divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Dire que a est divisible par b équivaut à dire que l'équation $bx = a$ admet un nombre entier pour solution. Dans un cadre plus général, on peut étudier les solutions d'une équation algébrique, ou d'un système d'équations (équations diophantiennes).

Il est aujourd'hui d'usage de commencer l'étude de la divisibilité dans n'importe quel anneau intègre.

Concept de base de la divisibilité

Un anneau commutatif avec unité, sans diviseur de zéro, est dit intègre (p. 41). Hormis $\mathbb{Z}$, les anneaux $A[X]$, respectivement $K[X]$, des polynômes sur l'anneau intègre A, respectivement le corps K, sont des exemples importants, ainsi que les anneaux dits quadratiques $\mathbb{Z}\,[\sqrt{m}] = \{a + b\sqrt{m} \,/\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ où $m \in \mathbb{N}, \sqrt{m} \notin \mathbb{N}$. On a alors dans un anneau intègre A les déf. suivantes :

Déf. 1 : a est un *diviseur* de b (noté $a \mid b$), s'il existe un élément q de A tel que $b = aq$.
e est dit *unité,* ou *inversible* si $e \mid 1$.
a et b sont dits *associés* (noté $a \sim b$) quand $a \mid b$ et $b \mid a$.
Un diviseur a de b, qui n'est ni une unité, ni associé à b, est dit *diviseur propre* de b.
a est dit *irréductible* si a n'est pas inversible et n'a pas de diviseur propre.

Rem. : La relation ~ est une relation d'équivalence.
Si $a \sim b$, alors $a = be$, où e est inversible.

Dans $\mathbb{Z}$, les unités sont 1 et –1. Dans un corps, tout élément non nul est inversible. Dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{7}\right]$, $8 + 3\sqrt{7}$ par exemple est inversible, car $\left(8+3\sqrt{7}\right)\left(8-3\sqrt{7}\right) = 1$.

Fonctions arithmétiques

Dans de nombreux anneaux intègres, on peut étudier plus facilement la divisibilité à l'aide d'une fonction $g : A \to \mathbb{N}$ vérifiant les conditions suivantes :

Déf. 2 : $g : A \to \mathbb{N}$ est une fonction arithmétique sur l'anneau A si :
(1) $g(ab) = g(a)g(b)$ (homomorphisme),
(2) $g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Il en résulte que si $b = aq$, alors $g(b) = g(a)g(q)$. En particulier si a est un diviseur de b, alors $g(a)$ est un diviseur de $g(b)$ et $g(a) \leq g(b)$. Et si $a \sim b$, alors $g(a) = g(b)$. Pour e inversible, $g(e) = 1$.

Déf. 3 : Une fonction arithmétique g est *monotone* si $g(a) < g(b)$ pour tout diviseur propre non nul a de b.

On voit immédiatement que, quand g est monotone, si $g(a) = 1$, alors a est irréductible. Un critère nécessaire de monotonie est :

Critère des diviseurs enchaînés : *Une suite (a_n), dont chaque élément est un diviseur propre du précédent, ne peut comporter qu'un nombre fini d'éléments dans un anneau muni d'une fonction arithmétique monotone.*

Il faut à présent montrer que de telles fonctions existent sur les anneaux intègres importants.

On peut définir les exemples suivants de fonctions arithmétiques monotones : la fonction $g : a \to |a|$ sur $\mathbb{Z}$, la fonction $g : a + b\sqrt{m} \to \left|a^2 - b^2 m\right|$ sur $\mathbb{Z}\,[\sqrt{m}]$, la fonction définie sur $K[X]$ par :

$$g(P[X]) = \begin{cases} 0, \text{si } P[X] = 0 \\ 2^{\deg(P[X])}, \text{si } P[X] \neq 0. \end{cases}$$

Rem. : On peut remplacer 2 par tout nombre entier $r > 1$ dans la formule ci-dessus.

L'exemple de l'anneau des nombres algébriques (*cf.* p.123) montre qu'il n'existe pas de fonction arithmétique monotone sur tous les anneaux intègres : la suite infinie de diviseurs propres successifs $\left(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[8]{2}, \sqrt[16]{2}, \dots\right)$ ne vérifie pas le critère énoncé précédemment.

La suite est d'une grande importance :

Th. 1 : *Dans un anneau intègre muni d'une fonction arithmétique monotone, tout élément non inversible est décomposable en un produit fini d'éléments irréductibles.*

De telles décompositions ne sont pas en général uniques, même si on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs, et si on considère deux éléments associés comme non distincts (*cf.* exemple A₁).

Éléments premiers, anneaux factoriels

Le concept d'élément irréductible n'achève pas encore la théorie de la décomposition des nombres.

Déf. 4 : p est un élément premier si p est non nul et non inversible, et si $p \mid ab$ implique $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Th. 2 : *Tout élément premier est irréductible.*

En effet, si $p = ab$, alors $a \mid p \wedge b \mid p$, et, d'après la déf. 4, $p \mid a \vee p \mid b$, si bien que $p \sim a \vee p \sim b$. p n'a donc pas de diviseur propre.

Dans le cas où elle existe, une décomposition en éléments premiers est unique dans le sens où les facteurs d'une quelconque autre décomposition sont associés chacun à un facteur de la première décomposition. La démonstration découle de la déf. 4 par récurrence sur le nombre de facteurs.

Déf. 5 : Un anneau intègre dans lequel tout élément possède une décomposition en éléments premiers est dit *anneau factoriel*.

Rem. : $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ n'est pas un anneau factoriel (ill. A₁).

Une classe importante d'anneaux factoriels est constituée par les anneaux euclidiens définis ci-dessous, dans lesquels une division euclidienne de b par a avec le reste r est possible, c.-à-d. $b = aq + r$.

Déf. 6 : Une fonction arithmétique g est dite *euclidienne* si elle vérifie la propriété suivante : $0 < g(a) \leq g(b) \Rightarrow \exists q, g(b - aq) < g(b)$. Un anneau dans lequel on peut définir une fonction euclidienne est dit *anneau euclidien*.

q peut, tout en vérifiant les conditions ci-dessus, devenir tel que $g(b - aq) < g(a)$. Si on pose alors $b - aq = r$, soit $b = aq + r$, r est appelé reste de la division de b par a, et l'on a $g(r) < g(a)$.

Rem. : Toute fonction euclidienne est monotone.

Th. 3 : *Tout anneau euclidien est un anneau factoriel.*
Démonstration : Si dans un anneau euclidien il y avait des éléments irréductibles qui ne soient pas premiers, on pourrait choisir un élément u, pour lequel $g(u)$ est minimal, autrement dit tel que tous les éléments irréductibles v vérifiant $g(v) < g(u)$ soient premiers. Comme u n'est pas premier, il existe des produits ab qui admettent u pour diviseur, sans que u ne divise l'un des deux facteurs. Soit ab un tel produit minimal pour la fonction arithmétique. Si $g(a)$ et $g(b)$ étaient plus petits que $g(u)$, alors a et b, et par conséquent ab auraient une décomposition en éléments premiers. Et u devrait être associé à l'un de ces éléments (contradiction). Si par contre on avait $g(a) \geq g(u)$, il existerait un q tel que $g(a - qu) < g(a)$, et donc $g((a - qu)b) < g(ab)$. Le produit $(a - qu)b = ab - qub$ devrait alors avoir un facteur divisible par u, c.-à.-d. $u \mid a - qu$, donc $u \mid a$ (contradiction).
La réciproque de ce théorème n'est pas vraie : par exemple, $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau factoriel, mais pas un anneau euclidien.
Rem. : $\mathbb{Z}$ est un anneau euclidien. La condition de la déf. 6 est remplie avec $q = 1$, ou $q = -1$. Tous les anneaux de polynômes $K[X]$ sont euclidiens. En effet, si $a(X)$ et $b(X)$ sont deux polynômes de $K[X]$, avec respectivement α et β pour coefficients des termes de plus haut degré, g la fonction arithmétique définie précédemment, et $\deg(b(X)) = n \geq \deg(a(X)) = m > 0$, alors on a
$$g\left(b(X) - \frac{\beta}{\alpha} X^{n-m} a(X)\right) < g(b(X)).$$
Parmi les anneaux quadratiques $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, on trouve beaucoup d'anneaux euclidiens, par exemple pour $m = -2, -1, 2, 3$.
Le fait que $\mathbb{Z}$ est un anneau factoriel est *un théorème fondamental de la théorie élémentaire des nombres.*
Dans les anneaux non factoriels, la décomposition des nombres peut être étudiée par différentes méthodes (idéaux, valuations).

Théorie des idéaux

Le domaine des nombres considérés peut être agrandi par des classes de nombres. Ceci correspond à la démarche géométrique où un plan affine peut être complété en un plan projectif, avec des nouveaux points qui sont alors les classes de droites parallèles (*cf.* p.139). Les idéaux introduits à la page 83 se présentent comme des nombres « idéaux » dans la théorie des nombres. On y définit aussi le concept d'idéal premier. Tout idéal $\mathfrak{i}$ est en tant que sous-anneau un module sur A et possède un système de générateurs. S'il possède un ens. fini de générateurs $\{i_1, \ldots, i_n\}$, alors $\mathfrak{i} = \{a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n \mid a_i \in A\}$, et on écrit $\mathfrak{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$.
Déf. 7 : Un anneau A est dit *nœthérien* si tout idéal de A est engendré par un nombre fini d'éléments. Si chaque idéal n'est engendré que par un seul élément, alors l'anneau A est dit *principal*.
On définit le produit de deux idéaux $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$ comme l'idéal engendré par tous les produits uv, où $u \in \mathfrak{u}$ et $v \in \mathfrak{v}$, c.-à-d. l'ensemble des sommes finies de tels éléments. Avec cette déf., on peut essayer de décomposer non plus les éléments de A, mais ses idéaux.

Déf. 8 : Un anneau intègre dans lequel tout idéal possède une décomposition en idéaux premiers est dit *anneau de* DEDEKIND.
Cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs.
Th. 4 : *Tout anneau euclidien est principal.*
Si a est un élément de l'idéal $\mathfrak{a}$ minimal pour la fonction arithmétique, alors $\mathfrak{a} = (a)$.
La décomposition de a en éléments premiers correspond alors à la décomposition de $\mathfrak{a}$ en idéaux premiers. Tout anneau euclidien est alors aussi bien un anneau factoriel qu'un anneau de DEDEKIND.
Cependant, on trouve des anneaux de DEDEKIND importants qui ne sont pas des anneaux factoriels. Ainsi, tous les anneaux quadratiques $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ avec $m \equiv 2(4)$ et $m \equiv 3(4)$ (*cf.* p.119), en particulier $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ (illustration A_2), ainsi que les anneaux $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right]$ pour $m \equiv 1(4)$ sont des anneaux de DEDEKIND. Pourtant, seuls certains de ces anneaux sont en même temps euclidiens.
On peut montrer que :
Th. 5 : *Dans un anneau de* DEDEKIND *tout idéal premier non nul est maximal (cf. p. 83).*
Un autre exemple d'anneau de DEDEKIND non factoriel est l'anneau des polynômes à plusieurs variables sur le corps K, $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ (*cf.* p. 95). Comme l'idéal premier (X_1) est inclus dans l'idéal premier (X_1, X_2), la condition du théorème précédent n'est pas vérifiée. Alors que l'ensemble des éléments d'un anneau n'est en général pas satisfaisant pour la théorie des nombres, l'ensemble de tous les idéaux peut s'avérer trop large.
Rem. : Dans les anneaux, qui ne sont pas de DEDEKIND, on peut encore dans certains cas trouver une décomposition en idéaux dits primaires $\mathfrak{q}$, qui sont définis ainsi : si $ab \in \mathfrak{q}$, et $a \notin \mathfrak{q}$, alors une puissance de b appartient à $\mathfrak{q}$. Pour un idéal premier, cette puissance est 1.

PGCD et PPCM

Dans la théorie des nombres, les notions de *plus grand commun diviseur* (PGCD) et de *plus petit commun multiple* (PPCM) de deux éléments sont importantes :

$d = \mathrm{PGCD}\,(a, b) \Leftrightarrow$
$d \mid a \wedge d \mid b \wedge (d' \mid a \wedge d' \mid b \Rightarrow d' \mid d)$,
$v = \mathrm{PPCM}\,(a, b) \Leftrightarrow$
$a \mid v \wedge b \mid v \wedge (a \mid v' \wedge b \mid v' \Rightarrow v \mid v')$.

Rem. : Tout associé de d ou v convient aussi.
a et b sont dits premiers entre eux quand $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$. Les éléments d et v ainsi définis n'existent pas dans tous les anneaux. Comme dans un anneau factoriel tout élément peut se décomposer en produit de puissances de nombres premiers de la forme $a = u \prod_i p_i^{\alpha_i}$, où u est inversible, on peut étendre le produit à tous les nombres premiers, les α_i non-nuls ne formant qu'un ensemble fini d'indices ; on a alors : $\mathrm{PGCD}\,(a,b) = \prod_i p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$,
$$\mathrm{PPCM}\,(a,b) = \prod_i p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}.$$

Représentation linéaire du PGCD. Égalité de BÉZOUT

Dans les anneaux euclidiens, le PGCD de deux éléments a_1 et a_2 peut être déterminé en un nombre fini d'étapes grâce à l'algorithme d'EUCLIDE, sans que l'on ait à connaître les décompositions en facteurs premiers de a_1 et a_2 (fig. 2 p.116). La construction du PGCD par cette méthode permet aussi de mettre en évidence deux éléments x_1 et x_2 tels que $\mathrm{PGCD}(a_1, a_2) = a_1x_1 + a_2x_2$ (égalité de BÉZOUT) (ce qui rejoint le fait que tout anneau euclidien est principal).
Rem. : Les notions de PPCM et PGCD peuvent se traduire en termes d'idéaux :
$\mathrm{PGCD}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \{a + b \mid a \in \mathfrak{a} \wedge b \in \mathfrak{b}\} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$,
$\mathrm{PPCM}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Classes résiduelles et anneau des classes résiduelles

On ne s'est jusqu'à présent intéressé qu'à la divisibilité d'un élément b par un élément a. Dans les anneaux euclidiens, on peut étendre l'étude à l'ensemble des éléments donnant le même reste dans la division euclidienne par a, appelé classe résiduelle. Les éléments pour lesquels ce reste est 0 constituent exactement l'idéal (a).
Déf. 9 : On dit que b_1 est congru à b_2 modulo a, noté $b_1 \equiv b_2\,(a)$, si, et seulement si, $b_1 - b_2 \in (a)$.
Cette déf. aboutit naturellement à la congruence modulo un idéal :
Déf. 10 : $b_1 \equiv b_2\,(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow b_1 - b_2 \in \mathfrak{a}$.
Cette relation de congruence est une relation d'équivalence. L'ensemble des classes $[\![b]\!]$ constitue un anneau appelé anneau des classes résiduelles, ou anneau quotient, noté $A/(a)$ ou $A/\mathfrak{a}$. On montre (p. 83) que $A/\mathfrak{a}$ est un anneau intègre si, et seulement si, $\mathfrak{a}$ est un idéal premier. $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(p)$ (également noté $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) est même un corps pour p premier. On a en général :
Th. 6 : *Si A est un anneau euclidien et $\mathfrak{p}$ un idéal premier, alors $A/\mathfrak{p}$ est un corps.*
Démonstration : $\mathfrak{p}$ est engendré par l'élément premier p. Soit $[\![a]\!] \neq [\![0]\!]$, alors $\mathrm{PGCD}(a, p) = 1$, et on a $ab + pq = 1$, avec $b, q \in A$ (représentation linéaire du PGCD). On a alors $[\![a]\!]\,[\![b]\!] = [\![1]\!]$, et donc $[\![b]\!]$ est un inverse de $[\![a]\!]$: $A/\mathfrak{p}$ est un corps.
Le théorème suivant concernant les anneaux des classes résiduelles est important pour la théorie des nombres :

Congruences simultanées

Considérons dans un anneau euclidien le système de congruences $x \equiv c_i\,(q_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a le résultat suivant, résultat fondamental sur les congruences simultanées :
Th. 7 : *Soit, dans un anneau euclidien A, $a = q_1 q_2 \ldots q_n$, avec pour $i \neq j$* $\mathrm{PGCD}(q_i, q_j) = 1$. *L'ens. des solutions x du système $x \equiv c_i\,(q_i)$ est une classe résiduelle modulo a.*
Démonstration : On construit d'abord les quotients $a_i = a : q_i$. L'égalité de BÉZOUT appliquée aux a_i donne : $1 = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$. On multiplie les $e_i = x_i a_i$ par c_i, et on obtient $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n$ qui est solution du système, ainsi que tous les éléments qui lui sont congrus modulo a.
Exemple : $x \equiv 1\,(3)$, $x \equiv 3\,(4)$, $x \equiv 5\,(7)$.

$a = 3 \cdot 4 \cdot 7$,
$a_1 = 84 : 3 = 28$, $a_2 = 84 : 4 = 21$, $a_3 = 84 : 7 = 12$,
$1 = 7 \cdot 28 - 7 \cdot 21 - 4 \cdot 12$,
$= 196 - 147 - 48$,
$x \equiv 196 \cdot 1 - 147 \cdot 3 - 48 \cdot 5\,(84) \equiv -485\,(84)$
$\equiv 19\,(84)$.

On en déduit que l'application de A, anneau euclidien, dans l'anneau produit $B = A/(q_1) \times A/(q_2) \times \ldots \times A/(q_n)$, où les q_i sont premiers entre eux deux à deux, définie par $b \mapsto ([\![b_1]\!], [\![b_2]\!], \ldots, [\![b_n]\!])$, avec $\forall i, b_i \equiv b\,(q_i)$, est un homomorphisme d'anneau de noyau l'idéal (a) engendré par $a = q_1 q_2 \ldots q_n$. Cette application définit un isomorphisme de l'anneau quotient $A/(a)$ sur B. On en déduit :
Th. 8 : *Soit A un anneau euclidien et $a \in A$ où $a = q_1 q_2 \ldots q_n$, les q_i étant premiers entre eux deux à deux, alors tout $[\![b]\!] \in A/(a)$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $[\![b]\!] = [\![b_1]\!] + [\![b_2]\!] + \ldots + [\![b_n]\!]$ où l'on a $b \equiv b_i\,(q_i)$ et $b_i \equiv 0\,(q_j)$ pour $j \neq i$.*
En particulier :
$[\![1]\!] = [\![e_1]\!] + [\![e_2]\!] + \ldots + [\![e_n]\!]$, $e_i \equiv 1\,(q_i)$, $e_i \equiv 0\,(q_j)$ pour $j \neq i$.
$[\![e_i]\!]\,[\![e_j]\!] = [\![0]\!]$ si $i \neq j$,
$[\![e_i]\!]\,[\![e_i]\!] = [\![e_i]\!]$,
$[\![b_i]\!] = [\![b]\!]\,[\![e_i]\!]$.

Éléments inversibles dans l'anneau des classes résiduelles et fonction φ

L'étude des éléments inversibles de l'anneau des classes résiduelles d'un anneau euclidien est importante dans la théorie des nombres. Une classe $[\![b]\!]$ est inversible, s'il existe une classe $[\![b']\!]$ vérifiant $[\![b]\!] \cdot [\![b']\!] = [\![1]\!]$.
Th. 9 : *$[\![b]\!]$ est donc inversible dans $A/(a)$, si* $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.
Avec les hypothèses du th. 8, on a :
Th. 10 : *$[\![b]\!]$ élément de $A/(a)$ est inversible si, et seulement si, pour $i = 1, \ldots, n$ la classe de b dans $A/(q_i)$ est inversible.*
Ce théorème est une conséquence de l'isomorphisme vu précédemment des anneaux $A/(a)$ et $A/(q_1) \times A/(q_2) \times \ldots \times A/(q_n)$.
Conséquences : Si $A/(a)$ a un nombre fini d'éléments inversibles, ce nombre est le produit des nombres d'éléments inversibles des $A/(q_i)$. En particulier, pour $A = \mathbb{Z}$ et $a = e \prod_i p_i^{a_i}$ la décomposition de a en facteurs premiers, il résulte du th. 10 que le nombre des éléments inversibles de $A/(a)$ est le même que celui des classes résiduelles premières avec a (c.-à-d. les classes dont le représentant est premier avec a). Ce nombre est noté $\varphi(a)$ (*fonction d'*EULER).
D'après ce qui précède, $\varphi(a) = \prod_{p_i \mid a} \varphi(p_i^{a_i})$. Si on veut déterminer $\varphi(p^a)$, alors il faut considérer en premier lieu les classes non premières avec p^a. Ces dernières sont représentées par des nombres de la forme cp, avec $0 \leq c \leq p^{\alpha} - 1$. Il y a donc $p^{\alpha} - 1$ classes ainsi définies, si bien que $\varphi(p^a) = p^a - p^{\alpha - 1} = p^a\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.
Et finalement, $\varphi(a) = \prod_{p_i \mid a} p_i^{a'}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = a \prod_{p_i \mid a}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.
Rem. : Les classes premières modulo m constituent un groupe multiplicatif G_m, qui est cyclique dans le cas $m = p^{\alpha}$ avec $p \neq 2$. Chaque élément générateur de $G_{p^{\alpha}}$ s'appelle reste primitif modulo p^{α}. Leur nombre est $\varphi(\varphi(p^{\alpha}))$.

$n=2$ $x_1^2+x_2^2=x_3^2$ possède des triplets solutions dans l'ensemble des nombres entiers. Ces triplets, dits triplets pythagoriciens, se mettent sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (a^2-b^2)\,c \\ x_2 &= 2abc \\ x_3 &= (a^2+b^2)\,c \end{aligned}\right\} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}^+$$

Exemple avec $c = 1$ et PGCD $(x_1, x_2, x_3) = 1$:

a	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	…
b	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	7	…
x_1	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13	63	55	39	15	…
x_2	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	112	…
x_3	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	113	…

$n \geq 3$ On ne trouve pas de triplets de nombres entiers solution de $x_1^n+x_2^n=x_3^n$. La démonstration n'en a été établie qu'en 1995. FERMAT prétendait en connaître une démonstration, mais ne l'a jamais publiée.

Comme $x_1^{mn}+x_2^{mn}=x_3^{mn} \Rightarrow (x_1^m)^n+(x_2^m)^n=(x_3^m)^n$, il suffit de démontrer l'affirmation de FERMAT pour les exposants premiers $p > 2$ et pour l'exposant 4. Cette preuve a été établie pour $n = 4$ et un grand nombre de nombres premiers p (par ex. pour $2 < p < 125\,000$).

A

Équation de FERMAT

Pour des nombres premiers impairs différents, on a : $(\frac{q}{p})=(\frac{p}{q})\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$

Démonstration : On pose $(\frac{q}{p})=(-1)^{\nu}$. Pour déterminer ν suivant le lemme de GAUSS, on construit qx pour $1 \leq x \leq \frac{p-1}{2}$ que l'on réduit aux plus petits restes. ν est alors le nombre des solutions $y \in \mathbb{Z}^+$ de (1) $-\frac{p}{2} < qx-py \leq 0$.

On en tire $py < qx+\frac{p}{2} < q\,\frac{p}{2}+\frac{p}{2} = \frac{q+1}{2}\,p$, donc $y < \frac{q+1}{2}$.

Comme en outre $1 \leqslant y$, il faut déterminer les couples solutions de (1) pour lesquels $1 \leq x \leq \frac{p-1}{2}$ et $1 \leq y \leq \frac{q-1}{2}$.

De façon analogue on obtient $(\frac{p}{q})=(-1)^{\mu}$, en désignant par μ le nombre de couples (x, y) vérifiant

(2) $0 \leqslant qx-py < \frac{q}{2}$

avec $1 \leq x \leq \frac{p-1}{2}$ et $1 \leq y \leq \frac{q-1}{2}$.

Il en résulte $(\frac{q}{p})=(\frac{p}{q})(-1)^{\nu+\mu}$,

où $\nu+\mu$ se détermine géométriquement par le nombre de points compris dans la bande orangée de la figure ci-contre. Pour des raisons de symétrie, le nombre total de points compris dans le rectangle jaune, $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$, est égal à $\nu+\mu$ plus un nombre pair, ce qui termine la démonstration.

y; $(1|\frac{q-1}{2})$; $(\frac{p-1}{2}|\frac{q-1}{2})$; $qx-py=-\frac{p}{2}$; $qx-py=\frac{q}{2}$; $(1|1)$; $(\frac{p-1}{2}|1)$; $(0|0)$; x

Applications :

(a) Au deuxième point sur les résidus

Pour un a donné, $(\frac{a}{p})$ ne dépend que de la classe résiduelle de p modulo $4a$; quand a est premier tel que $a \equiv 1\ (4)$, $(\frac{a}{p})$ ne dépend que de la classe résiduelle de p modulo a.

(b) Calcul du symbole de LEGENDRE

Exemple :

$(\frac{230}{137})=(\frac{93}{137})=(\frac{3}{137})\cdot(\frac{31}{137})=(\frac{137}{3})\cdot(\frac{137}{31})=(\frac{2}{3})\cdot(\frac{13}{31})=-(\frac{31}{13})=-(\frac{5}{13})=-(\frac{13}{5})=-(\frac{3}{5})$
$=-(\frac{5}{3})=-(\frac{-1}{3})=+1$

La conguence $x^2 \equiv 230\ (137)$ est donc soluble.

Les th. 6 et 8 de la p. 121 ont aussi été utilisés, ainsi que la réduction du numérateur modulo le dénominateur.

B

Loi de réciprocité quadratique

Équations diophantiennes

Soit $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ un polynôme de $\mathbb{Z}[X_1, X_2, ..., X_n]$ avec $n \geq 2$, $f(X_1, X_2, ..., X_n) = 0$ est appelée *équation diophantienne* quand on en recherche les solutions entières. Dans bien des cas, ces équations se ramènent à des égalités de congruences, car une équation diophantienne de la forme $g(X_1, X_2, ..., X_n-_1) + X_nb = 0$ est équivalente à $g(X_1, X_2, ..., X_{n-1}) \equiv 0\ (b)$.

Ex. : Au lieu de $ax_1 + bx_2 - c = 0$, on résout $ax_1 - c \equiv 0\ (b)$. On utilise alors le petit théorème de FERMAT de la théorie de nombres (p. 77), selon lequel $g^{ordG} = e$ pour tout élément g d'un groupe fini G. Les classes de congruences $[\![a]\!]$ premières avec b sont les unités de $\mathbb{Z}_b$, et on en dénombre $\varphi(b)$, d'où : $[\![a]\!]^{\varphi(b)} = [\![1]\!]$, soit $a^{\varphi(b)} \equiv 1\ (b)$ avec PGCD$(a, b) = 1$. Les solutions de $ax_1 - c \equiv 0\ (b)$ sont dans le cas où PGCD$(a, b) = 1$ de la forme $x \equiv a^{\varphi(b)-1}c\ (b)$.

Le th. 7 (p. 119) permet une généralisation aux systèmes d'équations du type précédent.

Les difficultés apparaissent dans les équations de degré supérieur. Ainsi, FERMAT a énoncé qu'on ne pouvait pas trouver de triplet de $\mathbb{Z}_+^*$ vérifiant $a^n + b^n = c^n$ pour $n > 2$, proposition démontrée seulement en 1995.

Résidus

Les équations diophantiennes de la forme $x_1^n + mx_2 - a = 0$, resp. $x_1^n - a \equiv 0\ (m)$, sont d'un intérêt particulier.

Déf. 1 : Un nombre a premier avec m est appelé *résidu puissance n de m* si l'équation $x^n \equiv a\ (m)$ possède au moins une solution. Il est appelé *non-résidu* dans le cas contraire (avec toujours a premier à m).

Deux questions se posent alors immédiatement :

I. Quelles sont les résidus puissance n de m ?

II. Pour quelles valeurs de m a est-il un résidu puissance n de m ?

Le problème peut d'abord être réduit au cas $m = p^{\alpha}$. En effet :

Th. 1 : *Si $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition de m en éléments premiers, alors a, est un résidu puissance n de m si, et seulement si, a est un résidu puissance n de $p_i^{\alpha_i}$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$.*

Première question concernant les résidus

Dans le cas $m = p^{\alpha}$, le théorème suivant répond entièrement à la question I :

Th. 2 : (Critère d'EULER) : *a est un résidu puissance n de p^{α} ($p \neq 2$) si, et seulement si, $a^{\frac{\varphi(p^{\alpha})}{PGCD(n,\, \varphi(p^{\alpha}))}} \equiv 1\ (p^{\alpha})$. Si n est pair, a est un résidu puissance n de 2^{α} ($\alpha \geq 2$) si, et seulement si, $a \equiv 1\ (4)$ et $a^{\frac{2^{\alpha-2}}{PGCD(n,\, 2^{\alpha-2})}} \equiv 1\ (2^{\alpha})$. Tout a impair est un résidu puissance n de 2, et, pour n impair, de 2^{α}.*

Rem. : Si pour $p \neq 2$ PGCD$(n, \varphi(p^{\alpha})) = 1$, alors la condition $a^{\varphi(p^{\alpha})} \equiv 1\ (p^{\alpha})$ est remplie d'après le petit théorème de FERMAT.

Le th. 2 se simplifie dans le cas des résidus quadratiques ($n = 2$) :

Th. 3 : *a est un résidu quadratique de p^{α} ($p \neq 2$) si, et seulement si, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ (p)$, c.-à-d. si, et seulement si, a est un résidu quadratique de p. a est un résidu quadratique de 2^{α} si, et seulement si, $a \equiv 1\ (2^{\beta})$ avec $\beta = min(\{\alpha, 3\})$.*

Deuxième question concernant les résidus

Pour $n = 2$, la question II se formule aussi de la manière suivante : pour quels nombres premiers p impairs a est-il un résidu quadratique ? Pour une formulation simplifiée des résultats, on introduit le *symbole de* LEGENDRE $\left(\frac{a}{p}\right)$:

Déf. 2 : Si p est un nombre premier impair et a un nombre premier avec p,

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\left\{\begin{matrix} 1 \text{ si } a \text{ est un résidu quadratique de } p \\ -1 \text{ si } a \text{ n'est pas résidu quadratique de } p \end{matrix}\right\}.$$

Th. 4 : *Si r est un reste primitif donné de p* (p. 119) *et $a \equiv r^{\nu}\ (p)$, alors $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\nu}$.*

a est donc résidu si, et seulement si, ν est pair. Une conséquence est $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\cdot\left(\frac{b}{p}\right)$, si bien que seule la détermination de $\left(\frac{-1}{p}\right)$, $\left(\frac{2}{p}\right)$ et $\left(\frac{q}{p}\right)$ pour tout nombre premier impair q est nécessaire.

Th. 5 : $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}(p)$.

Démonstration : D'après le petit théorème de FERMAT, $a^{p-1} = \left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv 1\ (p)$, donc $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1\ (p)$.

Le th. 5 découle alors directement du th. 3. Si on considère le cas $a = -1$, on a :

Th. 6 : $\left(\frac{-1}{p}\right)=\begin{cases} 1 \text{ si } p \equiv 1\ (4) \\ -1 \text{ si } p \equiv -1\ (4) \end{cases}$.

Tous les résidus non nuls de p se réduisent aux nombres $\pm 1, \pm 2, ..., \pm\frac{p-1}{2}$ (plus petits résidus).

Th. 7 : (lemme de GAUSS) : *Si a et p sont premiers entre eux, si p est premier, ν désignant le nombre d'éléments de l'ensemble $\left\{a \cdot 1, a \cdot 2, \ldots, a \cdot \frac{p-1}{2}\right\}$ congrus mod p à un élément de l'ensemble $\left\{-1, -2, \ldots, -\frac{p-1}{2}\right\}$, on a $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\nu}$.*

Si on prend $a = 2$, on doit réduire les résidus 2, 4, ..., $p - 1$ aux plus petits. Les calculs conduisent alors à $\nu \equiv \frac{p^{2-1}}{8}\ (2)$. Et on en tire :

Th. 8 : $\left(\frac{2}{p}\right)=\begin{cases} 1 \text{ si } p \equiv \pm 1\ (8) \\ -1 \text{ si } p \equiv \pm 3\ (8) \end{cases}$.

Th. 9 (loi de réciprocité quadratique) : *Soient p et q deux nombres premiers impairs distincts. On a*

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},\ c.\text{-}à\text{-}d.$$

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right) si\ p \equiv 1(4) \vee q \equiv 1\ (4) \\ -\left(\frac{p}{q}\right) si\ p \equiv -1(4) \wedge q \equiv -1\ (4) \end{cases}.$$

(Démonstration et développements à la fig. B)

Rem. : La question II conduit aussi à une formulation analogue et des lois de réciprocité pour des résidus de puissances supérieures.

Divisibilité dans un corps

La notion de divisibilité s'étend aux corps des quotients (*cf.* p. 81) d'anneaux intègres.

Déf. 1 : Soit A un anneau intègre et K son corps des quotients, on dit que *a divise b selon A* quand le quotient $\frac{b}{a}$ appartient à A, ce que l'on note

$$a|_A b \Leftrightarrow \frac{b}{a} \in A .$$

De manière analogue, on définit les unités et les éléments associés.

Si A est un anneau factoriel (*cf.* p. 117), tout élément $a = \frac{c}{d}$ de K s'écrit, de façon unique à l'ordre près $a = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ (e unité, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$), et $\alpha |_A b$ si $\alpha_i \leqslant \beta_i$ pour tout i avec $a = e_a \prod_i p_i^{\alpha_i}$ et $b = e_b \prod_i p_i^{\beta_i}$.

Valeurs absolues

Soit p un élément premier fixé de A, c un nombre réel de $]0, 1[$. La fonction φ qui à tout $a \in K\backslash\{0\}$ associe $\varphi(a) = c^{\alpha}$, où α est l'exposant de p dans la décomposition en éléments premiers de a, possède les propriétés d'une fonction arithmétique (p. 117).

Comme nous allons le voir, il existe de nombreux corps sur lesquels on peut définir de telles fonctions, appelées valeurs absolues, sans pour autant partir d'un anneau factoriel. Il s'ensuit une nouvelle direction pour l'étude de la théorie de la divisibilité.

Déf. 2 : Une application φ d'un corps K dans l'ensemble des réels positifs est appelée *valeur absolue* si, et seulement si, elle vérifie les propriétés suivantes :

(B1) $\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

(B2) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ (morphisme de groupes),

(B3) $\exists\, c \in \mathbb{R}, c \geq 1 \wedge \forall (a, b) \in K^2\ \varphi(a + b) \leq c \max(\{\varphi(a), \varphi(b)\})$.

φ est dite *non archimédienne* quand $c = 1$ dans (B3), et *archimédienne* si $c \neq 1$.

Rem. : De (B2), on tire $\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$, puis $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(-a) = \varphi(a)$.

On peut définir sur tout corps la *valeur absolue triviale* par $\varphi(a) = 1$ pour tout $a \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$. Pour toute valeur absolue non triviale, il existe un élément a_0 tel que $0 < \varphi(a_0) < 1$. Et pour toute valeur absolue non archimédienne, on a $\varphi(a + b) = \max(\{\varphi(a), \varphi(b)\})$ dans (B3) dès que $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Th. 1 : *Un corps fini à n éléments ne possède que la valeur absolue triviale.*

Cela est dû au fait que tout élément non nul vérifie $a^{n-1} = 1$, et est donc une racine de l'unité.

Rem. : Les corps dont la caractéristique est un nombre premier ne possèdent que des valeurs absolues non archimédiennes.

Déf. 3 : Deux valeurs absolues φ_1 et φ_2 sont dites *équivalentes* si elles vérifient $\varphi_1(a) < \varphi_1(b) \Leftrightarrow \varphi_2(a) < \varphi_2(b)$.

Th. 2 : *Toute valeur absolue φ_2 équivalente à φ_1 peut s'écrire sous la forme $\varphi_2(a) = \varphi_1(a)^s$ où $s \in \mathbb{R}_+^*$.*

Valeurs absolues du corps $\mathbb{Q}$

La valeur absolue ordinaire est archimédienne sur $\mathbb{Q}$. On peut aussi définir une valeur absolue φ_p non archimédienne sur $\mathbb{Q}$ pour tout nombre premier p, dite valeur absolue p-adique :

$$\varphi_p(a) = \begin{cases} 0 \text{ pour } a = 0 \\ p^{-\alpha_p} \text{ pour } a \neq 0 \end{cases}$$ où α_p est l'exposant de p dans la décomposition de a en produit de facteurs premiers. On écrit aussi $|a|_p$ au lieu de $\varphi_p(a)$ et $|a|_\infty$ pour $|a|$. Le théorème d'OSTROWSKI énoncé ci-dessous est particulièrement important pour la théorie des nombres :

Th. 3 : *Les valeurs absolues $|\ |_\infty$ et $|\ |_p$, p décrivant l'ensemble des nombres premiers, constituent un système générateur des valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$. Toute autre valeur absolue est équivalente à l'une des précédentes.*

La démonstration pour les valeurs absolues non-archimédiennes se base sur le fait que $\{x | x \in \mathbb{Q} \wedge \varphi(x) \leq 1\}$ est un idéal premier, qui peut être considéré comme un idéal principal engendré par un nombre premier.

Valeurs absolues du corps $K(X)$ des fractions rationnelles sur K

Si on adjoint une indéterminée X à un corps muni de la valeur absolue triviale, on peut déterminer toutes les valeurs absolues de $K(X)$. Elles sont toutes non archimédiennes. Il suffit de rechercher toutes les valeurs absolues sur l'anneau factoriel $K[X]$ des polynômes sur K, car on obtient par passage au corps des quotients une valeur absolue sur $K(X)$.

1[er] cas : $\varphi(X) \leq 1$.

On a alors $\varphi(a_n X^n) = \varphi(a_n) \cdot \varphi(X)^n = \varphi(X)^n \leq 1$, et ensuite $\varphi(f(X)) \leq 1$ pour tout polynôme d'après (B3). Si φ n'est pas triviale, il existe un $f(X)$ tel que $\varphi(f(X)) < 1$. Si on décompose $f(X)$ en facteurs premiers, l'un d'eux au moins, $p(X)$, doit vérifier $\varphi(p(X)) < 1$. Il en sera de même pour tous les polynômes divisibles par $p(X)$. Par contre, pour les polynômes $q(X)$ premiers avec $p(X)$, on a d'après l'égalité de BÉZOUT $\varphi(q(X)) = 1$. Si maintenant $f(X)$ s'écrit $f(X) = p(X)^{\alpha} q(X)$, alors $\varphi(f(X)) = \varphi(p(X))^{\alpha}$. À chaque polynôme premier correspond une valeur absolue analogue à l'une des valeurs absolues p-adiques de $\mathbb{Q}$.

2[e] cas : $\varphi(X) > 1$.

On n'obtient dans ce cas par équivalence qu'une seule valeur absolue, qui vérifie :

$$\varphi(f(X)) = \varphi(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0).$$
$$= \varphi(X)^n = \varphi(X)^{\deg f(X)} .$$

Si $K = \mathbb{C}$, tous les polynômes premiers sont de la forme $X - a$, et il correspond une valeur absolue à tout $a \in \mathbb{C}$ d'après la première méthode ; elle donne des renseignements sur l'ordre de multiplicité de la racine a, alors que la valeur absolue définie par le second cas renseigne sur le comportement à l'infini. Ceci explique la notation $|\ |_\infty$ donnée à la valeur absolue définie ci-dessus. Plus généralement, à tout point d'une surface de RIEMANN on peut faire correspondre une valeur absolue sur le corps des fonctions définies sur cette surface.

Valeurs absolues exponentielles

On peut associer à une valeur absolue non-archimédienne φ une application $\nu : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par

$$\nu(a) = \begin{cases} \infty \text{ pour } a = 0 \\ -\ln \varphi(a) \text{ pour } a \neq 0 \end{cases}$$

qui possède les propriétés suivantes :

(E1) : $\nu(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$,

(E2) : $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$,

(E3) : $\nu(a + b) \geq \min(\{\nu(a), \nu(b)\})$.

Déf. 4 : Toute application $\nu : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ vérifiant les propriétés énoncées ci-dessus est appelée *valeur absolue exponentielle* ou *valuation* sur K. Si $\nu(a) = 0$ pour tout $a \neq 0$, elle est dite triviale.

On peut inversement passer de toute valeur absolue exponentielle à une valeur absolue non archimédienne. Aux valeurs absolues p-adiques correspondent les valuations p-adiques vérifiant $\nu_p(a) = \alpha_p$, où α_p est l'exposant de p dans la décomposition de a.

L'ensemble $W = \{\nu(a) | a \neq 0 \wedge a \in K\}$ constitue un groupe additif, groupe des valeurs prises par ν.

Déf. 5 : Si $W \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une plus petite valeur strictement positive, alors ν est dite *discrète*, et *dense* dans le cas contraire.

Les valeurs des valuations discrètes, dont les ν_p sur $\mathbb{Q}$ font toutes partie, sont multiples de leur plus petite valeur strictement positive, qui peut alors être normée à 1. Dans le cas contraire, elles sont denses sur $\mathbb{R}$. Dans ce dernier cas, les valeurs absolues exponentielles sont appelées simplement valuations.

Dans la théorie des nombres, les valuations discrètes sont particulièrement importantes.

Th. 4 : *Pour les valuations non triviales, le sous-ensemble $B = \{x | x \in K \wedge \nu(x) \geq 0\}$ de K est un anneau intègre dont le corps des quotients est K lui-même. Le sous-ensemble $\mathfrak{p} = \{x | x \in K \wedge \nu(x) > 0\}$ est un idéal premier dans B.*

$\mathfrak{p}$ est appelé *idéal premier* de ν, et $\mathfrak{r} = B/\mathfrak{p}$ est le *corps des classes résiduelles* de ν.

Rem. : Si la valuation est discrète et si $a \in K$ est un élément tel que $\nu(a)$ soit la plus petite valeur strictement positive de $\nu(K)$, alors $\mathfrak{p} = (a)$.

Si K est de caractéristique p (*cf.* p. 105), alors il en est de même du corps des classes résiduelles $\mathfrak{r}$; si par contre K est de caractéristique 0, $\mathfrak{r}$ peut tout aussi bien être de caractéristique nulle ou égale à un nombre premier quelconque. Les valeurs absolues p-adiques illustrent ce dernier cas.

Soit W_0 le sous-groupe intersection de W et du sous-corps premier de K. Pour les valuations discrètes, le groupe quotient W/W_0 est fini. Son ordre e est appelé *ordre absolu de ramification* de la valeur absolue. Les notions associées conduisent à une classification des corps valués (fig. A, p. 124).

Clôture complète de corps valués

À la p. 61, on a introduit la méthode de CANTOR pour construire le corps $\mathbb{R}$. À l'aide des valeurs absolues, on peut définir dans $\mathbb{Q}$ les notions de suite convergente et de suite de CAUCHY. La clôture de $\mathbb{Q}$, dans laquelle toute suite de CAUCHY converge, s'est avérée être l'ensemble des classes d'équivalences dans l'anneau des suites de CAUCHY, et peut donc aussi être considérée comme le corps quotient de cet anneau par l'idéal constitué des suites nulles. Lors de cette construction, seules les propriétés des valeurs absolues ont été utilisées, ces dernières déterminant les propriétés topologiques des corps valués (i.e muni d'une valeur absolue).

À chaque corps K muni d'une valeur absolue φ, on peut associer d'une manière analogue une clôture K_φ. Des valeurs absolues équivalentes conduisent alors à la même clôture, et la valeur absolue φ est prolongeable sur K_φ, comme il est montré à la page 61. Les clôtures de $\mathbb{Q}$ selon ses différentes valeurs absolues sont notées $\mathbb{Q}_p$ (corps des nombres p-adiques, HENSEL) et $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$.

Problème du prolongement des valeurs absolues

Par passage de $\mathbb{Z}$ à un ensemble de nombres plus vaste, les propriétés de divisibilité peuvent considérablement changer, et le cas échéant, la décomposition en éléments premiers ne plus être possible. On a encore parfois seulement la décomposition d'un idéal en produit d'idéaux premiers. Une deuxième voie possible à côté de la théorie des idéaux est la théorie de la valuation. En effet, dans $\mathbb{Q}$, les nombres entiers premiers correspondent aux classes des valeurs absolues non archimédiennes. On peut étudier de manière complète les comportements de divisibilité en plongeant un anneau intègre dans son corps des quotients et en étudiant toutes ses valeurs absolues. Pour tout corps qui peut être engendré à partir de son sous-corps premier par une suite d'adjonctions d'un élément, algébrique ou transcendant, comme les valeurs absolues d'un corps premier sont parfaitement connues, il ne reste plus que le problème du prolongement des valeurs absolues d'un corps à une extension algébrique ou transcendante de ce corps, la restriction de la nouvelle valeur absolue au corps de départ devant être équivalente à la valeur absolue d'origine. Pour les extensions transcendantes, qui sont de moindre intérêt dans la théorie des nombres, on montre que toute valeur absolue discrète du corps de base se prolonge en un nombre infini de façons non équivalentes en valeurs absolues discrètes.

Dans le cas des extensions algébriques finies, la réponse au problème nécessite d'abord quelques explications.

Normes dans les extensions algébriques finies

On compare d'abord la situation au prolongement de la valeur absolue usuelle de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$. On pose alors $|\alpha| = \sqrt{|\alpha \bar{\alpha}|}$, où $\alpha\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$. $|\alpha|$ est aussi appelé norme de α, notée $N(\alpha)$. On doit donc en premier lieu définir un analogue de la norme. Soit L une extension algébrique du corps K avec $\dim(L/K) = n$ (p. 101) et une base $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ de L sur K, alors pour tout $\alpha \in L\backslash\{0\}$, l'application $\sigma_\alpha : L \to L$ définie par $x \mapsto \alpha x$ est un automorphisme de L, espace vectoriel sur K. Il lui est associé une matrice (n, n) (α_{ik}) de déterminant non nul indépendant de la base (*cf.* pp. 91, 258). On pose alors

$$N(\alpha) = \begin{cases} 0 \text{ pour } \alpha = 0 \\ \det(\alpha_{ik}) \text{ pour } \alpha \neq 0 \end{cases} .$$

Caractéristique de K	p		0				
Valeur absolue du corps premier de K	triviale		triviale		p-adique		usuelle
Caractéristique du corps des classes résiduelles $\mathfrak{R} = B / \mathfrak{p}$	car $\mathfrak{R}$ = car K		car $\mathfrak{R} = 0$ (égalité des caractéristiques)		car $\mathfrak{R} = p$ (non égalité des caractéristiques)		—
Catégorie de la valeur absolue de K	non arch. discrète	non arch. dense	non arch. discrète	non arch. dense	non arch. discrète	non arch. dense	arch. dense
Critère de classification étendue	$p, \mathfrak{R}$	$p, \mathfrak{R}$ W	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{R}$ W	$p, \mathfrak{R}$ $e = \text{card}\,(W / W_0)$	$p, \mathfrak{R}$ $W, W / W_0$	—

A

Classification des corps valués

$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ $p = 2$ et $p = 3$ sont ramifiés.
Pour tout autre nombre premier p :
p est décomposable quand $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$. C'est le cas pour $p \equiv 1,11\ (12)$.
p est premier quand $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$. C'est le cas pour $p \equiv 5,7\ (12)$.
∞ est décomposable. La valeur absolue de $\mathbb{Q}$ possède deux prolongements :
$|a+b\sqrt{3}|_{\infty_1} = |a+b\sqrt{3}|$
$|a+b\sqrt{3}|_{\infty_2} = |a-b\sqrt{3}|$ ($|\ |$ sans indice : valeur absolue usuelle de $\mathbb{R}$)
$|a+b\sqrt{3}|_{\infty_1} \cdot |a+b\sqrt{3}|_{\infty_2} = |a^2 - 3b^2| = N(a+b\sqrt{3})$

$\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ $p = 2$ et $p = 5$ sont premiers.
Pour tout autre nombre premier p :
p est décomposable quand $\left(\frac{-5}{p}\right) = 1$. C'est le cas pour $p \equiv 1, 3, 7, 9\ (20)$.
Pour $p \equiv 3,7\ (20)$, les diviseurs premiers de la décomposition ne sont plus principaux. Le corps a 2 pour nombre de classes.
p est premier quand $\left(\frac{-5}{p}\right) = -1$. C'est le cas pour $p = 11, 13, 17, 19\ (20)$.
∞ est ramifié. La valeur absolue de $\mathbb{Q}$ ne possède qu'un seul prolongement.
$|a+b\sqrt{-5}|_\infty = |a+b\sqrt{-5}| = \sqrt{a^2+5b^2} = \sqrt{N(a+b\sqrt{-5})}$
($|\ |$ sans indice : valeur absolue usuelle de $\mathbb{C}$)

B

Décomposition de nombres premiers dans des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$

$m<0$	h
$-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, \ldots$	1
$-5, -6, -10, -13, -15, -35, \ldots$	2
$-23, -31, \ldots$	3
$-14, -39, \ldots$	4
$-47, \ldots$	5

À chaque nombre de classe correspond un nombre fini de valeurs de m.

$m>0$	h
2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23, 29, 33, 37, 41, …	1
10, 15, …	2

Pour $h = 1$, on a un nombre infini de valeurs de m.

C

Exemples de nombres de classes de corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$

Prolongement de valeurs absolues discrètes sur des extensions algébriques finies

Soit K un corps valué par une valeur absolue φ, et L une extension algébrique de K vérifiant $\dim(L/K) = n$. Pour tout élément $\alpha \in L$, on introduit le réel suivant :
$\Phi(\alpha) = \sqrt[n]{\varphi(N(\alpha))}$.

Pour un élément $a \in K$, $N(a) = a^n$ et par conséquent $\Phi(a) = \varphi(a)$. Les propriétés de valuation (B1) et (B2) sont faciles à établir pour Φ, mais (B3) n'est en général pas vérifiée. La complétion de K joue ici un rôle important.

Th. 5 : *Si K est complet pour φ, alors Φ est une valeur absolue sur L. Φ est le seul prolongement de φ sur L aux équivalences près, et L est à son tour complet pour Φ.*

Si le corps de départ K n'est pas complet, on doit procéder autrement. Il suffit alors de chercher des extensions simples $L = K(\theta)$. Dans le cas d'extensions multiples, il suffit alors de progresser pas à pas. Soit $m(X)$ le polynôme minimal de θ, $m(X)$ est alors irréductible sur K, mais se décompose en général sur la clôture K_φ en un produit de facteurs irréductibles de la forme $m(X) = f_1(X) \cdot \ldots \cdot f_r(X)$.

On considère alors le corps $K_\varphi(\theta_1)$, où θ_1 est racine de $f_1(X)$. La valeur absolue peut alors être prolongée de K sur K_φ et par conséquent $K_\varphi(\theta_1)$ d'après le th. 5. Le corps $K(\theta_1)$ inclus dans $K_\varphi(\theta_1)$ est donc valué, et est d'autre part isomorphe à $L = K(\theta)$. Par cet isomorphisme, on peut prolonger la valeur absolue de $K(\theta_1)$ sur L.

Ces remarques sont valables pour les r facteurs de la décomposition de $m(X)$. On obtient ainsi r prolongements de φ sur L non équivalents, et on peut montrer que ce sont les seuls.

Rem. : Un tel prolongement est valable pour les valeurs absolues archimédiennes ou non, et peut même être étendu aux valeurs absolues exponentielles. Le procédé englobe en particulier le prolongement bien connu de la valeur absolue usuelle de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

Diviseurs

Soit $K = \mathbb{Q}$, L une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$ de degré n (p.101) et Z_L la *fermeture intégrale* de $\mathbb{Z}$ dans L, c.-à-d. l'ens. des éléments de L qui annulent un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à l'unité. Z_L est un sous-anneau du corps L contenant $\mathbb{Z}$. Un élément premier dans $\mathbb{Z}$ peut ne pas être premier dans Z_L. Mais la notion d'idéal fractionnaire permet de retrouver une propriété de décomposition en produit d'idéaux premiers.

Un *idéal fractionnaire* J de L par rapport à Z_L est un sous-module de L (module sur Z_L) pour lequel existe $d \in Z_L \setminus \{0\}$ tel que $d \cdot J \subset Z_L$. L'ens. de ces idéaux fractionnaires forme un corps commutatif $\mathfrak{I}$, les opérations étant définies comme pour les idéaux d'un anneau (p. 83).

On considère alors les valeurs absolues Φ_i (resp. les valuations W_i) qui prolongent sur L une valeur absolue p-adique φ (resp. une valuation w_0) définie par un nombre premier p donné. On normalise les valuations pour que leur plus petite valeur strictement positive soit égale à 1. Le nombre e_i tel que $W_i(p) = e_i\, w_0(p)$ est alors appelé *ordre relatif de ramification* de W_i selon w_0. Le corps des classes résiduelles de W_i est algébrique, de dimension finie f_i sur le corps des classes résiduelles de w_0; f_i est appelé *degré d'inertie de W_i par rapport à w_0*. On a $n = \sum_{i=1}^{r} e_i f_i$.

À chaque prolongement normalisé w d'une valuation discrète non triviale de $\mathbb{Q}$ on associe l'idéal $p_w = \{x \mid w(x) > 0\} \cap Z_L$. Les p_w sont les idéaux premiers de Z_L. Tout idéal fractionnaire J, au sens ci-dessus, s'écrit, de façon unique, $J = \prod_{w \in W} p_w^{d_w(J)}$ où W désigne l'ens. des valuations non triviales normalisées de L et $d_w(J) = \inf\{w(\xi) \mid \xi \in J\}$; les $d_w(J)$ sont nuls sauf pour un nombre fini de w et p_w^0 est égal à Z_L, unité de $\mathfrak{I}$.

On appelle diviseur de L toute famille $D = (d_w)_{w \in W}$ où $d_w \in w(L \setminus \{0\})$ est nul sauf pour une partie finie de W. La décomposition vue correspond à un isomorphisme entre Δ groupe additif des diviseurs (pour $(D + D')(w) = D(w) + D'(w)$) et le groupe multiplicatif des idéaux fractionnaires non nuls de L.

Un diviseur est dit principal s'il existe $\xi \in L$ tel que, pour tout w, $d_w = w(\xi)$. Les diviseurs principaux, qui correspondent aux idéaux principaux, constituent un sous-groupe H de Δ. $h = \text{card}(\Delta/H)$, appelé *nombre de classes du corps,* est fini. Sa détermination est importante en théorie des nombres.

On peut construire une extension algébrique Λ de L telle que tout diviseur de L soit principal dans Λ. C'est un problème ouvert de savoir si Λ peut être telle que tout diviseur y soit principal.

Application de la théorie de la valuation aux corps quadratiques

Soit $K = \mathbb{Q}$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{r})$ avec $r \in \mathbb{Q}$ un corps dit quadratique. Si $r = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, comme $\sqrt{ab} = b\sqrt{r}$, $\sqrt{ab}$ est aussi un élément de L. On peut donc se restreindre à l'étude des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ avec $m \in \mathbb{Z}$, où m ne possède pas de diviseur carré. Le polynôme minimal de $\sqrt{m}$ est $X^2 - m$. On tire de la théorie des restes quadratiques (p. 121) le théorème de décomposition suivant (voir aussi fig. B).

Th. 6 : *La décomposition du nombre premier $p \in \mathbb{Q}$ dans le corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ est, en désignant par $\mathfrak{p}$ l'idéal engendré par p dans Z_L :*

$p = 2 \wedge m \equiv 1(8) \Rightarrow \mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}_1 \bar{\mathfrak{p}}_2$ *(2 est décomposé).*

$p = 2 \wedge m \equiv 5(8) \Rightarrow \mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}$ *(2 est premier).*

$p = 2 \wedge (m \equiv 2(4) \vee m \equiv 3(4)) \Rightarrow \mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}^2$ *(2 est ramifié).*

$p \neq 2 \wedge p \nmid m \wedge \left(\frac{m}{p}\right) = 1 \Rightarrow \mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}_1 \bar{\mathfrak{p}}_2$ *(p est décomposé).*

$P \neq 2 \wedge p \nmid m \wedge \left(\frac{m}{p}\right) = -1 \Rightarrow \mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}$ *(p est premier).*

$p \neq 2 \wedge p \mid m \Rightarrow \mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}^2$ *(p est ramifié).*

Rem. 1 : Les notions ici développées se prolongent aux valeurs absolues archimédiennes. On donne les résultats suivants, sans pousser plus loin la théorie :
$p = \infty \wedge m > 0 \Rightarrow \infty$ est décomposé.
$p = \infty \wedge m < 0 \Rightarrow \infty$ est ramifié.

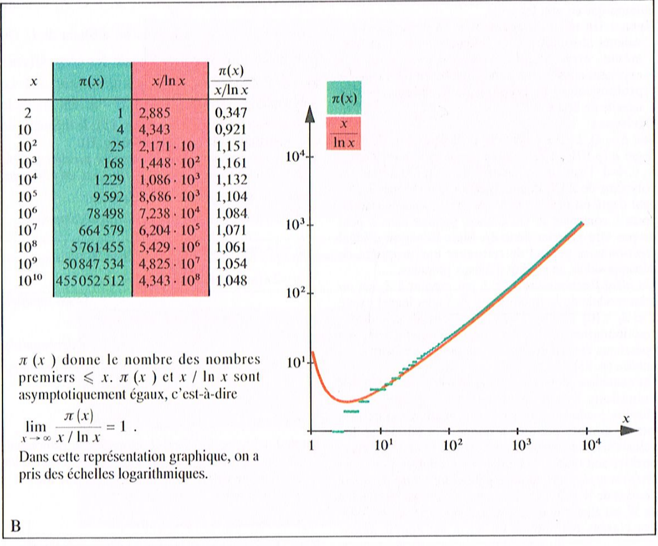
Rem. 2 : Dans une extension algébrique finie, il y a un nombre fini de diviseurs premiers ramifiés.

2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89
91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	111	113	115	117	119
121	123	125	127	129	131	133	135	137	139	141	143	145	147	149
151	153	155	157	159	161	163	165	167	169	171	173	175	177	179
181	183	185	187	189	191	193	195	197	199	201	203	205	207	209
211	213	215	217	219	221	223	225	227	229	231	233	235	237	239
241	243	245	247	249	251	253	255	257	259	261	263	265	267	269
271	273	275	277	279	281	283	285	287	289	291	293	295	297	299
301	303	305	307	309	311	313	315	317	319	321	323	325	327	329
331	333	335	337	339	341	343	345	347	349	351	353	355	357	359
361	363	365	367	369	371	373	375	377	379	381	383	385	387	389
391	393	395	397	399	401	403	405	407	409	411	413	415	417	419
421	423	425	427	429	431	433	435	437	439	441	443	445	447	449

On barre dans l'ordre les multiples des nombres premiers $p = 2, 3, 5 ...$, en commençant à chaque fois au produit $p \cdot p$. Le premier nombre non barré qui apparaît ensuite est alors le nombre premier suivant. Pour obtenir tous les nombres premiers avant un N donné, il suffit d'effectuer le procédé pour les nombres premiers $p \leqslant \sqrt{N}$. Dans l'exemple ci-dessus, $N = 450$. Il faut aller jusqu'à $p = 19$. Tous les nombres non barrés sont premiers. Pour simplifier, on a fait abstraction dès le début des multiples de 2, et évité de barrer plusieurs fois un même nombre.

A

Crible d'ERATOSTHENE



x	$\pi(x)$	$x/\ln x$	$\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$
2	1	2,885	0,347
10	4	4,343	0,921
10^2	25	$2,171 \cdot 10$	1,151
10^3	168	$1,448 \cdot 10^2$	1,161
10^4	1 229	$1,086 \cdot 10^3$	1,132
10^5	9 592	$8,686 \cdot 10^3$	1,104
10^6	78 498	$7,238 \cdot 10^4$	1,084
10^7	664 579	$6,204 \cdot 10^5$	1,071
10^8	5 761 455	$5,429 \cdot 10^6$	1,061
10^9	50 847 534	$4,825 \cdot 10^7$	1,054
10^{10}	455 052 512	$4,343 \cdot 10^8$	1,048

$\pi(x)$ donne le nombre des nombres premiers $\leqslant x$. $\pi(x)$ et $x / \ln x$ sont asymptotiquement égaux, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln x} = 1 .$$

Dans cette représentation graphique, on a pris des échelles logarithmiques.

B

Évaluation du nombre des nombres premiers

Infinité des nombres premiers

Les développements suivants sont consacrés au caractère infini de l'ensemble des nombres premiers de l'ensemble $\mathbb{N}$. L'ensemble des nombres premiers sera noté P. EUCLIDE avait déjà établi le résultat suivant :

Th. 1 : *L'ensemble des nombres premiers est infini.*

Démonstration : Si on suppose P fini, on peut construire le nombre $q = 1 + \prod_{p \in P} p$. q vérifie $q \equiv 1\ (p)$ pour tout p de P. q ne peut donc pas être décomposé en produits d'éléments premiers de P (contradiction).

EULER proposa une autre démonstration. Il partit de $\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n} = (1 - p^{-1})^{-1}$ (suites géométriques). Si p décrit P supposé fini, on a $\prod_{p \in P} (1-p^{-1})^{-1} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$.

Et comme le membre de droite est divergent quand $m \to \infty$, P ne peut pas être fini. De la divergence du produit, on tire aussi la divergence de $\sum_{p \in P} \frac{1}{p}$.

Alors que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \in P} (1 - p^{-z})^{-1}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $\mathrm{Re}z > 1$. La fonction ainsi définie est appelée *fonction de* RIEMANN et notée ζ. Elle est prolongeable à tout le plan complexe par une fonction holomorphe, et possède un seul pôle, d'ordre 1, en $z = 1$. Elle s'annule sur tous les entiers pairs négatifs et pour une infinité de complexes z tels que $0 \leq \mathrm{Re}z \leq 1$. Un nombre infini de ces zéros ont $\frac{1}{2}$ pour partie réelle.

La conjecture de RIEMANN selon laquelle tous les zéros de $\zeta(z)$ tels que $0 \leq \mathrm{Re}z \leq 1$ vérifient $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$ n'a encore ni été confirmée ni infirmée. De cette conjecture, ainsi que d'autres propriétés de la fonction ζ et de fonctions associées, on peut tirer des résultats essentiels concernant la répartition des nombres premiers (*théorie analytique de la divisibilité*).

Table des nombres premiers

Pour former une table des nombres premiers, on constitue un *crible* dans lequel les nombres non premiers sont rayés les uns à la suite des autres. Le plus vieux procédé de ce type connu est le *crible* d'ERATOSTHENE (fig. A). Il est coûteux pour des nombres élevés, et passe à côté de bien des simplifications. Il existe aujourd'hui des tables des nombres premiers allant jusqu'à $N = 5 \cdot 10^8$. Pour des domaines plus importants, on connaît le nombre de nombres premiers qu'ils contiennent. On note $\pi(x)$ pour $x \geq 2$ le nombre de nombres premiers compris entre 2 et x.

Propriétés de π

Les nombres premiers se raréfient à mesure que N croît. Leur distribution est de plus irrégulière. GAUSS et LEGENDRE énoncèrent le théorème suivant, démontré par HADAMARD et DE LA VALLÉE-POUSSIN par des moyens analytiques :

Th. 2 : $\pi(x)$ *peut être approché asymptotiquement par $x / \ln x$, c.-à-d. :*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln x} = 1 \text{ (fig. B).}$$

Pour apprécier la précision de l'approximation, on a besoin des propriétés de la fonction ζ.

D'une manière analogue à la démonstration du th. 2, on établit :

Th. 3 : $\pi(x)$ *peut être approché asymptotiquement par*

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

Ces deux derniers théorèmes sont particulièrement utiles dans l'étude des nombres premiers. Il existe d'autres résultats, qui assurent l'existence de nombres premiers dans certains intervalles. Par exemple, pour tout $N \geq 2$, il existe au moins un nombre premier entre N et $2N$ (BERTRAND, CEBYSEV). Le résultat suivant dû à DIRICHLET est important :

Th. 4 : *Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux, la suite arithmétique (c_n) définie par $c_n = a + nb$, $n \in \mathbb{N}$, contient une infinité de nombres premiers.*

Nombres de FERMAT

Les nombres $F_k = 2^{2^k} + 1\ (k \in \mathbb{N})$ sont appelés *nombres de FERMAT*. Les nombres F_k qui sont premiers jouent un rôle important dans la construction de polygones réguliers (p. 115). FERMAT prétendait que tous les F_k sont premiers. $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65\,537$ sont effectivement premiers, mais il n'en est pas de même pour F_k avec $k = 19$, ainsi qu'avec bien d'autres valeurs de k.

Nombres de MERSENNE

Les nombres $M_k = 2^k - 1$ sont appelés *nombres de MERSENNE*. On les rencontre en étudiant les *nombres parfaits*, qui sont somme de leurs diviseurs, par exemple $6 = 1 + 2 + 3$. Il n'existe sûrement pas de nombre parfait impair avant 10^{20}, ni peut-être au-delà. Les nombres pairs parfaits sont les nombres de la forme $n = M_k\, 2^{k-1}$, $k > 1$, avec $M_k \in P$.

M_k ne peut être premier que si k est premier, car de $k|l$, on tire $M_k|M_l$. Des calculs sur ordinateur montrent qu'il existe exactement 28 nombres de MERSENNE premiers pour les indices $k < 100\,000$, à savoir $k = 2$, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1 279, 2 203, 2 281, 3 217, 4 253, 4 423, 9 689, 9 941, 11 213, 19 937, 21 701, 23 208, 44 496, 86 242.

On connaît d'autres nombres de MERSENNE, par exemple pour $k = 110\,503$, $132\,049$, $216\,091$.

Problèmes non résolus de la théorie des nombres premiers

Deux nombres premiers p et q sont dits *jumeaux* si $q = p + 2$. Comme l'intervalle moyen entre deux nombres premiers consécutifs est de longueur croissante, les nombres premiers jumeaux sont de plus en plus rares. $\Sigma \frac{1}{p}$ est d'autre part divergente quand p décrit tout l'ensemble des nombres premiers, mais converge si on se restreint aux nombres premiers jumeaux (BRUN). On ne sait pas s'il y a une infinité de nombres premiers jumeaux. Une autre conjecture a été émise par GOLDBACH : tout nombre pair > 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. Elle n'a encore été ni démontrée, ni réfutée.

Géométrie analytique
Géométrie descriptive
Géométrie euclidienne élémentaire
Géométrie euclidienne
Géométrie semi-euclidienne
Géométrie hyperbolique
Géométrie semi-hyperbolique
Géométrie elliptique
Géométrie semi-elliptique
Géométrie métrique euclidienne
Géométrie absolue (métrique)
Géométrie métrique non euclidienne
Géométrie projective métrique
Géométrie projective
Géométrie projective d'incidence
Géométrie affine métrique
Géométrie affine
Géométrie affine d'incidence
D A C ¬C H ¬H P ¬P R ¬R M1 M2 M3 P1 P2 P3 P4 P5 A1 A2 A3 A4 A5

En se limitant à la géométrie plane, les axiomes indiqués (lettres cerclées) et leurs annexes permettent une construction axiomatique.

Construction de la géométrie

Méthode axiomatique

Ce sont les formes et les propriétés de notre univers qui ont donné l'impulsion au développement de la géométrie. Mais la géométrie n'est devenue une discipline proprement mathématique qu'avec l'introduction de *la méthode axiomatique*. EUCLIDE chercha en outre à définir explicitement *les concepts de base* tels que *point* et *droite*, ainsi : « Un point est ce qui ne comporte aucune partie ». Dans les axiomes il formula leurs propriétés les plus simples, tirées de l'observation, afin d'obtenir ensuite par des déductions purement logiques de nouveaux énoncés. Mais depuis HILBERT on a renoncé à de telles définitions explicites, et dans les systèmes axiomatiques modernes on postule des propriétés pour certaines relations (l'incidence, le parallélisme, l'orthogonalité, etc.) entre les concepts de base que l'on ne définit plus : ce que l'on entend par ceux-ci relève de l'interprétation du système axiomatique (voir le mot modèle p. 17).

L'axiome de parallélisme

Cette évolution fut finalement stimulée par la vaine tentative, faite pendant des siècles, de ramener l'*axiome de parallélisme* d'EUCLIDE (selon lequel par tout point extérieur à une droite on peut mener une et une seule parallèle à cette droite) à des axiomes plus simples. Son indépendance a pu finalement être démontrée par la donnée d'un modèle satisfaisant à tous les axiomes sauf à lui (modèle de Klein, p. 133). Grâce à quoi la voie fut ouverte au développement de nouvelles géométries dites *non euclidiennes*.

Géométrie absolue

Par *géométrie absolue* au sens étroit du terme on entend le système des théorèmes géométriques qui se démontrent indépendamment de l'axiome de parallélisme et de sa négation.

Si l'on restreint encore le système axiomatique, on obtient un système de théorèmes valables non seulement dans le cadre des deux géométries, euclidienne et non euclidienne classiques, mais aussi dans celui d'autres géométries, importantes dans les applications (on dira encore géométrie absolue, bien que *géométrie absolue au sens large* soit plus correct, voir p. 133). Au contraire, en ajoutant d'autres axiomes, on obtient les géométries *métrique euclidienne* et *métrique non euclidienne* (p. 137), et finalement, à côté des géométries euclidiennes, un plus grand nombre de géométries non euclidiennes (p. 182 *sqq.*).

Géométrie projective, groupes de transformations

On peut être amené à plonger certains espaces géométriques dans des surespaces géométriques, appelés *espaces projectifs*, que l'on peut définir soit à l'aide de classes d'équivalence d'éléments usuels, soit à l'aide d'axiomes particuliers. Dans un espace projectif, les éléments sont dits *éléments idéaux* (p. 143) et l'on s'intéresse aux transformations appelées *collinéations projectives* qui transforment les points en points, les droites en droites, les plans en plans, et qui conservent l'incidence (p. 141). Les collinéations projectives bijectives constituent un groupe, le *groupe projectif*. Par l'étude de ce groupe et de ses sous-groupes, on peut obtenir une classification des énoncés géométriques.

Par exemple, le groupe projectif de l'espace projectif prolongeant l'espace euclidien de dimension n possède un sous-groupe isomorphe au *groupe affine réel* de dimension n (p. 156 *sqq.*). Celui-ci contient le *groupe des similitudes* (conservation de l'orthogonalité), lequel à son tour contient le *groupe des isométries*, qui sont des compositions de réflexions et conservent les distances.

On notera que la construction de la géométrie peut également se faire, en sens inverse, en partant du groupe des transformations dites *coïncidantes* (pp. 150-169). Selon KLEIN, une mission essentielle de la géométrie consiste en la détermination de tous les invariants de ces groupes et sous-groupes.

Géométrie analytique

La *géométrie analytique* (p. 190 *sqq.*) définit et étudie les figures géométriques au moyen de grandeurs numériques et d'équations ; elle apparaît comme le fruit d'un cheminement indépendant de la construction synthétique de la géométrie, déduite de théorèmes en relation avec un système axiomatique. Les outils de travail fondamentaux sont ici les *coordonnées*. Le fait que les deux voies aboutissent à des résultats comparables provient d'abord de ce que tout espace projectif de dimension finie peut se concevoir comme un espace de coordonnées sur un corps approprié (l'introduction des coordonnées pouvant se faire de différentes façons). Par ailleurs, il est facile de vérifier pour chaque espace de coordonnées dans quelle mesure les axiomes d'une géométrie donnée sont satisfaits. Selon KLEIN ne sont d'ailleurs typiquement de géométrie que les énoncés invariants par changement de coordonnées.

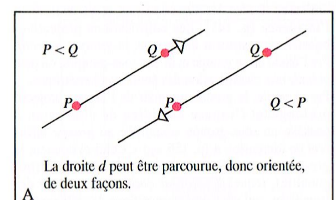
Grâce à la notion de *vecteur* (p. 190), on obtient une représentation algébrique particulière de la géométrie, qui peut faire intervenir des propriétés métriques, mais qui peut également se passer de coordonnées dans une certaine mesure.

Dans la géométrie analytique réelle ou complexe, une large place est occupée par l'étude des courbes et surfaces algébriques du second ordre (*coniques* et *quadriques*), dont l'invariance par des transformations projectives est du plus grand intérêt (pp. 196, 200 *sqq.*).

Rem. : En allant plus loin, on aborde l'étude des courbes et surfaces algébriques d'ordre supérieur et leur invariance par des transformations birationnelles (géométrie dite *algébrique*).

Géométrie descriptive

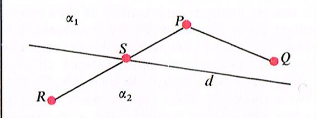
Elle a pour but de représenter graphiquement dans le plan euclidien des figures géométriques d'espaces euclidiens de dimension trois et plus (p. 174 *sqq.*). Son importance tient à l'aide qu'elle apporte à la perception intuitive de l'espace et à ses applications possibles dans les domaines de l'art et de la technique.



La droite d peut être parcourue, donc orientée, de deux façons.

A

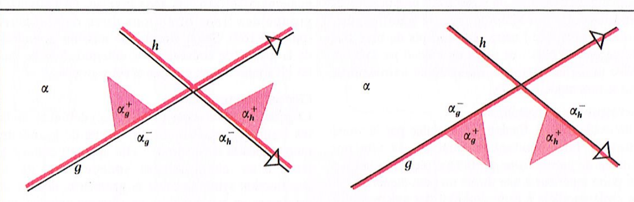
Orientation d'une droite



PQ et d n'ont pas de point commun car $P \in \alpha_1 \wedge Q \in \alpha_1$. PR et d ont un point commun S car $P \in \alpha_1 \wedge R \in \alpha_2$.

B

Division d'un plan en deux demi-plans

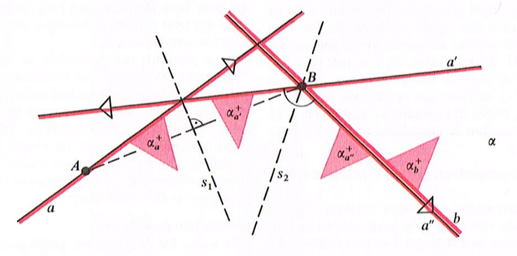


L'axe g étant donné, le plan α peut être orienté de deux façons. α_g^+, resp. α_g^-, désigne le demi-plan positif, resp. négatif, associé à g. Les demi-plans positif et négatif associés à h axe quelconque sont alors bien déterminés. Dans la première figure, le demi-plan positif est toujours situé à gauche, et le demi-plan négatif à droite. La situation est inversée dans la seconde figure. La seconde figure équivaut à la première vue depuis l'autre côté du plan. Le côté positif est caractérisé par un trait rouge complété d'un fanion.

C

Orientation d'un plan

Soit deux drapeaux (A, a, α_1) et (B, a, α_2). Par α_1 et α_2 on entend le même plan α muni d'une orientation quelconque.



Pour transformer A en B, on effectue la réflexion d'axe s_1, médiatrice du segment AB. L'axe a passant par A a pour image l'axe a' passant par B. Par la réflexion d'axe la bissectrice s_2, a' est transformé en $a'' = b$ (à l'orientation près). Comme les côtés positifs de a'' et b ne coïncident pas, on effectue une réflexion par rapport à a''. Dans des configurations différentes, moins de trois réflexions peuvent suffire à transformer le premier drapeau en le second.

D

Image de drapeaux par des réflexions dans un plan

Analyse intuitive de concepts géométriques

Dans la *méthode axiomatique*, les concepts de base de la géométrie sont définis implicitement à travers les relations existant entre eux. Tandis que le système axiomatique de HILBERT pour la géométrie euclidienne est univalent (tous les modèles de même dimension sont isomorphes), on préfère aujourd'hui proposer des systèmes axiomatiques plus simples, pourvus de nombreux modèles non isomorphes, comparables aux systèmes axiomatiques concernant les groupes, les corps, etc. Le fait que la géométrie n'entre pas dans le cadre de la théorie générale des structures tient à la terminologie et aux objectifs particuliers de ses axiomes. Au départ, les concepts géométriques sont en effet tirés de l'observation, et les résultats de la théorie doivent, au moins partiellement, pouvoir prétendre à une adaptation expérimentale.

Une justification des axiomes suppose une analyse intuitive des figures planes et spatiales de la géométrie usuelle. Les *points, droites* et *plans* apparaissent ici comme les êtres géométriques les plus simples, les droites et plans pouvant être conçus comme ensembles de points. L'*incidence* se révèle être une importante relation entre eux. Un point P est incident à une droite d lorsque $P \in d$ (P est sur d). Une droite d est incidente à un plan α lorsque $d \subset \alpha$ (d est dans α).

Intuitivement, il est possible de donner un sens de parcours à une droite de la géométrie usuelle, et ce de deux façons. Lorsque le point P est atteint avant le point Q, on écrit $P < Q$ (P est avant Q), et par l'orientation opposée on aura $Q < P$ (fig. A). Une droite orientée est appelée *axe*.

Tout point P de d divise d en deux *demi-droites*, et on peut convenir que P appartient à ces deux demi-droites (auquel cas on dit qu'elles sont fermées). Si P et Q sont deux points distincts de d, alors deux des quatre demi-droites formées ont une intersection de plus de deux points : le *segment PQ*. Les points de PQ distincts de P et Q sont situés entre P et Q. Un segment orienté est appelé *vecteur*, et une demi-droite orientée un *rayon*.

Le complémentaire d'une droite d dans un plan α est constitué de deux demi-plans (dits *ouverts*). Un segment PQ du plan, tel que P et Q appartiennent au même demi-plan, n'a aucun point commun avec d. En revanche, si P et Q sont dans deux demi-plans différents (fig. B), le segment PQ rencontre d en un point. Si en parcourant un axe dans le sens croissant on désigne arbitrairement le demi-plan de gauche comme positif, resp. négatif, et celui de droite inversement comme négatif, resp. positif, on obtient un *plan orienté*. Pour tout autre axe on peut alors préciser celui des deux demi-plans associés qui est positif, resp. négatif (fig. C). Un triplet (A, B, C) de points non alignés permet également de déterminer une orientation. On choisit l'axe défini par A et B avec $A < B$ et on décrète arbitrairement positif, resp. négatif, le demi-plan dans lequel se touve C.

De façon similaire, un plan α sépare l'*espace* en deux *demi-espaces* (dits ouverts s'ils ne rencontrent pas α). Si le plan est orienté, l'espace devient *espace orienté* par le choix des demi-espaces positif et négatif (le demi-espace positif est par exemple celui pour lequel le demi-plan positif de α apparaît à droite de l'axe qui a servi à orienter α). On appelle *drapeau* un triplet (A, a, α) composé d'un point A, d'un axe a passant par ce point et d'un plan orienté α contenant cet axe.

Une *réflexion plane* (ce sera ici une symétrie orthogonale par rapport à une droite d) est une bijection du plan sur lui-même ; elle transforme toute droite en droite ; la droite d, qu'on appelle ausssi axe de la réflexion, est la seule droite invariante point par point. Si d et le plan sont orientés, par la réflexion d'axe d, d conserve son orientation, tandis que le plan change d'orientation. En composant des réflexions on obtient des *isométries*. On peut montrer que deux drapeaux quelconques dans le plan sont images l'un de l'autre par une isométrie (ex. fig. D). C'est ce que certains appellent la *mobilité libre*.

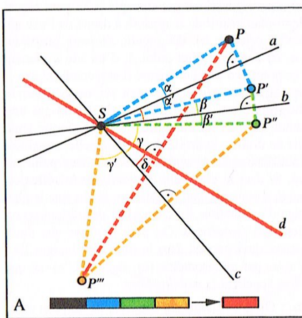
Rem. : On peut élargir les concepts de drapeau et de réflexion à l'espace. Pour toute réflexion dans l'espace (symétrie orthogonale par rapport à un plan α) il existe un et un seul plan invariant point par point (c'est α). Toute isométrie plane, resp. spatiale, est le produit d'au plus trois réflexions planes, resp. quatre réflexions spatiales.

Une autre notion importante de la géométrie usuelle est celle d'*angle*. Un angle orienté dans un plan orienté peut être défini comme un couple ordonné de deux demi-droites (les côtés de l'angle) issues d'un même point (le sommet). Pour mesurer un angle on utilise l'arc orienté du cercle de rayon 1, centré au sommet, tracé depuis le premier côté jusqu'au second en restant dans le demi-plan positif du premier côté et dans le demi-plan négatif du deuxième. On peut également considérer une paire non ordonnée de demi-droites pour définir un angle non orienté.

La portion de plan limitée par les côtés de l'angle orienté et l'arc précédent est appelée *secteur angulaire*. Lorsqu'on doit comparer ou additionner des angles (orientés), il s'agit en fait d'opérations sur des classes d'équivalence d'angles : deux angles appartiennent à la même classe d'équivalence lorsqu'ils sont transformés l'un de l'autre par un nombre pair de réflexions (isométrie directe ou déplacement). Pour additionner deux classes d'équivalence, on choisit des représentants de l'une et l'autre tels que le second côté de l'un coïncide avec le premier côté de l'autre. Le résultat est indépendant d'un tel choix.

On ne peut ordonner les angles orientés selon leurs mesures de façon compatible avec cette addition. En revanche, si l'on considère les restes modulo 2π de leurs mesures, on peut construire un ordre dit *cyclique* (p. 149) des classes d'équivalence, compatible avec l'addition.

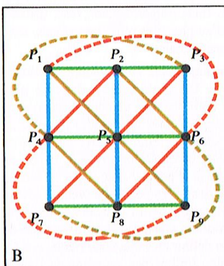
Deux droites distinctes d'un plan sont dites *orthogonales* l'une à l'autre lorsque l'une se conserve par la réflexion ayant pour axe l'autre. Elles sont dites *parallèles* si elles n'ont aucun point commun. Par un point ne passe qu'une et une seule droite orthogonale, resp. parallèle, à une droite donnée ne contenant pas ce point.



Étant donné trois droites a, b, c, ayant en commun le point S, on étudie l'image d'un point quelconque P par la composée des réflexions σ_a, σ_b, σ_c. On choisit d telle que $\delta = \alpha + \beta$, de sorte que $\sphericalangle PSP''' = 2(\alpha + \beta + \gamma)$ admet d pour bissectrice. δ coïncide avec l'angle entre a et b, et de ce fait ne dépend pas du choix de P. On a donc

$$\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_d$$

Justification intuitive de l'axiome M3

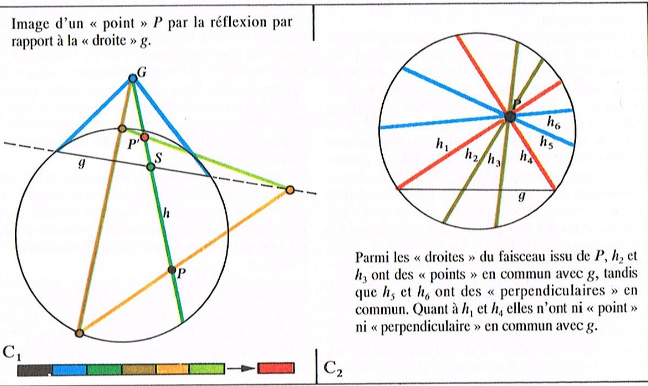


Le plan est constitué de neuf points $P_1, P_2, \ldots, P_9$. Les ensembles de points suivants, figurés par des lignes, constituent les droites du plan.

$g_1 = \{P_1, P_2, P_3\}$, $g_2 = \{P_4, P_5, P_6\}$, $g_3 = \{P_7, P_8, P_9\}$,
$g_4 = \{P_1, P_4, P_7\}$, $g_5 = \{P_2, P_5, P_8\}$, $g_6 = \{P_3, P_6, P_9\}$,
$g_7 = \{P_1, P_5, P_9\}$, $g_8 = \{P_2, P_6, P_7\}$, $g_9 = \{P_3, P_4, P_8\}$,
$g_{10} = \{P_1, P_6, P_8\}$, $g_{11} = \{P_2, P_4, P_9\}$, $g_{12} = \{P_3, P_5, P_7\}$.

L'orthogonalité entre droites est indiquée sur la figure (vert ⊥ bleu ; rouge ⊥ beige) . La réflexion par rapport à une droite g_i laisse les points de g_i invariants et échange les deux points d'une même droite orthogonale à g_i, qui ne sont pas sur g_i.

Modèle de plan métrique avec neuf points et douze droites



Modèle hyperbolique

Le plan métrique

Le *point* et la *droite* se présentent ici comme des concepts géométriques de base apparaissant dans les axiomes où ils sont implicitement définis. Soit Π l'ensemble des points, Γ celui des droites. Les points et les droites seront notés par des lettres latines majuscules et minuscules respectivement.

On définit les relations I dans $\Pi \times \Gamma$ (*incident à*), et ⊥ dans $\Gamma \times \Gamma$ (*orthogonale* ou *perpendiculaire à*). $P\mathrm{I}g$ se lit aussi : P est sur g ou g passe par P.

Déf. 1 : Une application bijective σ de $\Pi \cup \Gamma$ sur lui-même telle que $\sigma[\Pi] = \Pi$ et $\sigma[\Gamma] = \Gamma$ est appelée *collinéation orthogonale* lorsqu'elle est compatible avec les relations I et ⊥, c'est-à-dire telle que $P\mathrm{I}g \Rightarrow \sigma(P)\,\mathrm{I}\,\sigma(g)$ et $a \perp b \Rightarrow \sigma(a) \perp \sigma(b)$.

Rem. 1 : On utilisera p. 161 le simple mot de *collinéation* lorsque l'appl. bij. σ vérifie seulement $\sigma[\Pi] = \Pi$, $\sigma[\Gamma] = \Gamma$ et la compatibilité avec I.

Déf. 2 : Par *réflexion σ_g par rapport à une droite g* (ou réflexion d'axe g) on entend une collinéation orthogonale différente de l'application identité $Id_{\Pi \cup \Gamma}$ (notée Id en abrégé), qui vérifie $\sigma_g^2 = \sigma_g \circ \sigma_g = Id$ (*transformation involutive*), et qui laisse g invariante point par point.

Déf. 3 : Une transformation composée de réflexions est une *isométrie*.

Les isométries ne sont pas toutes des réflexions. Les isométries forment un groupe appelé groupe des isométries.

Déf. 4 : On appelle *plan métrique* un ensemble de points et de droites tel que :

(M1) Il existe au moins une droite. Toute droite contient au moins trois points. Par deux points distincts A et B il passe une et une seule droite dr (A, B).

(M2) Si a est orthogonale à b, alors b est orthogonale à a et il existe un point commun et un seul aux deux droites. Pour tout point P et toute droite g, il passe par P une droite perpendiculaire à g, unique si P est sur g.

(M3) Toute droite est l'axe d'au moins une réflexion. La composée de trois réflexions par rapport à trois droites ayant en commun un point ou une perpendiculaire est une réflexion par rapport à une droite (fig. A).

L'ensemble des théorèmes dérivant de ces définitions est appelé *géométrie absolue* au sens de BACHMANN.

Rem. 2 : Dans d'autres constructions de la géométrie, le concept dit de congruence remplace les concepts fondamentaux de réflexion et d'isométrie. L'utilisation de ces derniers présente toutefois un avantage : les propriétés géométriques ont une formulation algébrique particulièrement simple grâce au groupe des isométries.

Rem. 3 : En généralisant les définitions ci-dessus on peut définir des espaces géométriques métriques de dimension supérieure à celle des plans métriques.

Modèles

a) Les axiomes ont été formulés de telle façon qu'ils s'accommodent de la représentation habituelle intuitive des points et des droites. Pour obtenir un premier modèle on choisit $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On définit

comme droites les ensembles des couples solutions de toute équation linéaire à deux inconnues et à coefficients réels : $ax + by = c$ où $a^2 + b^2 \neq 0$. Deux droites déterminées par $a_1 x + b_1 y = c_1$ et $a_2 x + b_2 y = c_2$ sont dites orthogonales si $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

b) La figure B présente un modèle ne contenant que neuf points et douze droites.

c) Un troisième modèle, important (*modèle de* KLEIN, *plan hyperbolique*, p. 182 *sqq.*), est obtenu en ne retenant du plan de la géométrie usuelle que les points intérieurs à un cercle fixé comme « points », et les portions de droites intérieures au cercle comme « droites ». Le point commun, éventuellement à l'infini, des tangentes aux deux points d'intersection du cercle et d'une sécante est le pôle de cette sécante. Deux « droites » seront dites « orthogonales » lorsque la sécante contenant l'une passe par le pôle de la sécante contenant l'autre (relation symétrique). On construit (fig. C_1) le « point image » P' d'un « point » P par une réflexion d'axe une « droite » g de pôle G en commençant par tracer la « perpendiculaire » à g passant par P. Soit S son intersection avec g. P' est, sur cette « perpendiculaire », le conjugué harmonique de P par rapport à G et S, d'où sa construction (voir homologie harmonique, p. 141). Dans ce plan métrique, par un « point » extérieur à une « droite » g passe une infinité de « droites » ne rencontrant pas g, une infinité de « droites » ayant une perpendiculaire commune avec g. Il existe deux « droites » passant par P et deux seulement n'ayant aucun « point » ni aucune « perpendiculaire » en commun avec g (fig. C_2).

d) Le *plan elliptique* (p. 136) est un modèle tout à fait différent, dans lequel deux droites se coupent toujours, et il est possible que deux droites distinctes aient à la fois un point P et une perpendiculaire g en commun. Dans ce cas P est appelé pôle de g et g droite polaire de P : une droite a au plus un pôle et un point au plus une droite polaire.

Il ne faut pas confondre ces notions de pôle et polaire avec celles relatives aux coniques, qui viennent d'être utilisées dans le modèle hyperbolique. Elles sont en relation grâce au concept de polarité projective (p. 141).

Propriétés simples de la géométrie absolue

Les propriétés exigées dans l'axiome (M3) peuvent être précisées :

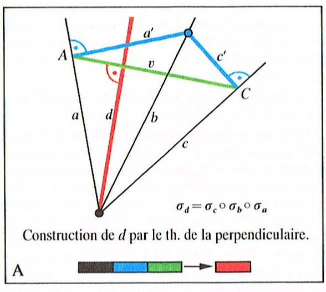
Th. 1 : *Quelle que soit la droite g, il existe une et une seule réflexion σ_g d'axe g.*

Th. 2 : *g et ses perpendiculaires sont les seules droites transformées en elles-mêmes par σ_g (droites invariantes).*

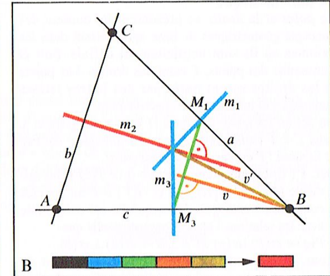
Th. 3 : *Il existe au moins deux droites g et h perpendiculaires et une droite k qui n'est perpendiculaire ni à g ni à h, et qui ne passe pas par l'intersection de g et h.*

Déf. 5 : La composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires en P est appelée *symétrie σ_P de centre P (symétrie centrale).*

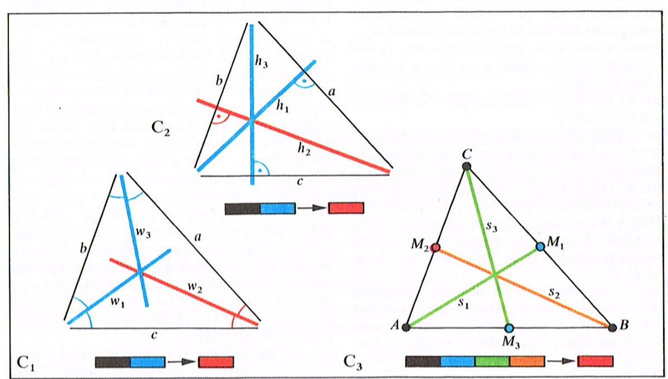
Th. 4 : *Quel que soit le point P, il existe une et une seule symétrie σ_P de centre P.*



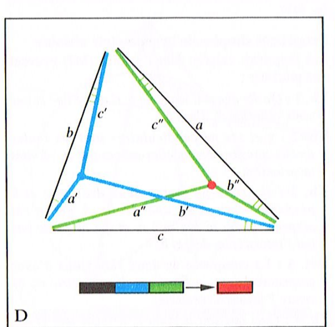
Composition de réflexions



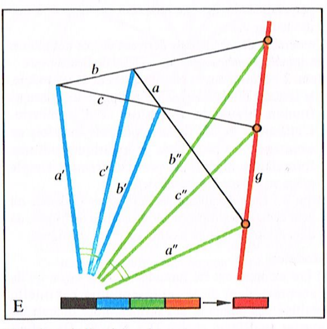
Théorème des médiatrices



Théorème des bissectrices (C_1), théorème des hauteurs (C_2), théorème des médianes (C_3)



Théorème 10



Théorème de l'antiappariement

Faisceau de droites

Si l'on compose trois réflexions dont les trois axes ont en commun soit un point soit une perpendiculaire, on obtient d'après (M3) à nouveau une réflexion par rapport à une droite. Il est vrai que dans certains plans métriques, on peut construire une réflexion en composant trois réflexions dont les axes n'ont en commun ni un point ni une perpendiculaire. On définit ainsi :

Déf. 6 : Trois droites a, b et c sont en *faisceau* lorsqu'il existe une droite d telle que $\sigma_d = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$.

Rem. : Si a, b et c sont en faisceau, la propriété reste vraie si on permute les trois droites entre elles.

Déf. 7 : Soit a et c deux droites distinctes : l'ensemble des droites b telles que a, b et c soient en faisceau est appelé *faisceau de droites* $F(a, c)$.

Dans le cas où a et c ont un point commun P, $F(a, c)$ est en général l'ensemble des droites passant par P, et P s'appelle *centre du faisceau.* Dans le cas où a et c ont une perpendiculaire commune g, $F(a, c)$ est en général l'ensemble des droites orthogonales à g, et g s'appelle *axe du faisceau.* Les faisceaux de droites dépourvus de centre ou d'axe sont dits *sans support.* Sur tout faisceau il existe une bijection involutive, appelée *antiappariement* relativement à a et c, associant à une droite x du faisceau la droite y telle que $\sigma_y = \sigma_c \circ \sigma_x \circ \sigma_a$. y est alors dite *antiappariée à x relativement à a* et c, la relation étant symétrique. Si le couple de droites (a, c) possède une bissectrice w, c.-à-d. que $\sigma_w(a) = c$ (ce qui n'est pas toujours le cas dans les plans métriques), alors x et y sont disposées symétriquement par rapport à w.

Pour voir si trois droites sont en faisceau, le théorème suivant fournit un critère important :

Th. 5 (théorème des perpendiculaires de Hjelmslev) : *Soit a, b et c trois droites en faisceau, telles que $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_d$, soit a' orthogonale à a au point A, c' orthogonale à c au point C, avec C ≠ A : alors a', b et c' sont en faisceau si, et seulement si, la droite v passant par A et C est orthogonale à d.*

Ce théorème fournit en outre éventuellement un procédé de construction de d, axe de la réflexion $\sigma_d = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$, à partir de trois droites concourantes a, b, c (fig. A).

Théorèmes relatifs aux triangles et trilatères

Par *triangle* on entend une figure constituée de trois points non alignés, appelés sommets du triangle (les droites qui les joignent sont les côtés du triangle), tandis que par *trilatère* on entend une figure composée de trois droites ne formant pas un faisceau.

On peut aborder maintenant un ensemble de théorèmes classiques concernant les triangles et trilatères, que la géométrie usuelle démontre à l'aide de propriétés qui lui sont propres.

Th. 6 (théorème des médiatrices) : *Soit le triangle de sommets A, B, C, et soit m_1, m_3 des droites telles que $\sigma_{m_1}(C) = B$, $\sigma_{m_3}(B) = A$. Il existe alors une droite m_2 telle que $\sigma_{m_2}(C) = A$ et m_1, m_2, m_3 sont en faisceau.*

Démonstration : Soit a, b, c les trois côtés du triangle (fig. B), M_1 le point commun de a et de m_1, M_3 celui de c et de m_3. Soit v une droite passant par B et perpendiculaire à la droite joignant M_1 et M_3 : alors d'après le th. 5, la droite v' antiappariée à v relativement à a et c forme un faisceau avec m_1 et m_3. Soit m_2 antiappariée à v' relativement à m_1 et m_3, alors $\sigma_{m_2} = \sigma_{m_3} \circ \sigma_{v'} \circ \sigma_{m_1}$ et par suite $\sigma_{m_2}(C) = \sigma_{m_3} \circ \sigma'_{v'} \circ \sigma_{m_1}(C) = \sigma_{m_3} \circ \sigma_{v'}(B) = \sigma_{m_3}(B) = A$

De façon similaire, on démontre les théorèmes suivants :

Th. 7 (théorème des bissectrices) : *Soit le trilatère de côtés a, b, c, et soit w_1 et w_3 deux droites telles que $\sigma_{w_1}(c) = b$, $\sigma_{w_3}(b) = a$. Alors il existe une droite w_2 formant un faisceau avec w_1 et w_3, ainsi qu'avec a et c, et telle que $\sigma_{w_2}(c) = a$* (fig. C_1).

Th. 8 (théorème des hauteurs) : *Soit un trilatère de côtés a, b, c, et soit h_1, h_2, h_3 trois droites telles que $h_1 \perp a$, $h_2 \perp b$, $h_3 \perp c$. Si a, b, h_3,* puis *a, h_2, c et h_1, b, c forment trois faisceaux, alors h_1, h_2, h_3 sont aussi en faisceau* (fig. C_2).

Th. 9 (théorème des médianes) : *Soit le triangle de sommets A, B, C, tels que $\sigma_{M_1}(C) = B$, $\sigma_{M_3}(B) = A$. Soit de plus s_1 la droite passant par A et M_1, s_3 la droite passant par C et M_3. Si s_2 est une droite passant par B et en faisceau avec s_1 et s_3, alors il existe un point M_2 incident à s_2 et vérifiant $\sigma_{M_2}(C) = A$* (fig. C_3).

À propos des droites antiappariées dans un trilatère, on peut énoncer le théorème :

Th. 10 : *Soit a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', des droites telles que a' (resp. b', c') soit antiappariée à a'' (resp. b'', c'') relativement à b et c (resp. a et c, a et b). Si a', b', c' sont en faisceau, il en va de même pour a'', b'', c''* (fig. D).

Le théorème suivant, dit de Hessenberg, est utile à la démonstration de nombreux résultats de la géométrie absolue :

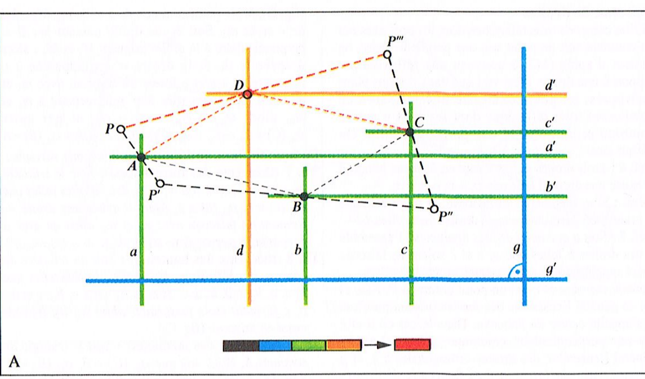
Th. 11 (théorème de l'antiappariement) : *Soit un trilatère de côtés a, b, c et trois droites en faisceau a', b', c' telles que a', b, c soient en faisceau, ainsi que a, b', c et a, b, c'. Si a'', b'', c'' sont trois droites antiappariées resp. à a', b', c', pour un même antiappariement, alors toute droite g en faisceau avec a, a'' et b, b'' sera en faisceau avec c, c''* (fig. E).

Rem. : On peut considérer les symétries centrales et les réflexions par rapport à des droites dans un espace métrique comme des points et droites d'un nouvel espace métrique, et ce en posant :

$\sigma_P \,\mathrm{I}\, \sigma_g \Leftrightarrow (\sigma_P \circ \sigma_g)^2 = Id$ (c.-à-d. $\sigma_P \circ \sigma_g$ est involutive), $\sigma_g \perp \sigma_h \Leftrightarrow (\sigma_g \circ \sigma_h)^2 = Id$ (c.-à-d. $\sigma_g \circ \sigma_h$ est involutive), et en définissant la réflexion par rapport à σ_g de la façon suivante :

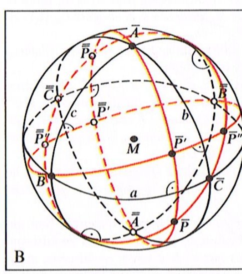
$\sigma_P \mapsto \sigma_g \circ \sigma_P \circ \sigma_g$ et $\sigma_h \mapsto \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_g$.

L'application bijective associant σ_P à P et σ_g à g permet l'identification des symétries centrales (resp. des réflexions) avec les points (resp. les droites). Les compositions de symétries centrales et de réflexions s'écrivent dès lors comme des produits d'éléments de l'espace métrique. On obtient ainsi une formalisation élégante, permettant une écriture condensée des théorèmes et de leurs démonstrations.



A

Composition de trois symétries centrales



On appelle « point » sur la sphère tout ensemble de deux points diamétralement opposés, et « droite » tout grand cercle. À partir des notions élémentaires d'orthogonalité et de réflexion, on obtient un modèle de plan métrique où il existe des trilatères polaires, c.-à-d. des figures composées de trois « droites » orthogonales deux à deux. C'est le cas ci-contre pour la figure ayant pour « sommets » $A = \{\bar{A}, \bar{\bar{A}}\}$, $B = \{\bar{B} : \bar{\bar{B}}\}$, $C = \{\bar{C}, \bar{\bar{C}}\}$.

Pour ce qui est des « réflexions » par rapport aux « droites » a, b, c, il est évident que $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = Id$. Les images de $P = \{\bar{P}, \bar{\bar{P}}\}$ sont explicitées comme exemple.

B

Exemple de plan elliptique avec un trilatère polaire

Axiomes vérifiés: R	¬ R	C	¬ C	P	¬ P	H	¬ H	Type de plan
o								métrique euclidien
	o							métrique non euclidien
o		o						euclidien
o			o					semi-euclidien
	o	o		o				elliptique
	o	o			o			semi-elliptique
	o		o			o		hyperbolique
	o		o				o	semi-hyperbolique

Remarques :

P entraîne (¬ R et C). (¬ C et H) entraîne ¬ R. ¬ H entraîne ¬ C.

C

Classification des plans métriques

Axiome du rectangle

Pour aboutir à une classification des plans métriques, il faut considérer de nouveaux axiomes.

Axiome du rectangle (**R**) : Il existe deux droites distinctes, ayant en commun deux perpendiculaires distinctes.

Rem. : La figure formée de telles droites est appelée *rectangle* .

L'axiome ¬ R, négation de R, signifie que toute paire de droites distinctes a au plus une perpendiculaire commune.

Déf. 1 : Un plan métrique vérifiant R est dit *métrique euclidien*. S'il vérifie ¬ R, il est dit *métrique non euclidien.*

On démontre alors le th. suivant :

Th. 1 : *Dans un plan métrique euclidien, deux droites ayant une perpendiculaire commune ont toutes leurs perpendiculaires communes.*

Dans un quadrilatère ayant trois de ses angles droits, le quatrième angle est également droit.

Déf. 2 : Deux droites a et b d'un plan métrique euclidien ayant une perpendiculaire commune sont dites *parallèles*, ce que l'on notera : a L b (ou $a \parallel b$).

Grâce au concept de parallélisme, on peut maintenant définir la translation comme un déplacement particulier.

Déf. 3 : Si a L b, la composition $\sigma_b \circ \sigma_a$ est appelée *translation.*

Les translations forment un sous-groupe normal commutatif du groupe des déplacements.

En ce qui concerne les symétries centrales, on a le th. suivant :

Th.2 : *Dans un plan métrique euclidien, la composition de trois symétries centrales est encore une symétrie centrale : étant donnés trois points A, B, C, il existe D tel que* $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_D$ (fig. A).

Démonstration : Soit g et g' deux droites orthogonales quelconques, a, b, c resp. a', b', c' les perpendiculaires à g' resp. g passant par A, B, C. D'après le th. 1, toute droite du faisceau (de perpendiculaires) contenant a, b, c, g est orthogonale à toute droite du faisceau dont a', b', c', g' font partie. On a par ailleurs :
$\sigma_a \circ \sigma_{a'} = \sigma_A$, $\sigma_b \circ \sigma_{b'} = \sigma_B$, $\sigma_c \circ \sigma_{c'} = \sigma_C$. De plus les deux faisceaux contiennent deux droites d et d' telles que $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_d$ et $\sigma_{c'} \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_{a'} = \sigma_{d'}$. Mais comme des réflexions par rapport à des droites perpendiculaires commutent :
$\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_c \circ \sigma_{c'} \circ \sigma_b \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_a \circ \sigma_{a'}$
$= \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_{c'} \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_{a'}$
$= \sigma_d \circ \sigma_{d'} = \sigma_D$.
D'où D est le point d'intersection de d et d'.

Dans la fig. A, on a construit l'image d'un point P quelconque par $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A$. Si, comme sur la figure, A, B, C ne sont pas alignés, alors D est le quatrième sommet du parallélogramme (A, B, C, D) tel que B et D soient opposés.

Axiome de connexion

Habituellement on conçoit deux droites parallèles dans un plan comme deux droites non concourantes, ce qui ne concorde pas tout à fait avec la notion de parallélisme donnée dans la déf. 2. Il existe des plans métriques euclidiens où par un point extérieur à une droite g il passe plusieurs droites ne coupant pas g. Mais une unique droite parmi ces dernières est parallèle à g au sens de la déf. 2. On dira de deux droites qui n'ont ni un point ni une perpendiculaire en commun qu'elles sont *non connectables.* Si on veut écarter une telle situation, il faut introduire un nouvel axiome.

Axiome de connexion (**C**) : Deux droites ont toujours un point ou une perpendiculaire en commun.

Déf. 4 : Un plan métrique euclidien où C est vérifié est dit *plan euclidien.* Si ¬ C est vérifié, le plan est dit *semi-euclidien.*

Malgré ce dernier critère, il existe une infinité de plans métriques euclidiens non isomorphes, parmi lesquels les divers plans métriques comportant un nombre fini de points.

Axiome du trilatère polaire

L'axiome C permet de mieux préciser les plans métriques non euclidiens. Si C est vérifié, il peut arriver qu'un triangle ait ses trois angles droits (fig. B).

Axiome du trilatère polaire (**P**) : Il existe trois droites a, b, c, orthogonales deux à deux.

Rem. : a, b, c sont deux à deux orthogonales si, et seulement si, $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = Id$. Alors la symétrie centrale $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_c$ est aussi une réflexion par rapport à une droite. En fait, dans les plans métriques où P est vérifié, toute symétrie centrale est également une réflexion, et C et ¬ R sont valides.

Déf. 5 : Un plan métrique où P est vérifié est dit *elliptique.* Si ¬ R, C et ¬ P sont vérifiés, le plan est dit *semi-elliptique.* (D'autres propriétés des plans elliptiques sont développées p. 187.)

Axiome hyperbolique

Il reste à étudier le cas des plans métriques non euclidiens où ¬ C est vérifié, c.-à-d. qu'il existe des droites non connectables.

Soit dans ces conditions deux telles droites g et a. Si la droite h passant par $P \in a$ est perpendiculaire à g, alors $\sigma_h(a) \neq a$ et les deux droites $\sigma_h(a)$ et g sont non connectables. Or on ne peut déduire des axiomes précédents qu'il n'existe pas plus de deux droites passant par P et non connectables à g, d'où la nécessité de l'axiome suivant :

Axiome hyperbolique (**H**) : Par un point il passe au plus deux droites non connectables à une droite donnée.

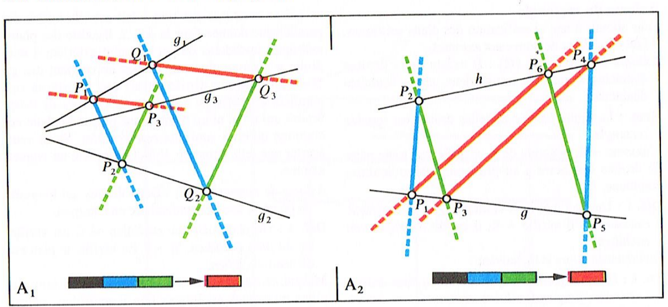
Déf. 6 : Un plan métrique où ¬ C et H sont vérifiés est dit *hyperbolique.*

Rem. : De ¬ C et H on tire ¬ R.

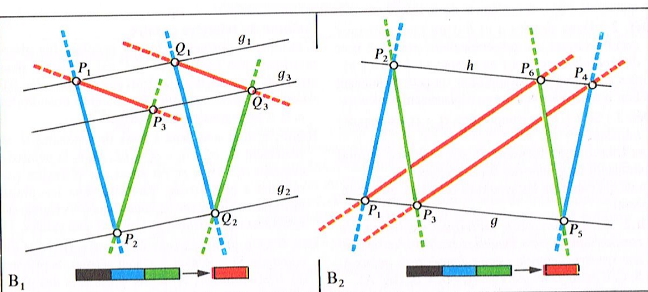
(D'autres propriétés des plans hyperboliques sont développées p. 183.)

Classification des plans métriques

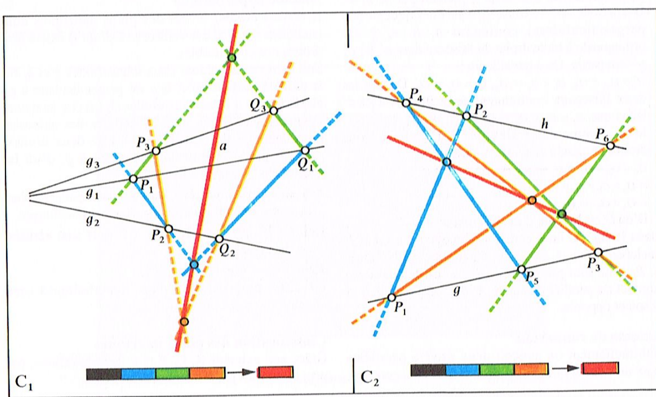
Grâce aux axiomes R, C, P et à leurs négations, on peut classer les plans métriques (tab. C).



Théorèmes de DESARGUES et PAPPUS-PASCAL (version affine)



Petits théorèmes de DESARGUES et PAPPUS-PASCAL



Théorèmes de DESARGUES et PAPPUS-PASCAL (version projective)

Plans affines

De nombreux théorèmes de géométrie, en particulier de la géométrie euclidienne, traitent exclusivement de l'incidence de points et de droites. On peut énoncer ces théorèmes sans faire appel aux notions d'orthogonalité et de réflexion, en adaptant le système axiomatique en conséquence. On peut ainsi remplacer le concept de plan métrique par un autre concept de plan :

Déf. 1 : On appelle *plan affine d'incidence* tout ensemble de points et de droites qui vérifie :

(A1) Pour toute paire de points distincts A et B, il existe une et une seule droite g incidente à A et B.

(A2) Pour toute droite g il existe au moins un point A qui ne lui est pas incident.

(A3) Étant donné une droite g et un point P non incident à g, il existe une et une seule droite h qui soit incidente à P et qui n'ait pas de point commun avec g (h est la parallèle à g passant par P).

Afin d'introduire des coordonnées, il est important de considérer les axiomes suivants, que l'on appelle *théorèmes de fermeture* et qui ne sont pas nécessairement vérifiés dans un plan affine d'incidence quelconque.

(A4′) Th. de DESARGUES (version affine) : *Soit trois droites distinctes g_1, g_2, g_3 concourantes en O ou parallèles, et les points P_1 et Q_1 de g_1, P_2 et Q_2 de g_2, P_3 et Q_3 de g_3, tous distincts de O ; si les droites dr (P_1, P_2) et dr (Q_1, Q_2) sont parallèles, ainsi que dr (P_2, P_3) et dr (Q_2, Q_3), alors dr (P_3, P_1) et dr (Q_3, Q_1) sont aussi parallèles* (fig. A_1).

(A4) Th. de PAPPUS-PASCAL (version affine) : *Soit deux droites distinctes g et h, et les points P_1, P_3, P_5 sur g, et P_2, P_4, P_6 sur h ; si les droites dr (P_1, P_2) et dr (P_5, P_4) sont parallèles, ainsi que dr (P_2, P_3) et dr (P_6, P_5), alors dr (P_3, P_4) et dr (P_1, P_6) sont aussi parallèles* (fig. A_2).

Si, dans les configurations des théorèmes de DESARGUES, resp. PAPPUS-PASCAL, les droites en noir des fig. A_1 et A_2 sont parallèles, on obtient les *petits théorèmes* de DESARGUES, resp. PAPPUS-PASCAL (fig. B). HESSENBERG a montré que le théorème de PAPPUS-PASCAL entraîne celui de DESARGUES. La réciproque est fausse : il existe des plans affines d'incidence vérifiant le seul théorème de DESARGUES.

Déf. 2 : On appelle *plan affine* un plan affine d'incidence qui vérifie (A4).

Rem. : Dans le cas ou le théorème de DESARGUES est vérifié, on parle de *plan d'incidence arguésien.*

Plans projectifs

Dans la géométrie affine, la distinction faite entre droites sécantes et parallèles est gênante. Par une complétion appropriée de l'ensemble des points et droites on peut faire en sorte que deux droites aient toujours un point commun. On considère tout faisceau de droites parallèles comme un *point impropre* incident à toutes les droites du faisceau. L'ensemble des points impropres est appelé *droite impropre*. Toute droite du plan affine (complété) possède un point impropre et un seul. Deux droites du plan affine parallèles ont en commun un point unique, leur point impropre.

Un plan affine ainsi complété est dit projectif au sens de la définition suivante :

Déf. 3 : Un ensemble de points et de droites est appelé *plan projectif d'incidence* lorsqu'il vérifie :

(P1) Pour toute paire de points distincts A et B, il existe une et une seule droite g incidente à A et B.

(P2) Pour toute paire de droites distinctes g et h il existe un et un seul point A incident à g et h.

(P3) Il existe quatre points dont trois quelconques ne sont pas incidents à une même droite.

En remplaçant les paires de côtés parallèles par des paires de côtés dont les intersections sont *colinéaires*, c.-à-d. sur une même droite (on dit aussi alignées), on peut énoncer les équivalents dans le plan projectif des théorèmes de fermeture affines.

(P4′) Théorème de DESARGUES (version projective) : *Soit trois droites distinctes g_1, g_2, g_3 concourantes en O, et les points P_1 et Q_1 de g_1, P_2 et Q_2 de g_2, P_3 et Q_3 de g_3, tous distincts de O; alors les points d'intersection des droites dr (P_1, P_2) et dr (Q_1, Q_2), dr (P_1, P_3) et dr (Q_1, Q_3), dr (P_3, P_2) et dr (Q_3, Q_2) sont colinéaires* (fig. C_1).

(P4) Théorème de PAPPUS-PASCAL (version projective) : *Soit deux droites distinctes g et h, et les points P_1, P_3, P_5 sur g, et P_2, P_4, P_6 sur h : alors les points d'intersection des droites dr (P_1, P_2) et dr (P_5, P_4), dr (P_5, P_6) et dr (P_3, P_2), dr (P_3, P_4) et dr (P_1, P_6) sont colinéaires* (fig. C).

Déf. 4 : On appelle *plan projectif* un plan projectif d'incidence qui vérifie (P4).

Rem. : Les axiomes (A5) et (P5) sont donnés p. 145.

On vient de voir comment on peut compléter un plan affine (d'incidence) pour en faire un plan projectif (d'incidence) en introduisant un nouvelle droite et en ajoutant un point à chaque droite. Réciproquement, il est possible de construire un plan affine (d'incidence) en soustrayant à un plan projectif (d'incidence) une droite quelconque et tous les points qui lui sont incidents.

Ces deux systèmes axiomatiques conduisent à des structures géométriques essentiellement identiques. Un grand avantage du système projectif est la *dualité* de ses axiomes. De fait, en échangeant les concepts de droite et de point, on obtient un système axiomatique équivalent. Dès lors, si l'on effectue cet échange dans l'énoncé d'un théorème de la géométrie projective plane, on obtient un nouveau théorème de cette même géométrie.

Relation avec le plan métrique

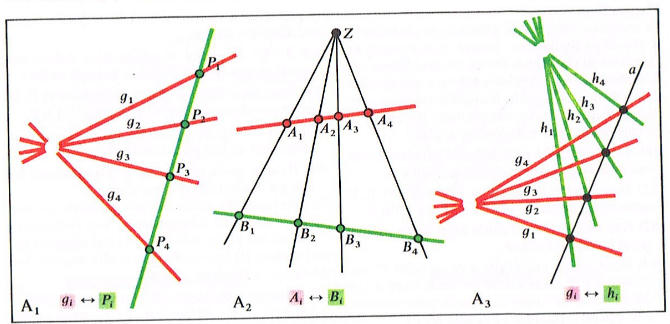
Il existe une relation simple entre les types de plans métriques définis à la p. 137 et les plans affines et projectifs.

(1) Un plan euclidien est toujours affine. Il peut être complété en un plan projectif en suivant le procédé exposé ci-dessus.

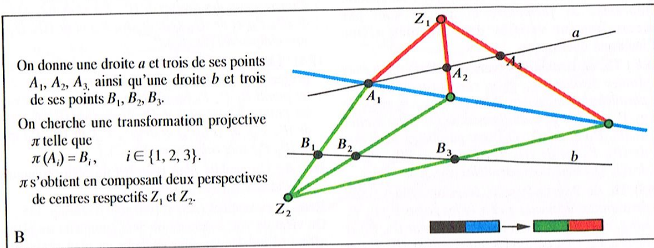
(2) Un plan elliptique est toujours projectif.

(3) Un plan hyperbolique n'est ni affine ni projectif.

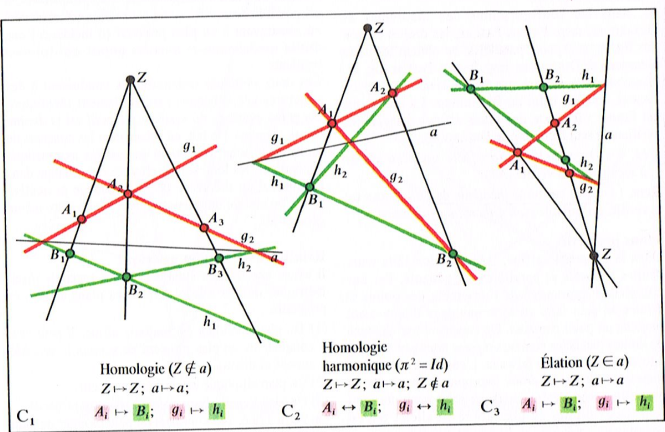
On verra à la p. 143 comment on peut plonger un plan métrique dans un plan projectif.



Images de configurations unidimensionnelles par perspective



Théorème fondamental de la géométrie projective



Collinéations perspectives

Transformations projectives de configurations unidimensionnelles

Dans les plans projectifs, il existe des transformations particulièrement importantes où interviennent largement les *configurations unidimensionnelles*, c.-à-d. les ensembles de points incidents à une même droite (*division rectiligne*), et les ensembles de droites incidentes à un même point (*faisceaux de droites*). On aborde en premier les transformations entre configurations unidimensionnelles.

Déf. 1 : Une bijection entre une division rectiligne et un faisceau de droites telle qu'un point et sa droite image soient incidents l'un à l'autre est une *perspective*. La bijection inverse est de même une perspective (fig. A).

Une composition de perspectives point → droite → point, resp. droite → point → droite est également une perspective. Dans le premier cas, si les supports des deux divisions rectilignes sont distincts, deux points homologues sont alignés avec un point fixe, appelé *centre de la perspective* (fig. A_2). Dans le second cas, si les centres des deux faisceaux sont distincts, deux droites homologues sont incidentes à un même point d'une droite fixe, appelée *axe de la perspective* (fig. A_3).

Déf. 2 : On appelle *transformation projective* une composition de perspectives.

L'importance de ce concept est illustrée par le théorème suivant, appelé *théorème fondamental de la géométrie projective*.

Th. 1 : *Il existe une et une seule transformation projective d'une division rectiligne en elle-même ou en une autre division rectiligne, transformant trois points donnés deux à deux distincts en trois points donnés deux à deux distincts.*

Collinéations

Après les transformations relatives à des configurations unidimensionnelles d'un plan projectif, on considère les transformations du plan projectif en lui-même.

Déf. 3 : Π et Γ désignant resp. l'ens. des points et l'ens. des droites d'un plan projectif, une *collinéation* de celui-ci est une transformation qui applique bijectivement Π sur Π et Γ sur Γ, en conservant l'incidence.

Déf. 4 : Une collinéation est dite *collinéation perspective* s'il existe une droite (l'*axe*) invariante point par point, et un faisceau de droites (concourantes en le *centre de la collinéation perspective*) globalement invariantes.

Th. 2 : *Dans un plan projectif, l'ensemble des collinéations perspectives de centre Z et d'axe a est un groupe commutatif pour la loi de composition.*

Le théorème de PAPPUS-PASCAL est essentiel à la démonstration du th. 2, qui n'est pas vrai dans tout plan projectif d'incidence.

Déf. 5 : Une collinéation perspective est appelée *homologie* si son axe et son centre ne sont pas incidents, et *élation* dans le cas contraire.

Si π est une collinéation perspective de centre Z et d'axe a, alors pour tout point P et toute droite g on a les

propriétés suivantes : Z, P, $\pi(P)$ sont colinéaires et a, g, $\pi(g)$ sont concourantes. Si P, Q et Z sont trois points alignés deux à deux distincts, avec P et Q non incidents à a, alors il existe une et une seule collinéation perspective de centre Z et d'axe a qui transforme P en Q. Si cette transformation est involutive, il s'agit d'une *homologie harmonique* et l'on dit que la paire de points (P, Q) est *en division harmonique* relativement à la paire (Z, A), où $A = a \cap dr\,(Z, P)$.

Déf. 6 : On appelle *collinéation projective* (*cf.* p. 129), ou *homographie*, une composition de collinéations perspectives.

La restriction d'une collinéation projective à toute configuration unidimensionnelle est une transformation projective.

Une collinéation qui transforme projectivement une division rectiligne, agit alors de même sur toute division rectiligne, et c'est une collinéation projective. Étant donnés deux quadrangles, il existe une collinéation projective qui transforme l'un en l'autre.

Corrélations

Déf. 7 : Π et Γ désignant resp. l'ensemble des points et l'ensemble des droites d'un plan projectif, une *corrélation* de celui-ci est une transformation qui applique bijectivement Π sur Γ et Γ sur Π, en conservant l'incidence.

Déf. 8 : Une corrélation est dite *projective* si sa restriction à toute configuration unidimensionnelle est une transformation projective.

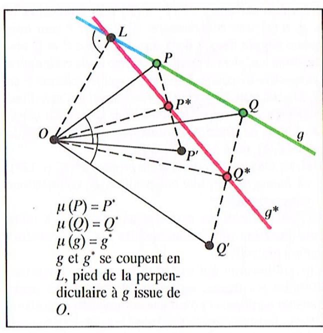
Une corrélation qui transforme projectivement une division rectiligne est alors projective. Les corrélations involutives, appelées *polarités*, jouent un rôle important dans l'étude des relations entre plans métriques et projectifs. Un point et sa droite image sont appelés resp. *pôle* et *polaire*.

Deux points sont dits *conjugués* si chacun est incident à la polaire de l'autre. Deux droites sont dites conjuguées si chacune passe par le pôle de l'autre. Un point est dit *autoconjugué* s'il est incident à sa propre polaire ; une droite est dite autoconjuguée si elle passe par son propre pôle. Lorsqu'une polarité présente des points autoconjugués, elle est dite *hyperbolique*, et lorsqu'elle n'en présente aucun, elle est dite *elliptique*.

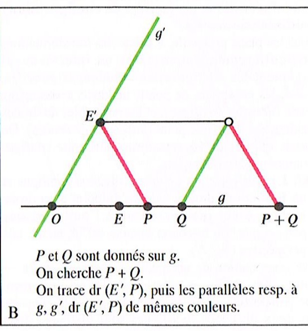
Des exemples de polarité hyperbolique sont donnés par les pôles et polaires relatifs à une conique (p. 197) ; les pôles et polaires décrits dans le modèle elliptique (p. 133) fournissent un exemple de polarité elliptique.

On peut définir dans le plan projectif muni d'une polarité une relation d'orthogonalité : deux droites sont dites orthogonales si elles sont conjuguées. Cette condition s'exprime par ex. à l'aide d'une forme quadratique (p. 145), après avoir introduit des coordonnnées (p. 143).

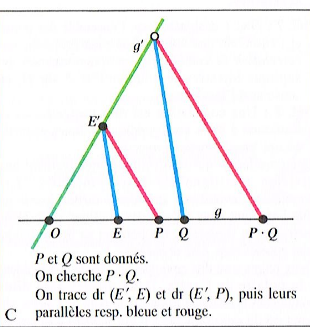
Rem. : On peut élargir à des espaces de dimension trois la recherche de collinéations et également de corrélations, qui transformeraient alors des points en plans, des plans en points, et des droites en droites.



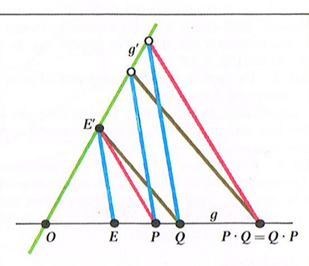
Demi-rotation dans un plan métrique



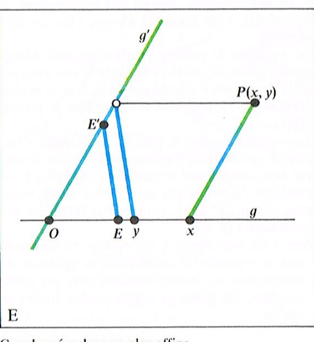
Addition de deux points dans un plan affine



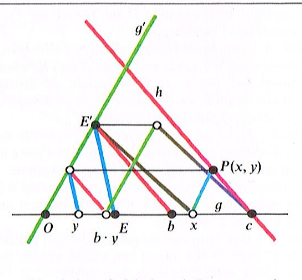
Multiplication de deux points dans un plan affine



Commutativité de la multiplication et théorème de Pappus-Pascal



Coordonnées dans un plan affine



Équation d'une droite

Rotations et demi-rotations

On a vu (p. 139) que tout plan affine pouvait être plongé dans un plan projectif. On peut également envisager de plonger un plan métrique M dans un plan projectif. L'opération, étudiée principalement par Hjemslev et Bachmann, n'est pas simple. On peut en donner une idée en supposant la condition suivante (C) remplie par M : par un point on peut mener une et une seule perpendiculaire à une droite.

Déf.1 : On appelle *rotation* de centre O la composition de deux réflexions d'axes concourants en O.

Déf. 2 : Soit δ une rotation non involutive de centre O. Pour tout couple $(P, P' = \delta(P))$ on pose :
P^* = pied de la perpendiculaire issue de O à dr (P, P') si $P \neq P'$, $P^* = P$ si $P = P'$.

L'application $P \to P^*$ est injective de Π dans Π et conserve l'alignement. On peut alors définir μ de $\Pi \cup \Gamma$ dans $\Pi \cup \Gamma$ par $\mu(P) = P^*$ et $\mu(\text{dr}(P, Q)) = \text{dr}(P^*, Q^*)$: μ, également injective, s'appelle la *demi-rotation* (de centre O) associée à δ (fig. A).

Plan idéal d'un plan métrique

Un faisceau de droites est dit *A-central* s'il est engendré par les droites passant par le point fixe A (*centre du faisceau*). Un faisceau de droites est dit *d-perpendiculaire* s'il est engendré par les droites orthogonales à la droite fixe d (dite *droite de base*).

L'image d'un faisceau central par une demi-rotation est un faisceau central. Soit O une point fixe. Tout faisceau d-perpendiculaire tel que $O \in d$ est transformé par une demi-rotation de centre O en un faisceau de même nature.

Pour tout faisceau que l'on ne peut identifier à un faisceau d-perpendiculaire tel que $O \in d$, il existe une demi-rotation de centre O qui le transforme en un faisceau central. On appelle *point idéal* tout faisceau de droites. Un point idéal est dit *propre* s'il désigne un faisceau central. À une droite a on associe l'ensemble des points idéaux auxquels elle appartient : cet ensemble s'appelle une *droite idéale propre*. Un ensemble a' de points idéaux s'appelle une *droite idéale* s'il existe une demi-rotation μ de centre O telle que $\mu(a')$ soit idéale propre.

Enfin on convient de dire que l'ensemble des points idéaux définis par les faisceaux d-perpendiculaires tels que $O \in d$ est une droite idéale. Dans ces conditions, il y a bijection d'une part entre l'ensemble des points idéaux propres et l'ensemble P des points du plan M, d'autre part entre l'ensemble des droites idéales propres et l'ensemble Γ des droites de M. Comme on peut montrer que l'ensemble des points idéaux et droites idéales a une structure de plan projectif, on en conclut assez facilement qu'on peut immerger M dans un plan projectif. Ce plongement est en fait indépendant du choix de O.

Le cas général est plus compliqué. S'il fait toujours intervenir la notion de demi-rotation (adaptée), il exige une exploitation approfondie de la technique indiquée en fin de p. 135, pour laquelle certains axiomes sont nécessaires.

Coordonnées dans les plans affines

À partir de tout corps commutatif K on peut construire un plan affine, appelé plan des coordonnées, dont les points sont les éléments de $K \times K$, et les droites les ensembles des points solutions des équations du premier degré à deux inconnues. Réciproquement, on peut concevoir tout plan affine comme un plan des coordonnées sur un corps commutatif approprié, ce qui permettra ensuite d'en faire de même pour tout plan projectif. Du fait du plongement décrit ci-dessus d'espaces métriques dans des espaces projectifs, l'introduction de coordonnées dans des espaces métriques est également envisageable.

Afin d'introduire des coordonnées dans un espace affine, on considère trois points non alignés quelconques O, E, E', définissant les droites $g = \text{dr}(O, E)$ et $g' = \text{dr}(O, E')$. On pose $K := \{P \mid P \text{I} g\}$. On définit alors les lois « + » et « · » (fig. B, C), munissant $(K ; +, \cdot)$ d'une structure de corps commutatif.

Pour justifier cette structure, on a essentiellement besoin des théorèmes de fermetures de la p. 139. Le théorème de Desargues suffit pour démontrer la structure de corps. Il faut ensuite faire appel au théorème de Pappus-Pascal pour justifier la commutativité de la loi de multiplication (fig. D). O est l'élément absorbant et E l'élément unité de K. L'association d'un couple d'éléments du corps à un point du plan affine est illustrée par la fig. E.

Les coordonnées des points d'une droite h vérifient une équation du premier degré. En dehors du cas trivial où h est parallèle à g ou g' (y ou x constant), la construction de la fig. F s'associe à l'équation $x + by = c$, où c est donné par l'intersection de g et h, et b non nul par l'intersection de g avec la parallèle à h passant par E'.

Coordonnées dans les plans projectifs

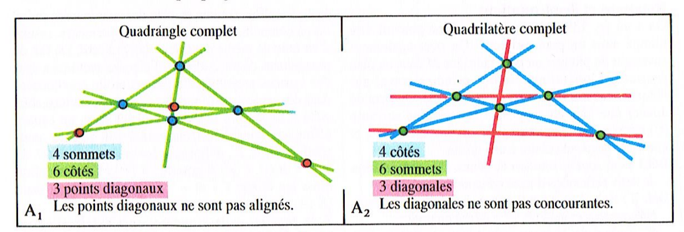
On peut construire un plan projectif comme plan de coordonnées sur un corps K commutatif à partir des triplets $(a_0, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$ d'éléments de K. On effectue une partition de l'ensemble de ces triplets en classes d'équivalence pour la relation de proportionnalité : $[\![(a_0, a_1, a_2)]\!] =$
$\{(x_0, x_1, x_2) \mid (x_0, x_1, x_2) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) \wedge \lambda \in K \setminus \{0\}\}$.
On définit comme point ou droite chacune de ces classes. Les triplets qui représentent des points sont en général notés (x_0, x_1, x_2), ceux représentant des droites sont notés (u_0, u_1, u_2). $[\![(x_0, x_1, x_2)]\!]$ et $[\![(u_0, u_1, u_2)]\!]$ sont dits incidents si $x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0$, condition qui ne dépend pas des représentants.

On vérifie aisément que l'ensemble ainsi construit vérifie les axiomes du plan projectif. Les éléments x_0, x_1, x_2, resp. u_0, u_1, u_2 sont appelés coordonnées homogènes du point, resp. de la droite : elles sont définies à un facteur multiplicatif près non nul.

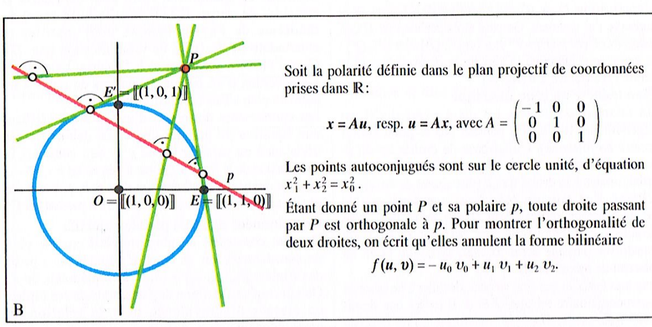
Réciproquement, étant donné un plan projectif, on peut lui associer un système de coordonnées à partir de celui construit dans le plan affine obtenu en enlevant du plan projectif une droite quelconque, appelée g_∞, et tous les points qui lui sont incidents (p. 139). À un point de coordonnées (x, y) dans le plan affine, on associe un triplet (x_0, x_1, x_2) de *coordonnées homogènes dans le plan projectif*, avec $x_1 = x \cdot x_0$, $x_2 = y \cdot x_0$, $x_0 \neq 0$.

L'équation d'une droite h distincte de g_∞ s'écrit
$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$, avec $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$, où u_0, u_1, u_2 sont des *coordonnées homogènes de la droite*.

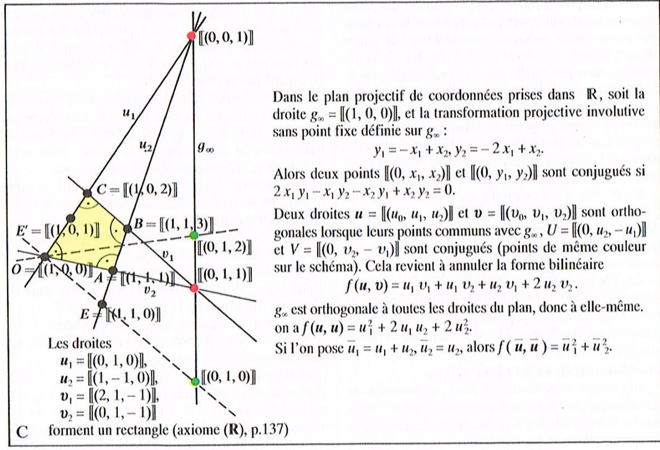
L'équation de g_∞ est $x_0 = 0$ soit $(u_0, u_1, u_2) \in [\![(1, 0, 0)]\!]$.
Tout point de coordonnées (x_0, x_1, x_2) incident à g_∞ est caractérisé par $x_0 = 0$. Le point impropre de h, intersection de h et de g_∞, est le point $[\![(0, -u_2, u_1)]\!]$. On retrouve bien toutes les classes introduites en début de paragraphe.



Quadrangle et quadrilatère complets, axiome de FANO



Plan projectif métrique ordinaire



Plan projectif métrique singulier

Axiome de FANO

Déf. 1 : Un *quadrangle complet* est formé de quatre points (les sommets) dont trois quelconques ne sont pas alignés. Ces sommets définissent deux à deux six droites (les côtés). Deux côtés qui n'ont pas de sommet en commun sont dits opposés, et leur point d'intersection est dit *diagonal* (il y a donc trois points diagonaux) (fig. A_1).

Déf. 2 : Par dualité, un *quadrilatère complet* est formé de quatre côtés, dont trois quelconques ne sont pas concourants. Ces côtés définissent deux à deux six sommets. Deux sommets qui ne sont pas situés sur un même côté sont dits opposés et la droite qui les joint est une *diagonale* (il y a donc trois diagonales) (fig. A_2).

Le plan idéal d'un plan métrique est un plan projectif (p. 143) ; il a la propriété suivante, qui n'est pas vérifiée dans tout plan projectif :

(P5) Axiome de FANO : Les points diagonaux d'un quadrangle complet ne sont pas alignés.

Déf. 3 : Un plan projectif vérifiant (P5) est appelé *plan projectif métrique.*

Rem. : On peut énoncer un axiome équivalent pour un quadrilatère complet (dualité) :

(P5′) : Les diagonales d'un quadrilatère complet ne sont pas concourantes.

Adapté à un plan affine, (P5) permet de définir un plan affine métrique et d'établir :

(A5) : Les diagonales d'un parallélogramme se coupent.

Un plan projectif vérifie (P5) si, et seulement si, le corps commutatif sur lequel sont définies les coordonnées a une caractéristique différente de 2 (p. 105). Un plan métrique peut donc toujours être plongé dans un plan projectif de coordonnées sur un corps K de caractéristique différente de 2.

Plans projectifs métriques ordinaires

Le concept d'orthogonalité non euclidienne peut être introduit dans un plan projectif métrique par la relation $a \perp b :\Leftrightarrow \pi(b)\, \mathrm{I} a$, où π est une polarité projective (p. 141). Ce plan est alors appelé *plan projectif métrique ordinaire*.

Toute homologie harmonique, ayant resp. pour centre et axe, non incidents, un pôle et sa polaire par π, transforme des droites orthogonales en des droites orthogonales. Les compositions de ces transformations, appelées *déplacements* du plan projectif métrique ordinaire, forment un groupe.

On peut aisément décrire les collinéations et corrélations projectives à l'aide de transformations linéaires, en utilisant une formulation matricielle (p. 89 *sqq.*). On appelle *vecteurs* les matrices colonnes

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$ Par échange des lignes et des colonnes on obtient les matrices transposées ${}^t x = [\![x_0, x_1\ x_2]\!]$, ${}^t u = [\![u_0, u_1\ u_2]\!]$. La classe $[\![x]\!]$ des vecteurs rx avec $r \in K \setminus \{0\}$ et $x \neq o$, $o := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, définit un point. La classe $[\![u]\!]$ des vecteurs ru avec $r \in K \setminus \{0\}$ et $u \neq o$ définit une droite. La relation ${}^t ux = 0$ signifie que $[\![x]\!]$ et $[\![u]\!]$ sont incidents.

Les corrélations et collinéations projectives admettent comme représentations resp. $x = Fu$ (ou $u = F^{-1}x$) et $x' = Ax$ (ou $u' = {}^t A^{-1} u$), les matrices $F = (f_{ik})$ et $A = (a_{ik})$ devant nécessairement vérifier $\det(F) \neq 0$ et $\det(A) \neq 0$. On notera que x, x', u, u', A, F sont connus à un facteur multiplicatif près non nul : une corrélation projective, resp. une collinéation projective, est en fait associée à $[\![F]\!]$, resp. $[\![A]\!]$, comme un point, resp. une droite, est associé à $[\![x]\!]$, resp. $[\![u]\!]$.

Une polarité π est symétrique, c.-à-d. $f_{ik} = f_{ki}$. On peut lui associer la forme bilinéaire

$$f(u, v) = {}^t uFv = {}^t vFu = \sum_{i,k=0}^{2} f_{ik} u_i v_k, \text{ avec } \det(F) \neq 0.$$

Les déplacements définis précédemment relativement à π laissent invariante la relation $f(u, v) = 0$ entre représentants de droites, et donc conservent l'orthogonalité.

Si $f(u, v)$ évoque un produit scalaire, la comparaison s'arrête au cas $f(u, v) = 0$ (orthogonalité) puisque la valeur de $f(u, v)$ n'est en fait connue qu'à un facteur multiplicatif près non nul (elle dépend des représentants). Quant à la valeur de la forme en u $f(u, u)$, si elle s'annule pour $u = u_0 \neq o$, on dit que u_0 est *isotrope* : $[\![u_0]\!]$ définit une droite orthogonale à elle-même (droite isotrope).

Si $K = \mathbb{R}$, on peut toujours choisir $\det(F) > 0$, et alors le signe de $f(u, u)$ pour une droite non isotrope ne dépend que de $[\![u]\!]$.

Rem. : Par un choix approprié du système de coordonnées, la forme bilinéaire peut s'écrire, dans K, $f(u, v) = c_0 u_0 v_0 + c_1 u_1 v_1 + c_0 c_1 u_2 v_2$, avec $c_0, c_1 \neq 0$.

Si π est hyperbolique, il existe des vecteurs non nuls u tels que $f(u, u) = 0$. Il existe donc au moins une droite orthogonale à elle-même. Si π est elliptique, $f(u, u) = 0$ entraîne $u = o$. Il n'y a pas de droite orth. à elle-même.

Un exemple est donné dans le cas hyperbolique (fig. B) ; il s'agit du plan idéal d'un plan hyperbolique (modèle de KLEIN, p. 132, fig. C).

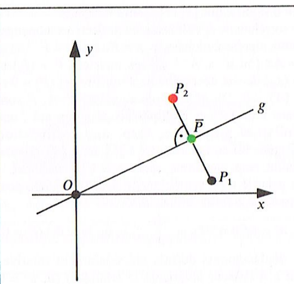
Plans projectifs métriques singuliers

En se donnant une transf. proj. π involutive et sans point fixe sur une droite quelconque g_∞, on peut construire un concept d'orthogonalité dont un cas particulier est le concept euclidien. Deux points de g_∞ images l'un de l'autre sont dits *polaires* (ou *conjugués*), et deux droites sont *orthogonales* si leurs intersections avec g_∞ sont deux points polaires (fig. C). Le plan est alors appelé *plan proj. métrique singulier*.

Les homologies harmoniques, dont le centre Z est sur g_∞ et dont l'axe coupe g_∞ au point polaire de Z, transforment des droites orthogonales en des droites orthogonales. Les compositions de ces transformations forment le groupe des « déplacements ».

Le plan projectif peut être vu ici comme un plan affine de coordonnées sur un corps K de caractéristique distincte de 2, auquel on a ajouté la droite impropre g_∞. On peut associer à la transformation π la forme bilinéaire

$$f(u, v) = \sum_{i,k=1}^{2} f_{ik} u_i v_k, \text{ où } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$



En utilisant la condition d'orthogonalité $u_1 v_1 + cu_2 v_2 = 0$ pour les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, on obtient facilement les coordonnées de $\overline{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, pied de la perpendiculaire issue de $P_1 = (x_1, y_1)$ à la droite g, passant par l'origine, d'équation $y = mx$:

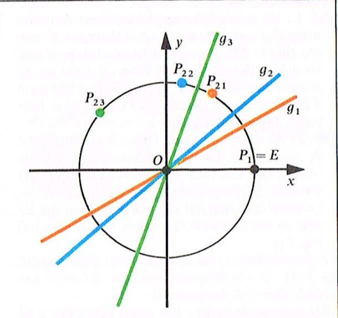
$$\bar{x} = \frac{x_1 + cmy_1}{1 + cm^2}, \quad \bar{y} = \frac{mx_1 + cm^2 y_1}{1 + cm^2}.$$

Par la symétrie de centre $\overline{P}$, P_1 est transformé en $P_2 = (x_2, y_2)$, avec

$$x_2 = \frac{(1 - cm^2)\, x_1 + 2cmy_1}{1 + cm^2},$$

$$y_2 = \frac{2mx_1 - (1 - cm^2)\, y_1}{1 + cm^2}.$$

P_2 est également l'image de P_1 par la réflexion d'axe g.



Si l'on choisit $P_1 = E\,(1, 0)$, alors

$$P_2 = \left(\frac{1 - cm^2}{1 + cm^2}, \frac{2m}{1 + cm^2}\right).$$

Les coordonnées de P_2 vérifient l'équation $x^2 + cy^2 = 1$.

L'ensemble

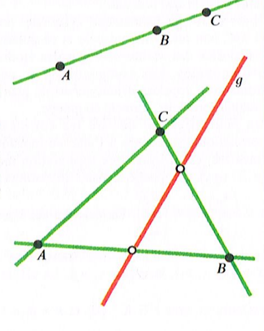
$$\left\{\left(\frac{1 - cm^2}{1 + cm^2}, \frac{2m}{1 + cm^2}\right) \middle| \, m \in K\right\} \cup \{(-1, 0)\}$$

s'appelle *le cercle unité*.

A

Réflexion d'axe passant par l'origine, cercle unité

« B est (situé) entre A et C » signifie que A, B, C sont trois points distincts alignés, et que B est également entre C et A.
Étant donné deux points distincts A et B, il existe au moins un point C tel que B soit entre A et C.
Soit A, B, C trois points non alignés et g une droite ne passant par aucun d'eux. Si g passe par un point situé entre A et B, alors g passe aussi par un point situé entre A et C ou B et C (théorème de Pash).



B

Propriétés de la relation de position selon Hilbert

Cette forme est symétrique, de det. ≠ 0, et

$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i,k=1}^{2} f_{ik}\, u_i\, u_k$ est une forme quadratique définie ($f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = 0$). On peut réduire $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ à la forme $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + c\, u_2 v_2$, où $-c$ n'est pas un carré dans K.

$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$ équivaut alors à $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Axiome de la bissectrice

On peut munir les plans euclidiens définis p. 137 d'une métrique (p. 145) : deux vecteurs $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sont dits orthogonaux s'ils annulent la forme bilinéaire $u_1 v_1 + cu_2 v_2$, où $-c$ n'est pas un carré dans le corps K des coordonnées. c est appelé *constante d'orthogonalité*. Dans de tels plans, un angle, fût-il droit, n'admet pas nécessairement de bissectrice. Le corps K des coordonnées doit en effet présenter certaines propriétés particulières, afin que soit vérifié l'axiome suivant (A^*) relatif aux angles droits et plus généralement l'axiome (A) relatif à tout angle :

(A^*) : Pour toute paire de droites orthogonales g et g', il existe une droite h telle que g soit transformée en g' par la réflexion d'axe h.

(A) : Pour toute paire de droites g et g' incidentes à un point P il existe une droite h telle que g soit transformée en g' par la réflexion d'axe h.

Ayant muni le plan d'un système orthogonal de coordonnées, on considère l'ensemble des points obtenus à partir du point (1, 0) par toutes les réflexions d'axe passant par l'origine. Cet ensemble, appelé *cercle unité*, est constitué des points de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation $x^2 + cy^2 = 1$ (fig. A).
(A^*) équivaut alors à ce que le cercle unité rencontre l'axe des ordonnées, c.-à-d. que c soit un carré dans K. Dans ce cas, on peut se placer dans un nouveau système de coordonnées tel que l'intersection du cercle unité et de l'axe des ordonnées ait pour coordonnées (0, 1), et le cercle unité ait pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Grâce aux résultats de la p. 145, on en déduit que (A^*) est vérifié si, et seulement si, -1 n'est pas un carré dans K.
(A) nécessite que toute droite passant par l'origine rencontre le cercle unité : quel que soit $m \in K$, l'ensemble des solutions de $(x^2 + y^2 = 1) \wedge (y = mx)$ ne doit pas être vide, c.-à-d. que $1 + m^2$ doit être un carré dans K. Alors K est un corps *pythagoricien*, c.-à-d. que toute somme de carrés dans K est elle-même un carré.
(A) équivaut en fait à ce que K soit pythagoricien. Or tout corps pythagoricien peut être ordonné (éventuellement de plusieurs façons), ce qui entraîne des propriétés intéressantes pour les plans euclidiens vérifiant (A).

Orientation

Un corps ordonné K de coordonnées étant donné, il existe deux relations d'ordre ≤ et deux seulement

ordonnant les points d'une droite quelconque g. Celle-ci est alors une droite orientée, appelée *axe* $(g, \leq)$ (p. 131). Un point partage une droite en deux demi-droites. Si sur g orientée on a $P < Q$ et $Q < R$, on dit que Q est entre P et R ; cela reste vrai si l'on choisit l'autre ordre sur g.

Rem. : Cette relation entre trois points d'une droite est un concept de base implicitement défini dans la construction hilbertienne de la géométrie (fig. B).

L'orientation des droites permet d'orienter le plan. Étant donné un axe $(g, \leq)$, on peut partager les points du plan non incidents à g en deux classes appelées *demi-plans ouverts*. Deux points distincts P et Q appartiennent à la même classe si g ne rencontre pas la droite (P, Q) entre P et Q. La réunion d'un des demi-plans ouverts et de g constitue un *demi-plan*. On désigne arbitrairement l'un des deux demi-plans déterminés par g comme positif, et l'autre comme négatif ; alors si l'axe $(h, \leq)$ est l'image de $(g, \leq)$ par une isométrie directe, c.-à-d. par la composition d'un nombre pair de réflexions, l'image du demi-plan positif (resp. négatif) déterminé par $(g, \leq)$ est le demi-plan positif (resp. négatif) déterminé par $(h, \leq)$. De cette façon tous les axes ont un unique « côté » positif et un unique « côté » négatif, et le plan est dit orienté. Un plan peut être orienté de deux façons. Le triplet constitué d'un point, d'un axe passant par ce point et d'un plan orienté contenant cet axe est appelé *drapeau*. Dans les plans euclidiens vérifiant (A), deux drapeaux sont toujours images l'un de l'autre par une isométrie (*mobilité libre*, p. 131).

Rem. : On appelle *pavillon* l'analogue tridimensionnel du drapeau. Deux pavillons sont toujours images l'un de l'autre par une isométrie dans l'espace.

Le plan orienté en tant qu'espace topologique

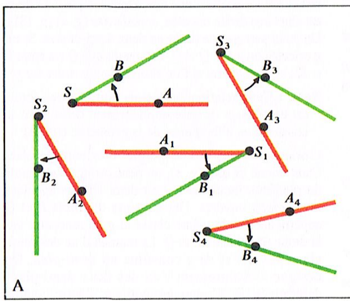
L'ensemble des intersections d'un nombre fini de demi-plans ouverts constitue une sous-base au sens topologique (p. 217), ce qui permet de munir tout plan orienté d'une structure topologique appelée *topologie naturelle*. Celle-ci vérifie l'axiome de séparation de Hausdorff (p. 227).

Complétion

Dans la géométrie euclidienne usuelle, le corps des coordonnées est le corps des réels $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, \leq)$ est archimédien (p. 57) et complet (p. 61). La propriété de complétion peut être postulée géométriquement par l'axiome suivant (dit de Dedekind) :

(D) : Si un ensemble de points d'un axe $(g, \leq)$ est majoré, alors il possède un plus petit majorant (*cf.* p. 59).

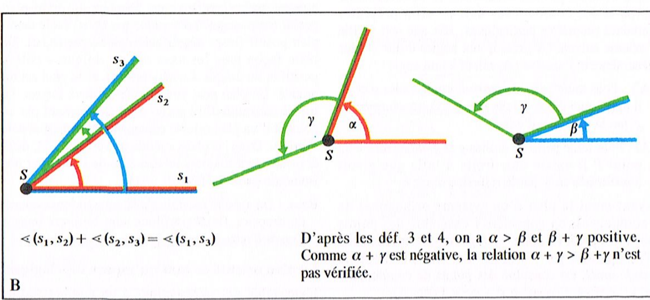
On peut montrer que le corps des coordonnées d'un plan euclidien vérifiant (A) et (D) possède un ordre archimédien et même est isomorphe à $\mathbb{R}$. On obtient ainsi le plan $\mathbb{R}^2$ euclidien de la géométrie usuelle, dans lequel on peut associer à tout segment $[A, B]$ sa longueur AB (p. 50, fig. B), et à tout polygone l'aire de sa surface (p. 161), longueur et aire étant des nombre réels positifs.



Les angles $\sphericalangle\, ASB$, $\sphericalangle\, A_1S_1B_1$ et $\sphericalangle A_3S_3B_3$ appartiennent à la même classe $\lessdot\, ASB$ pour la relation de congruence directe, tandis que $\sphericalangle\, A_2S_2B_2$ et $\sphericalangle\, A_4S_4B_4$ appartiennent à la classe opposée. Tous les angles de la figure appartiennent cependant à la même classe $|\lessdot\, ASB|$ pour la relation de congruence au sens large.

A

Angles et classes d'angles

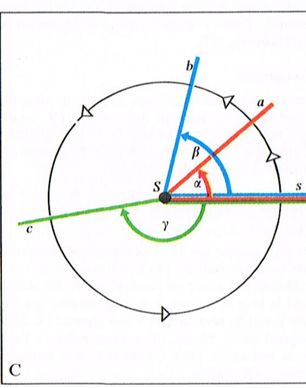


$\lessdot(s_1, s_2) + \lessdot(s_2, s_3) = \lessdot(s_1, s_3)$

D'après les déf. 3 et 4, on a $\alpha > \beta$ et $\beta + \gamma$ positive. Comme $\alpha + \gamma$ est négative, la relation $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ n'est pas vérifiée.

B

Addition et relation d'ordre



Les trois demi-droites a, b, c issues de S sont ordonnées cycliquement par la relation

$$Z_1 = \{(a, b, c), (b, c, a), (c, a, b)\}.$$

Si l'on décrit un cercle centré en S dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre, on rencontre successivement les trois demi-droites dans l'ordre donné par l'un des trois triplets de Z_1.
De la même façon, les classes $\alpha = \lessdot\,(s, a)$, $\beta = \lessdot\,(s, b)$, $\gamma = \lessdot\,(s, c)$ sont ordonnées cycliquement grâce à la relation

$$Z_2 = \{(\alpha, \beta, \gamma), (\beta, \gamma, \alpha), (\gamma, \alpha, \beta)\}.$$

$(\beta - \alpha)$ et $(\gamma - \beta)$ sont positives et $(\alpha - \gamma)$ est négative au sens de la déf. 3.
Ces relations peuvent être étendues à l'ensemble des demi-droites issues de S, resp. à l'ensemble des classes d'angles.

C

Ordre cyclique

Angles et mesures d'angles

On définit d'abord le concept d'angle dans un plan euclidien orienté :

Déf. 1 : s_1 et s_2 étant deux demi-droites issues du même point S, on appelle *angle* $\sphericalangle\,(s_1, s_2)$ le couple qu'elles forment. s_1 et s_2 sont les *côtés* de l'angle, et S en est le *sommet*.

Soit A (resp. B) un point de s_1 (resp. de s_2) distincts de S ; l'angle précédent se note également $\sphericalangle\, ASB$. Un angle dont les côtés sont confondus est dit *nul*. Si ses côtés réunis forment une droite, l'angle est dit *plat*.
Dans le but de pouvoir additionner et ordonner les angles, on introduit des classes d'équivalence.

Déf. 2 : Deux ensembles de points M_1 et M_2 sont dits *directement congruents*, $M_1 \cong M_2$, lorsque M_2 est l'image de M_1 par une isométrie directe ; M_1 et M_2 sont dits *congruents* (au sens large), $M_1 \equiv M_2$, lorsque M_2 est l'image de M_1 par une isométrie.

Ces deux relations sont des relations d'équivalence sur l'ensemble des angles. $\sphericalangle\, ASB$ étant un angle donné, on note $\lessdot\, ASB$ la classe d'équivalence associée pour la relation $\cong$ et $|\lessdot\, ASB|$ la classe associée pour la relation $\equiv$ (fig. A).
Tous les angles nuls appartiennent à la même classe, notée 0 ; de même tous les angles plats appartiennent à une même classe (π).

Rem. : Par abus de langage, les classes d'angles sont souvent appelées simplement angles. On les représente en général par des lettres grecques.

Addition de classes d'angles

Afin d'additionner deux classes d'angles α et β, on choisit un représentant de α, $\sphericalangle\,(s_1, s_2)$, et un représentant de β, $\sphericalangle\,(s_2, s_3)$, dont le premier côté est confondu avec le deuxième côté de $\sphericalangle\,(s_1, s_2)$. Par définition licite :
$\alpha + \beta = [\![\sphericalangle\,(s_1, s_2)]\!] + [\![\sphericalangle\,(s_2, s_3)]\!] := [\![\sphericalangle\,(s_1, s_3)]\!]$.
L'ensemble des classes d'angles, muni de cette loi d'addition, est un groupe isomorphe au groupe des rotations autour d'un point.

Relation d'ordre sur les classes d'angles

Un côté s d'un angle peut être complété en une droite, orientée de sorte que $S \leq A$ pour tout point A sur s. Dans un plan orienté, les demi-plans positif et négatif déterminés par s sont alors définis de façon unique.

Déf. 3 : Un angle ni nul ni plat est dit *positif* (resp. *négatif*), lorsque son deuxième côté se situe dans le demi-plan positif (resp. négatif) déterminé par s. Un angle plat est positif par convention.

Cette définition s'étend aux classes d'angles.

Déf. 4 : Soit deux classes α et β : α est supérieure à β ($\alpha > \beta$) si ($\alpha - \beta$) est positive.

Déf. 5 : Un angle $\sphericalangle\,(s_1, s_2) \in \alpha$ est *droit* lorsque d'une part α est positive et d'autre part la classe $\alpha + \alpha$ est représentée par un angle plat. $\sphericalangle\,(s_1, s_2)$ est dit *aigu* (resp. *obtus*) lorsque α est inférieure (resp. supérieure) à la classe d'un angle droit.

La relation $\leq$ est une relation d'ordre totale sur l'ensemble des classes d'angles. Elle n'est malheureusement pas compatible avec la relation d'addition précédemment définie : de $\alpha > \beta$ il ne s'ensuit pas nécessairement que $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ (fig. B).
On peut cependant montrer que les classes sont *cycliquement ordonnées*, et que la relation d'ordre cyclique est compatible avec l'addition.

Relation d'ordre cyclique

Déf. 6 : On dit que l'ensemble M est *cycliquement ordonné* par la relation ternaire Z si celle-ci vérifie les axiomes suivants :

(Z1) Si $(a, b, c) \in Z$ alors a, b, c sont deux à deux distincts.

(Z2) Si a, b, c sont deux à deux distincts et $(a, b, c) \notin Z$, alors $(c, b, a) \in Z$.

(Z3) Si $(a, b, c) \in Z$ et $(a, c, d) \in Z$, alors $(a, b, d) \in Z$.

Étant donné trois éléments a, b, c deux à deux distincts de M, parmi les six triplets possibles construits avec a, b, c, il en existe exactement trois qui appartiennent à Z : il s'agit soit de (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b), soit de (a, c, b), (c, b, a), (b, a, c) (fig. C).
Dans l'ensemble des classes d'angles, on construit la relation Z : $(\alpha, \beta, \gamma) \in Z$ si deux au moins parmi les trois classes $(\beta - \alpha)$, $(\gamma - \beta)$, $(\alpha - \gamma)$ sont positives. Z définit une relation d'ordre cyclique. Elle est compatible avec l'addition : $(\alpha, \beta, \gamma) \in Z$ entraîne $(\alpha + \delta, \beta + \delta, \gamma + \delta) \in Z$.
La relation d'ordre définie dans la section précédente peut être redéfinie ainsi : $\alpha < \beta \Leftrightarrow (0, \alpha, \beta) \in Z$.

Mesures d'angles

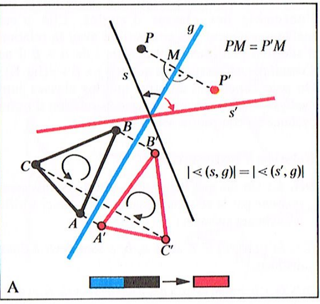
Dans la géométrie euclidienne, les mesures d'angles sont repérées par des nombres réels. Pour justifier le procédé, on commence par introduire une topologie naturelle sur l'ensemble W *cycliquement ordonné* des classes. On peut alors construire une application f, morphisme continu du groupe additif $\mathbb{R}$ dans W. Le noyau de f est isomorphe au groupe additif des nombres entiers : il est constitué des multiples entiers d'un réel positif k arbitrairement choisi.
Si l'on choisit $k = 2\pi$, la mesure d'un angle s'identifie à une longueur d'arc du cercle unité. $f^{-1}[\alpha]$ est alors la mesure d'arc de α ; elle est définie modulo 2π, en général sur les intervalles $]-\pi, \pi]$ ou $[0, 2\pi[$. Le *degré* et le *grade* sont des unités de mesure d'angle, définies

en posant : $1° := \dfrac{\pi}{180}$, $1 \text{ grad} := \dfrac{\pi}{200}$.

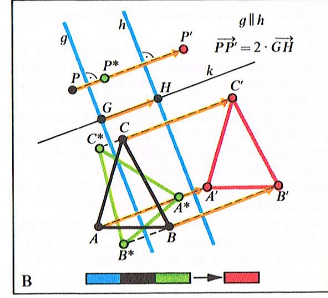
On a donc $90° = 100 \text{ grad} = \dfrac{\pi}{2}$.

La mesure de α est parfois notée $\overline{\alpha}$.

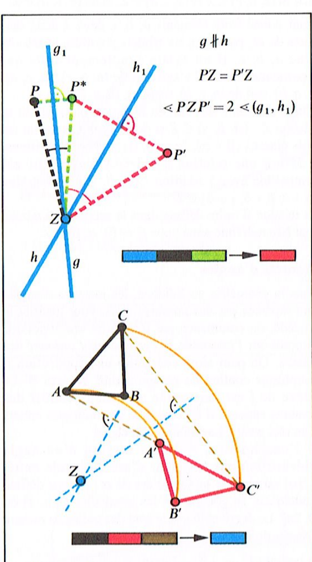
Rem. : En physique, l'unité de mesure d'angle est celle qui est associée à la mesure d'arc : on l'appelle le *radian* (π pour un angle plat).



Réflexion



Translation

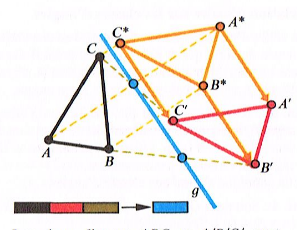


ABC et *A'B'C'* étant deux figures directement congruentes, on peut construire la rotation transformant l'une en l'autre. Le centre de la rotation est obtenu comme intersection des médiatrices des segments joignant les points *A*, *B*, *C* à leurs homologues respectifs *A'*, *B'*, *C'*. Si les médiatrices sont parallèles, c'est d'une translation qu'il s'agit, et non d'une rotation.

C

Rotation

On se propose de construire $\sigma_k \circ \sigma_h \circ \sigma_g$, avec *g* et *h* non parallèles. Soit *l* la droite passant par $S = g \cap h$ et perpendiculaire à *k* ; soit *g'* la droite telle que $\sigma_l \circ \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_{g'}$ (*g'* existe d'après (M3)). Alors $\sigma_k \circ \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_k \circ \sigma_l \circ \sigma_{g'}$. $\sigma_k \circ \sigma_l$ est une symétrie centrale, que l'on peut également décomposer en $\sigma_{k'} \circ \sigma_{h'}$, avec $k' \perp g'$ et $h' \perp k'$; alors $\sigma_k \circ \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_{k'} \circ (\sigma_{h'} \circ \sigma_{g'})$ composition d'une réflexion d'axe *k'* et d'une translation de vecteur parallèle à *k'*.



Les deux figures *ABC* et *A'B'C'* sont congruentes et d'orientations opposées. Afin de construire une réflexion-translation transformant *ABC* en *A'B'C'*, on construit l'axe de la réflexion en joignant les milieux des segments d'extrémités *A* (resp. *B*, *C*) et *A'* (resp. *B'*, *C'*).

D

Réflexion-translation



Dans les pages qui suivent on trouvera un développement de la géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ en termes de transformations : une étude systématique des divers types de collinéations permet en effet une classification claire des différentes structures géométriques usuelles. L'autre aspect, celui des propriétés d'une figure mesurables et repérables par des réels, sera également abordé ; il permet ainsi, au sein d'une structure, l'étude de configurations remarquables.

Les isométries et leurs invariants

En géométrie absolue, les réflexions ont été introduites comme des collinéations orthogonales particulières (déf. 2 p. 133). Les compositions de réflexions, ou isométries, sont également des collinéations orthogonales, l'inverse étant faux (p. 157).

D'après la déf. 2 p. 149, deux figures sont dites *congruentes* si l'une est l'image de l'autre par une isométrie. Les isométries sont de ce fait également appelées *applications coïncidantes*. Elles conservent de nombreuses propriétés importantes des figures géométriques.

Th. 2 : *Des segments coïncidants ont même longueur, des angles coïncidants ont même mesure, des surfaces coïncidantes ont même aire (déf. de la mesure de l'aire d'une surface p. 161) ; deux droites parallèles ont pour image deux droites parallèles par une isométrie.*

Réflexions

Les isométries les plus élémentaires sont les réflexions par rapport à une droite *g*. Les *éléments fixes* d'une transformation sont les points et les droites qui sont leur propre image par cette transformation. Pour une réflexion d'axe *g*, les points fixes sont les points de *g*, et les droites fixes sont *g* et toutes ses perpendiculaires.

Si *P'* est le point image de *P*, et $P' \neq P$, alors *g* est la médiatrice du segment [*P*, *P'*] (fig. A). Si *s'* est la droite image de *s*, non parallèle à *g*, alors *g* est bissectrice de l'angle de droites formé par *s* et *s'*.

$\mathbb{R}^2$ étant orienté, soit un axe (orienté) et un point *P* situé du côté positif de cet axe ; alors l'image *P'* de *P* par une réflexion est située du côté négatif de l'image de l'axe. L'orientation d'une figure est inversée par une réflexion (fig. A).

Translations

La composition $\sigma_h \circ \sigma_g$ de deux réflexions d'axes parallèles *g* et *h* (fig. B) est appelée translation (déf. 3, p. 137). Afin de mieux la décrire, il faut introduire le concept géométrique de vecteur.

Déf. 1 : Un couple de points (*P*, *P'*) est appelé *bipoint*, *P* est *l'origine* du bipoint et *P'* est dit *point d'arrivée* ou *extrémité*.

Déf. 2 : Si *P*, *P'*, *Q* et *Q'* ne sont pas alignés, les deux bipoints (*P*, *P'*) et (*Q*, *Q'*) sont dits *équipollents* lorsque $PP' = QQ'$, dr $(P, P') \parallel$ dr (Q, Q') et dr $(P, Q) \parallel$ dr (P', Q'). Si *P*, *P'*, *Q* et *Q'* sont alignés, les deux bipoints sont dits équipollents si $PP' = QQ'$ et en plus, pour $P \neq P'$, s'ils définissent la même orientation sur la droite support.

La relation d'équipollence est une relation d'équivalence.

Déf. 3 : On appelle *vecteur* une classe de bipoints équipollents, notée $\overrightarrow{PP'} = [\![(P, P')]\!]$.

Un vecteur peut être représenté par un bipoint lui appartenant. Le vecteur $\overrightarrow{P'P}$ est dit opposé à $\overrightarrow{PP'}$. Il est distinct de $\overrightarrow{PP'}$ si $P \neq P'$. La classe $[\![(P, P')]\!]$ avec $P = P'$ est appelée *vecteur nul*. Cette conception des vecteurs entre dans le même cadre général que celle de la p. 145 (voir aussi p. 204).

Th. 2 : *Tous les bipoints (P, P') où P' est l'image de P par un translation donnée, sont des représentants d'un même vecteur.*

À la différence de l'ensemble des réflexions, l'ensemble des translations est un groupe commutatif pour la loi de composition. Celle-ci induit une loi d'addition sur l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, avec comme élément neutre le vecteur nul, et faisant de l'ensemble des vecteurs un groupe isomorphe au groupe des translations.

Soit $\sigma_h \circ \sigma_g$ une translation, *k* une perpendiculaire commune à *g* et *h*, *G* et *H* les points d'intersection resp. de *k* avec *g* et *h*. Le vecteur de translation s'écrit alors : $\vec{t} = \overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{GH}$ (fig. B).

Th. 3 : *Les translations distinctes de l'identité ne présentent aucun point fixe. Les droites fixes d'une translation sont les droites dont la direction est celle du vecteur de la translation. Une translation conserve l'orientation d'une figure.*

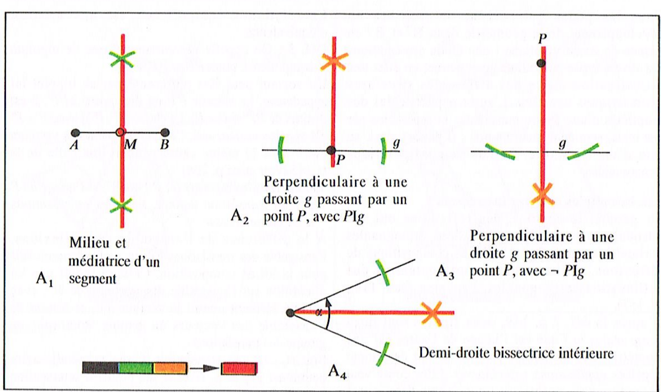
Rotations

D'après la déf. 1, p. 143, on appelle rotation la composition de deux réflexions d'axes *g* et *h* concourants (fig. C).

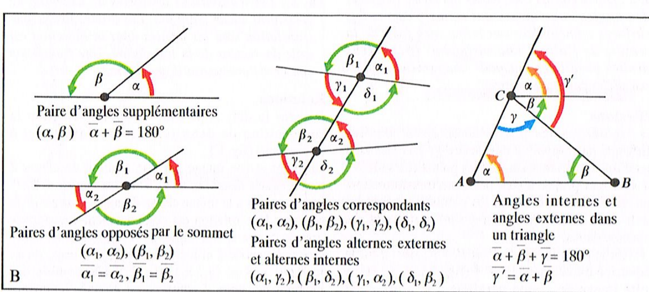
Un point et son image par une rotation de *centre Z* sont à égales distances de *Z*. Tous les angles ∢ *PZP'* appartiennent à la même classe d'angles, *l'angle de la rotation*. Une rotation est complètement caractérisée par son centre et son angle. g_1 et h_1 étant deux demi-droites issues de *Z* et incluses dans *g* et *h* resp., on a : $\sphericalangle PZP' = 2 \sphericalangle (g_1, h_1)$ (fig. C). L'ensemble des rotations de centre *Z* constitue un groupe commutatif pour la loi de composition. Les rotations distinctes de l'identité n'ont d'autre point fixe que *Z*, et en général aucune droite fixe. Dans le cas d'une rotation d'angle plat, toutes les droites passant par *Z* sont fixes (voir la symétrie centrale, p. 133). Les rotations conservent l'orientation d'une figure. L'ensemble de toutes les rotations et translations constitue le groupe des isométries directes du plan.

Réflexions-translations

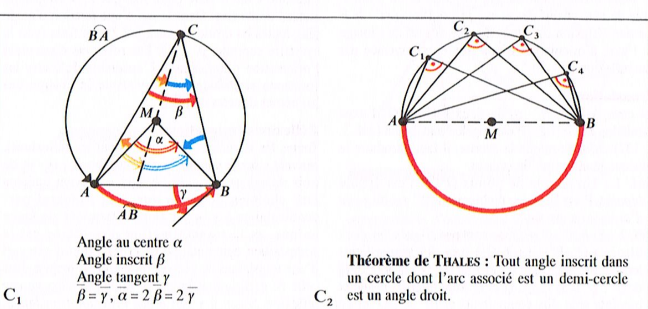
Toutes les isométries indirectes (dont les réflexions), peuvent s'écrire comme la composition $\sigma_k \circ \sigma_h \circ \sigma_g$ de trois réflexions. En outre, *k*, *h* et *g* peuvent toujours être choisies de sorte que *k* et *h* soient perpendiculaires à *g*. *g* est alors déterminée de façon unique, et la transformation considérée est la composition commutative de la réflexion d'axe *g* et d'une translation de vecteur de direction incluse dans celle de *g*. Si la translation est nulle, on retrouve une réflexion. Sinon il s'agit d'une *réflexion-translation*. Une telle transformation ne possède aucun point fixe et aucune droite fixe autre que son axe.



Constructions fondamentales à la règle et au compas



Théorème sur les angles



Angles inscrits dans un cercle

Symétries

Les transformations coïncidantes servent à étudier des figures géométriques et à résoudre des problèmes de construction, en particulier en utilisant le concept de symétrie.

Déf. 5 : Une figure est dite *symétrique* lorsqu'elle est sa propre image par une transformation coïncidante autre que l'identité. S'il s'agit d'une réflexion par rapport à une droite, une symétrie centrale ou une rotation, on parle resp. de *symétrie par rapport à un axe*, *un point* ou de *symétrie de rotation*.

De nombreux problèmes se ramènent à compléter une figure en une figure symétrique. Les *constructions de base* conduisent ainsi à des figures symétriques par rapport à un axe (fig. A).

Théorème sur les angles

Deux angles de même sommet, ayant un côté commun, et dont les deux autres côtés se complètent en une droite sont dits *supplémentaires.* La somme de leurs mesures est égale à 180°. Deux angles dont les côtés se complètent deux à deux en deux droites sont dits *opposés par le sommet* : ils ont même mesure. Les propriétés des angles définis par trois droites sont également importantes.

Déf. 6 : Soit deux droites sécantes à une troisième en A et B. Les angles de sommet A, resp. B, dont l'un des côtés passe par B, resp. A, sont appelés *angles internes* ; les autres angles sont appelés *angles externes*. Un angle interne et un angle externe, de sommets distincts et situés d'un même côté de la droite sécante, sont appelés *angles correspondants* Deux angles internes (resp. externes), issus de sommets distincts et situés de part et d'autre de la droite sécante, sont appelés *angles alternes internes (resp. alternes externes)* (fig. B).

Th. 4 : *Étant données deux droites parallèles sécantes à une troisième, les angles correspondants (resp. alternes internes, alternes externes) sont deux à deux égaux. Réciproquement, si l'une de ces paires d'angles est formée d'angles égaux, les deux premières droites sont parallèles.*

Dans un triangle, on distingue pour chaque sommet, l'angle intérieur dont les deux côtés passent chacun par le sommet de l'angle et un autre sommet du triangle, et les *angles extérieurs* supplémentaires des angles intérieurs.

Du théorème 4 on déduit le théorème sur la somme des angles intérieurs (resp. extérieurs) du triangle (fig. B) :

Th. 5 : *La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à* 180°.

Th. 6 : *Tout angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des angles intérieurs autres que son angle supplémentaire.*

Droites et angles concernant un cercle

Déf. 7 : L'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ à égale distance d'un point M est appelé *cercle* ; M est le *centre* du cercle.

Un cercle et une droite ont en commun soit deux, soit un, soit zéro point, ce qui se justifie en utilisant la symétrie que présente la figure formée par un cercle et une droite.

Déf. 8 : Une droite est dite *tangente* (resp. *sécante*) à un cercle lorsqu'elle passe par un seul point (resp. deux points) du cercle ; une droite et un cercle sont *disjoints* lorsque la droite ne passe par aucun point du cercle.

Déf. 9 : Un angle de sommet le centre d'un cercle est un angle *au centre* de ce cercle.

Un angle au centre $\sphericalangle AMB$ partage le cercle en deux arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{BA}$, associés aux angles $\sphericalangle AMB$ et $\sphericalangle BMA$. resp. (fig. C_1).

Déf. 10 : Les angles *inscrits* d'un cercle sont les angles dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés lui sont sécants.

À un angle $\sphericalangle ACB$ inscrit on associe un arc unique $\widehat{AB}$ (fig. C_1).

Déf. 11 : Les angles *tangents* d'un cercle sont les angles dont le sommet est sur le cercle, dont l'un des côtés est sécant au cercle et l'autre tangent.

À un angle tangent on associe un arc unique $\widehat{AB}$, situé du même côté de la corde AB que le côté tangent de l'angle (fig. C_1).

Th. 7 : *Étant donné un arc de cercle, tous les angles inscrits qui lui sont associés, ainsi que les deux angles tangents, ont même mesure, égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé* (fig. C_1).

Lorsque l'angle au centre est plat, l'arc support est un demi-cercle et tous les les angles inscrits associés sont droits (Th. de THALES, fig. C_2).

Théorème de coïncidence

L'image de figures simples par une transformation coïncidante suffit à la caractériser.

Th. 8 : *Une transformation coïncidante comportant trois points fixes non alignés est l'identité.*

Un corollaire de ce théorème est que la donnée de trois points non alignés et de leurs images caractérise une transformation coïncidante. Soit en effet deux transformations coïncidantes f_1 et f_2, associant les mêmes images à trois points non alignés. Alors $f_2 \circ f_1^{-1}$ a ces trois points fixes, d'où $f_2 \circ f_1^{-1} = Id$ et $f_1 = f_2$. Par suite, les triangles jouent un rôle particulier dans la géométrie élémentaire. Si deux triangles coïncident, leurs côtés (resp. angles) sont égaux en longueur (resp. mesure). Les *théorèmes de coïncidence* donnent des critères plus simples pour décider si deux triangles coïncident, évitant ainsi la comparaison fastidieuse de tous les côtés et angles :

Théorème : *Pour que deux triangles coïncident il suffit que l'une des situations suivantes soit réalisée :*

Th. 9 : *Les côtés de l'un et l'autre ont mêmes longueurs deux à deux* (CCC).

Th. 10 : *Deux côtés de l'un et l'angle intérieur associé valent, en longueur et en mesure resp., leurs correspondants dans l'autre triangle (CAC).*

Th. 11 : *Un côté et deux angles de l'un valent, en longueur et en mesure resp., leurs correspondants dans l'autre triangle (ACA ou CAA).*

Th. 12 : *Deux côtés et l'angle opposé au plus grand de l'un valent, en longueur et en mesure resp., leurs correspondants dans l'autre triangle (CCA).*

A_1 Translation

A_2 Rotation

A_3 Vissage

Isométries directes dans l'espace

B_1 Réflexion

B_2 Réflexion-translation

B_3 Réflexion-rotation

Isométries indirectes dans l'espace

La structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$ contient celle de $\mathbb{R}^2$. Une droite est définie par deux points distincts et un plan par trois points non alignés ; si une droite d n'est pas contenue dans un plan ε, $d \cap \varepsilon$ est soit un point, soit $\varnothing$, auquel cas d est *parallèle* à ε. Deux droites sont *parallèles* si elles sont *coplanaires* sans point commun ; elles sont *orthogonales* si elles admettent des parallèles qui sont coplanaires et orthogonales. Une droite d est *orthogonale à un plan* ε si elle est orthogonale à toute droite de ε ; d est orth. à ε dès qu'elle est orth. à deux droites sécantes contenues dans ε. Si d est orth. à ε elle rencontre ε en un point. Par un point P on peut mener une et une seule droite orthogonale à un plan ε (dite *perpendiculaire* ou *normale* issue de P à ε).

Deux plans distincts sont soit sécants le long d'une droite, soit sans point commun auquel cas ils sont *parallèles*. Pour que deux plans soient parallèles, il faut et il suffit qu'ils admettent une perpendiculaire commune. Il en est de même pour une droite et un plan. Un ensemble de plans parallèles à un plan donné forme un faisceau de plans, de même un ensemble de plans contenant une droite donnée.

Le plan ε_1 est orthogonal au plan ε_2 si ε_1 contient une droite orthogonale à ε_2. Alors ε_2 est également orthogonal à ε_1.

Réflexions par rapport à un plan

Étant donné un plan ε quelconque, il existe une transformation involutive σ_ε, appelée *réflexion* par rapport au plan ε, distincte de l'identité, qui transforme points, droites et plans en points, droites et plans resp., et qui conserve l'orthogonalité et l'incidence (fig. B_1). Un point P qui n'est pas dans ε, et son image $P' = \sigma_\varepsilon(P)$ sont situés de part et d'autre de ε : $[P, P']$ est orthogonal au plan ε et le coupe en son milieu. Les points fixes de σ_ε sont tous les points de ε ; les droites fixes sont toutes les droites incidentes ou orthogonales à ε (on rappelle qu'une droite est incidente à un plan si le plan la contient, p. 133) ; les plans fixes sont, outre ε, tous les plans orthogonaux à ε.

Une réflexion par rapport à un plan transforme un demi-espace positif en un demi-espace négatif, et inverse *l'orientation* d'une figure tridimensionnelle : un pas de vis droit a pour image un pas de vis gauche.

L'ensemble des *isométries* est obtenu par compositions de réflexions. Là encore, on distingue les isométries directes et indirectes.

On montre que deux pavillons de l'espace (déf. p. 147) sont images l'un de l'autre par la composition de quatre réflexions au plus, et que par suite toute isométrie se décompose en au plus quatre réflexions.

Translations

La composition de deux réflexions par rapport à des plans parallèles est appelée translation (fig. A_1) et peut être définie par un vecteur, comme dans le plan. Une translation différente de l'identité n'a pas de point fixe ; ses droites fixes sont toutes les droites de direction celle du vecteur de translation ; ses plans fixes sont tous les plans dont la direction contient le vecteur de translation.

Rotations

Si ε_1 et ε_2 ne sont pas parallèles, $\sigma_{\varepsilon_2} \circ \sigma_{\varepsilon_1}$ est une *rotation* (fig. A_2). La droite commune à ε_1 et ε_2 est l'axe de rotation, qui, avec l'angle de rotation, observable dans un plan orthogonal à l'axe, caractérise la rotation. Si l'angle de rotation n'est pas plat, la seule droite fixe est l'axe, les points fixes sont tous les points de l'axe, et les plans fixes sont tous les plans orthogonaux à l'axe. Si l'angle est plat, les droites rencontrant l'axe orthogonalement sont également fixes ainsi que les plans contenant l'axe.

Réflexions-translations

Deux cas se présentent lorsque l'on considère la composition de trois réflexions, $\sigma_{\varepsilon_3} \circ \sigma_{\varepsilon_2} \circ \sigma_{\varepsilon_1}$.

Dans le premier cas, les trois plans ε_1, ε_2, ε_3 sont orthogonaux à un quatrième, ε_4. La restriction de la transformation à ε_4 (ou à tout plan parallèle) est une isométrie indirecte plane. Dans l'espace, la transformation peut être obtenue en composant commutativement une réflexion et une translation de vecteur appartenant à la direction du plan de la réflexion : il s'agit d'une *réflexion-translation* (fig. B_2). Ses éléments fixes sont : le plan de réflexion, tous les plans orthogonaux au plan de réflexion et contenant la direction du vecteur de translation, toutes les droites du plan de réflexion dont la direction contient le vecteur de translation.

Si ε_1, ε_2, ε_3 forment un faisceau, alors $\sigma_{\varepsilon_3} \circ \sigma_{\varepsilon_2} \circ \sigma_{\varepsilon_1}$ est une simple réflexion, dont le plan peut être construit en utilisant le th. 5 p. 135.

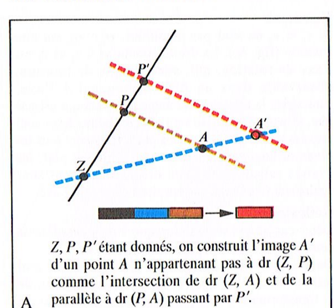
Réflexions-rotations

Dans le deuxième cas, il n'existe aucun plan orthogonal aux trois plans ε_1, ε_2, ε_3. Ces derniers sont alors deux à deux sécants ; leurs trois droites d'intersection sont concourantes en un point qui est l'unique point fixe de la transformation, celle-ci se décomposant en une rotation $\sigma_{\varepsilon_3} \circ \sigma_{\varepsilon_2}$ et une réflexion σ_{ε_1}. Il est possible de choisir une rotation et une réflexion telle que l'axe de la rotation soit orthogonal au plan de la réflexion, et que leur composition commutative donne la transformation : celle-ci s'appelle une *réflexion-rotation* (fig. B_3). L'axe de rotation et le plan de réflexion sont des éléments fixes. Un cas particulier est la symétrie centrale, obtenue par composition de trois réflexions dont les plans sont deux à deux orthogonaux. Une symétrie centrale dans l'espace n'est pas une isométrie directe comme dans le plan.

Vissages

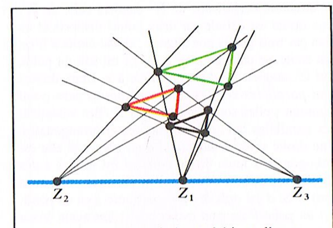
On appelle vissage la composition de quatre réflexions (fig. A_3). Un vissage se décompose toujours en une rotation et une translation de vecteur ayant la direction de l'axe de rotation. Les vissages qui ne sont ni des translations ni des rotations, n'ont pas de point fixe, ni de plan fixe sauf si l'angle de rotation est plat auquel cas les plans contenant l'axe de rotation sont fixes; l'axe de la rotation est une droite fixe.

Une transformation coïncidante dans l'espace est l'identité lorsqu'elle a quatre points fixes non coplanaires ; par suite, toute transformation coïncidante dans l'espace est caractérisée par la donnée de quatre points non coplanaires et de leurs images.



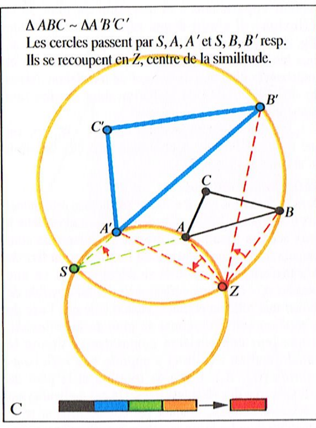
A Z, P, P' étant donnés, on construit l'image A' d'un point A n'appartenant pas à dr (Z, P) comme l'intersection de dr (Z, A) et de la parallèle à dr (P, A) passant par P'.

Homothétie



B Soit π_1, π_2, π_3 trois homothéties telles que $\pi_3 : = \pi_2 \circ \pi_1$. Soit Z_1, Z_2, Z_3 leurs centres resp., k_1, k_2, k_3 leurs rapports ; alors Z_1, Z_2, Z_3 sont alignés et $k_3 = k_1\, k_2$.

Composition de deux homothéties



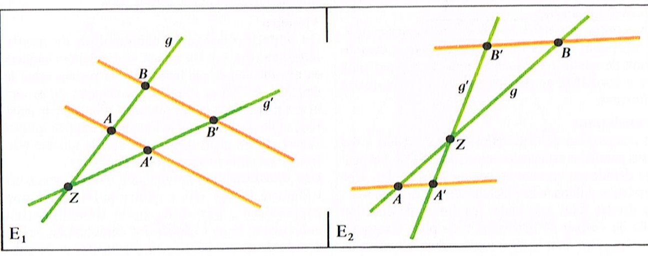
C

Homothétie-rotation

On construit T_1 et T_2 à l'aide de
$k : = A'B' : AB$
$A'\,T_1 : T_1 A = k$
$B'\,T_2 : T_2 B = k$

D

Homothétie-réflexion



Théorème des triangles homothétiques

Homothéties

Toute collinéation orthogonale n'est pas nécessairement une transformation coïncidante. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer les applications π vérifiant $\pi\,(g) \parallel g$ pour toute droite g. Une telle application est une translation si elle n'a aucun point fixe. Si elle a plus d'un point fixe, alors c'est l'identité, car toute droite passant par un point fixe est elle-même fixe. Enfin, si elle n'a qu'un seul point fixe et si $k \neq -1$ (*cf.* infra), elle n'est pas coïncidante, et la donnée du point fixe Z et d'un couple (P, P') d'un point et de son image la caractérise (fig. A). On définit ainsi :

Déf. 1 : On appelle *homothétie* une collinéation π vérifiant $\pi\,(g) \parallel g$ pour toute droite g, et comportant au moins un point fixe Z, appelé *centre de l'homothétie*.

De $\pi\,(g) \parallel g$ il s'ensuit que π est une collinéation orthogonale, et qu'un point et son image sont alignés avec Z.

On se place maintenant dans un repère dont l'origine O (0, 0) est centre de l'homothétie. Si $(k, 0)$ est l'image du point unité (1, 0), alors $P\,(a, 0)$ a pour image $P'\,(ak, 0)$ (en utilisant la fig. C p. 142). Les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OP'}$ vérifient alors $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$: on montre que $\overrightarrow{P'Q'} = k\,\overrightarrow{PQ}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

k, élément de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, est appelé *rapport* de l'homothétie. Une homothétie est complètement caractérisée par son centre Z et son rapport k. Pour $|k| > 1$ les figures sont agrandies, pour $|k| < 1$ elles sont réduites.

Pour $k = 1$ l'homothétie est l'identité ; pour $k = -1$ c'est une symétrie centrale (transformations coïncidantes).

L'ensemble des homothéties de même centre est un groupe pour la loi de composition. Par contre, la composition de deux homothéties de centres distincts et de rapports inverses k et k^{-1} est une translation : l'ensemble de toutes les homothéties n'est donc pas un groupe ; il faut le réunir à l'ensemble des translations pour obtenir le groupe des homothéties-translations.

Si la composition $\pi_3 : = \pi_2 \circ \pi_1$ de deux homothéties est elle-même une homothétie, alors les centres Z_1, Z_2 et Z_3 sont alignés, Z_1 ayant même image par π_2 et π_3 (fig. B).

Similitudes

Une figure et son image par une homothétie présentent des propriétés comparables : l'homothétie conserve les angles et le sens d'orientation; elle multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2.

Déf. 2 : Deux figures sont dites *homothétiques* lorsque l'une est l'image de l'autre par au moins une homothétie.

Les propriétés susdites d'une homothétie restent vérifiées par la composition d'une homothétie et d'une transformation coïncidante, sauf éventuellement la conservation de l'orientation d'une figure.

Déf. 3 : On appelle *similitude* toute transformation obtenue en composant une homothétie et une transformation coïncidante ; la similitude est directe ou indirecte, selon qu'elle conserve ou non l'orientation.

Déf. 4 : Deux figures sont *semblables* (ce que l'on note par ~) si l'une est l'image de l'autre par une similitude.

Rem. : Toute similitude est une collinéation orthogonale et réciproquement.
Toute similitude directe est soit une translation, soit la composition d'une homothétie et d'une rotation. La fig. C montre que dans ce dernier cas, il est toujours possible de choisir l'homothétie et la rotation de sorte que leurs centres coïncident. Une telle transformation est appelé *homothétie-rotation.*
Toute similitude indirecte est la composition d'une homothétie et d'une réflexion. On peut toujours choisir, pour $k \neq -1$, l'homothétie et la réflexion de sorte que le centre de l'homothétie soit sur l'axe de la réflexion (fig. D). Une telle transformation est appelée *homothétie-réflexion.*

L'ensemble des similitudes est un groupe pour la loi de composition, appelé *groupe des similitudes.* Le groupe des transformations coïncidantes en constitue un sous-groupe.

Théorèmes des triangles homothétiques

Th. 1 : *Soit* dr (A, B) *et* dr (A', B') *deux droites passant par Z ; si* dr (A, A') *et* dr (B, B') *sont parallèles alors :*

(1) $\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{ZA'} : \overline{ZB'}$ *et*

(2) $\overline{AA'} : \overline{BB'} = \overline{ZA} : \overline{ZB}$ (fig. E_1 et E_2).

Les deux parties (1) et (2) sont souvent appelées *premier* et *second th. des triangles homothétiques*. Les réciproques sont vraies :

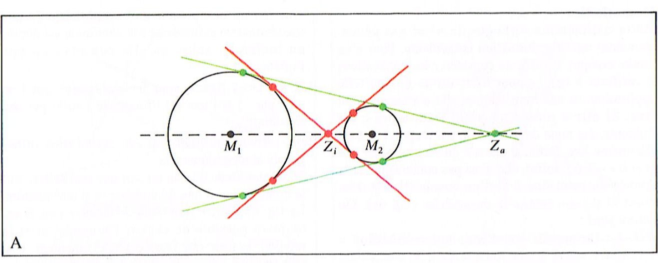
Th. 2 : *Soit deux droites* dr (A, B) *et* dr (A', B') *passant par Z. Alors* $\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{ZA'} : \overline{ZB'}$ *entraîne* dr $(AA') \parallel$ dr (BB').

Th. 3 : *Si* dr $(AA') \parallel$ dr (BB') *et s'il existe un point Z de* dr (A, B) *tel que* $\overline{AA'} : \overline{BB'} = \overline{ZA} : \overline{ZB}$ *alors Z appartient également à* dr (A', B').

Division d'un segment

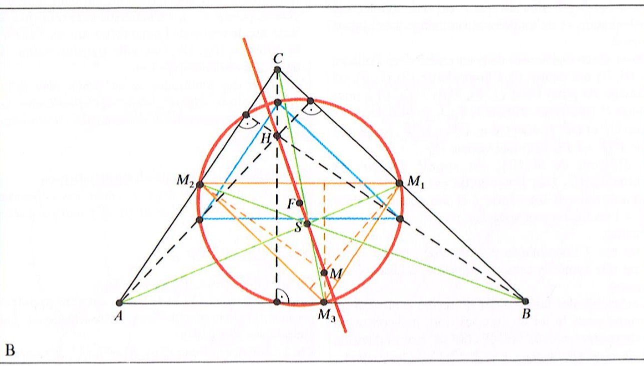
Les théorèmes sur les triangles homothétiques permettent de résoudre le problème de la division d'un segment $[A, B]$ dans un certain rapport.

Soit T un point de dr (A, B), avec $T \neq B$; soit λ le réel tel que $\overrightarrow{AT} = \lambda\,\overrightarrow{TB}$; λ est le *rapport* dans lequel T divise $[A, B\,]$: $\lambda = \overline{AT} : \overline{TB}$. λ est > 0 si T est situé entre A et B (*division intérieure*), λ est < 0 si $T \notin [A, B]$ (*division extérieure*). Un segment est divisé *harmoniquement* dans le rapport $\lambda > 0$ par les deux points T et T' si T le divise intérieurement dans le rapport λ et si T' le divise extérieurement dans le rapport $-\lambda$ (voir couples de points en division harmonique p. 141 et couple (T_i, T_e) p. 158 fig. D).



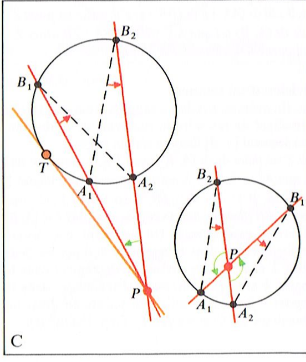
A

Cercles homothétiques



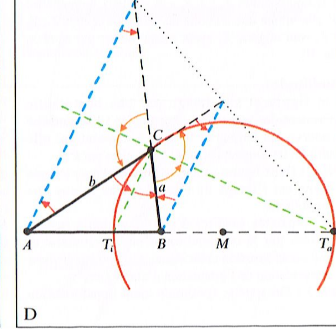
B

Droite d'EULER et cercle de FEUERBACH



C

Théorème de la puissance



D

Cercle d'APOLLONIUS

Triangles et cercles semblables

La similitude est une relation d'équivalence sur l'ensemble des figures de $\mathbb{R}^2$, qui généralise la coïncidence.

Par ailleurs, deux triangles *homothétiques* sont dans la configuration du th. de DESARGUES dans sa version affine (p. 138, fig. A_1), et réciproquement :

Th. 4 : *Si deux triangles non coïncidants ont leurs côtés deux à deux parallèles, alors ils sont homothétiques.*

De façon générale, étant donné deux triangles semblables, le rapport des longueurs de deux côtés de l'un est égale au rapport des longueurs des deux côtés respectivement homologues de l'autre. Deux angles homologues sont égaux. Inversement, comme dans le cas de la coïncidence (p. 153), on peut énoncer des conditions suffisantes de similitude :

Th. : *Pour que deux triangles soient semblables, il suffit que l'une des situations suivantes soit réalisée :*

Th. 5 : *Les côtés homologues sont dans le même rapport de longueurs.*

Th. 6 : *Deux des côtés de l'un sont dans le même rapport de longueurs que deux des côtés de l'autre, ces deux paires de côtés définissant des angles égaux.*

Th. 7 : *Deux des angles de l'un sont égaux à deux des angles de l'autre.*

Th. 8 : *Deux des côtés de l'un sont dans le même rapport de longueurs que deux des côtés de l'autre, et l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés de l'un est égal à son équivalent dans l'autre.*

Pour démontrer ces résultats, on construit une homothétie telle que l'image du premier triangle ait l'un de ses côtés de même longueur que son équivalent dans le second triangle.

Contrairement aux triangles, tous les cercles appartiennent à la même classe de figures semblables :

Th. 9 : *Deux cercles sont toujours homothétiques.*

Si les deux cercles ont des rayons différents, il existe deux homothéties transformant l'un en l'autre, dont les rapports sont resp. positif et négatif. Les centres des homothéties peuvent être obtenus, quand cela est possible, comme points d'intersection des tangentes extérieures, resp. intérieures, aux deux cercles (fig. A). Sinon, pour deux cercles non concentriques, tout centre d'homothétie est aligné avec leurs centres et avec des extrémités de deux rayons homologues (parallèles de même sens ou de sens opposé).

Droite d'EULER et cercle de FEUERBACH

Étant donné un triangle ABC, le triangle obtenu en joignant les milieux M_1, M_2, M_3 de ses trois côtés lui est homothétique dans le rapport $-\frac{1}{2}$. Le centre de l'homothétie est le point S, intersection des médianes de ABC (fig. B), d'où l'on déduit :

Th. 10 : *Les médianes d'un triangle sont partagées dans le rapport 2 : 1 par leur point commun.*

Les hauteurs de ΔABC ont pour images les hauteurs de $\Delta M_1M_2M_3$ qui sont les médiatrices de ΔABC. L'orthocentre H, intersection des hauteurs de ΔABC a donc pour image M, intersection des médiatrices. On démontre ainsi le th. d'EULER :

Th. 11 : *Dans tout triangle, les points H, S et M, resp. points d'intersection des hauteurs, des médianes, et des médiatrices, sont alignés ; de plus $\overline{HS} : \overline{SM} = 2 : 1$.*

La droite passant par H, S et M s'appelle la droite d'EULER (fig. B).

On construit maintenant l'image $\Delta H_1H_2H_3$ de ΔABC par l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$. H_1, H_2, H_3 sont les milieux des segments joignant H à A, B, C, et images de M_1, M_2, M_3 par la symétrie centrale de centre F, milieu de $[H, M]$. F est le centre d'un cercle circonscrit à la fois à $\Delta H_1H_2H_3$ et $\Delta M_1M_2M_3$. Les pieds des hauteurs de ΔABC sont également sur ce cercle, d'après le th. de THALES. Ce cercle est appelé *cercle de FEUERBACH* ou *cercle des neuf points* (fig. B).

Théorème de la puissance

Soit un point P et deux droites issues de P coupant un cercle donné (ne contenant pas P) aux points A_1, B_1, resp. A_2, B_2 (fig. C). Alors les triangles ΔPA_2B_1 et ΔPA_1B_2 sont semblables (d'après le th. 7 p. 153 et le th. 7 p. 159). D'où : $\overline{PA_1} \cdot \overline{PB_1} = \overline{PA_2} \cdot \overline{PB_2}$.

Th. 12 : *Étant donné un point P et un cercle fixés, pour toute droite passant par P et sécante au cercle, le produit des mesures orientées des longueurs des deux segments joignant P aux intersections de la droite et du cercle est constant. Si P est extérieur au cercle, ce produit est égal au carré de la longueur des segments tangents au cercle et issus de P.*

En utilisant $p := < \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} >$ (p. 193), on peut retrouver le signe de ce produit : $p > 0$ si P est extérieur au cercle ; $p < 0$ si P est intérieur au cercle ; $p = 0$ si P est sur le cercle. p est appelé *puissance* du point P par rapport au cercle, et le th. 12 s'appelle le *th. de la puissance*. L'ensemble des points ayant même puissance par rapport à deux cercles non concentriques est une droite perpendiculaire à la droite joignant les centres des deux cercles, appelée *axe radical* des deux cercles.

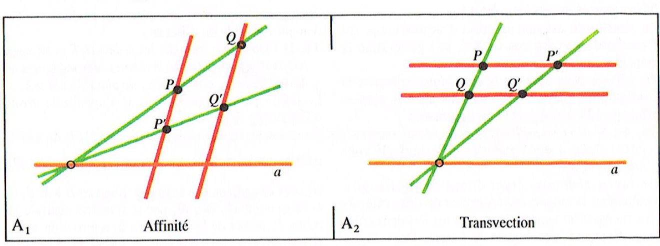
Les trois axes radicaux de trois cercles de centres non alignés, pris par paire, sont concourants en un point appelé *centre radical* des trois cercles.

Cercle d'APPOLONIUS

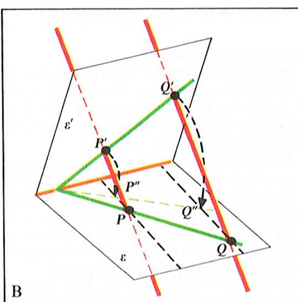
Th. 13 : *Les deux bissectrices, extérieure et intérieure, associées à un angle d'un triangle, coupent le côté opposé à cet angle en deux points qui sont en division harmonique relativement aux sommets du côté* (fig. D).

En remarquant que ces deux bissectrices sont perpendiculaires, on peut ajouter :

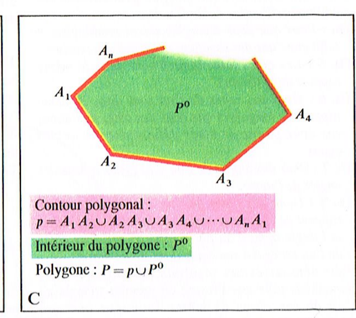
Th. 14 : *Étant donné deux points A et B, l'ensemble des points dont le rapport des distances à A et B a une valeur constante λ est le cercle (dit d'APPOLONIUS), de diamètre T_iT_e où T_i et T_e sont en division harmonique relativement à A et B, dans le rapport λ* (fig. D).



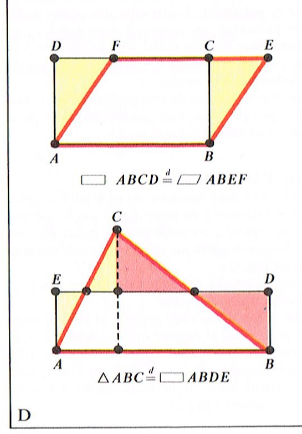
Applications affines particulières



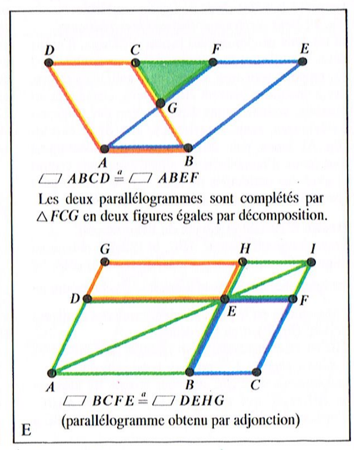
Projection parallèle dans l'espace



Polygone



Égalité par décomposition



Égalité par adjonction

Affinités, transvections

On a décrit avec les similitudes l'ensemble des collinéations orthogonales. Pour obtenir d'autres collinéations (*cf.* p. 133, déf. 1 et rem. 1), on s'inspire de la construction des réflexions axiales, en affaiblissant leurs propriétés.

Déf. 1 : On appelle *affinité* une collinéation qui conserve point par point une droite a, et telle que les droites joignant deux points homologues distincts P et P' soient parallèles à une même sécante à a ; on écarte les projections, qui ne sont pas bijectives.
a est l'*axe de l'affinité*, les droites (P, P') s'appellent *droites d'affinité* et déterminent la *direction de l'affinité* (fig. A_1).

Déf. 2 : On appelle *transvection* une collinéation qui conserve point par point une droite a et telle que les droites (P, P') soient parallèles à a (fig. A_2) : a est l'*axe de la transvection.*

On s'intéresse, dans ce qui suit, à des figures pouvant se déduire l'une de l'autre par une affinité.

Les invariants sont l'axe de l'affinité, invariant point par point, et les droites d'affinité, invariantes dans leur ensemble. Le parallélisme est conservé, de même que les rapports de longueurs sur une droite.

Si $P \notin a$, la droite a partage le segment $[P, P']$ dans un rapport constant $k = \dfrac{\overline{IP'}}{\overline{IP}}$ $\{I\} = a \cap (P, P')$; k est appelé *rapport d'affinité*. Si $k = -1$ on parle de *symétrie affine*. Lorsque la direction d'affinité est orthogonale à a, l'affinité est dite *orthogonale*, dans le cas contraire *oblique*. Une symétrie affine orthogonale est une réflexion.

On construit, dans l'espace euclidien, les affinités planes de la façon suivante : considérant deux plans sécants selon une droite a, on commence par projeter les points du premier sur le second à l'aide d'une projection parallèle (fig. B), puis on superpose les deux plans par rotation autour de a. On obtient ainsi une affinité d'axe a.

Aire d'un polygone

D'autres propriétés importantes des affinités concernent l'aire des figures géométriques planes.

Pour cela on considère d'abord des *contours polygonaux simples*, c'est-à-dire des lignes brisées fermées ne se recoupant pas.

Un contour polygonal simple délimite deux régions du plan : celle qui est bornée est appelée *intérieur du polygone*. Le *polygone* P est constitué de l'intérieur P^0 et du contour p (fig. C).

On peut maintenant définir l'aire d'un polygone :

Déf. 3 : Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les polygones du plan. On désigne par *fonction d'aire* une appplication I de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(I1) P_1 et P_2 isométriques $\Rightarrow I(P_1) = I(P_2)$

(I2) $P = P_1 \cup P_2$ et $P_1^0 \cap P_2^0 = \emptyset \Rightarrow$
$I(P) = I(P_1) + I(P_2)$

(I3) $I(E) = 1$ pour tout carré de côté 1.

Rem. 1 : On définit de même le volume des polyèdres en prenant pour E dans (I3) le cube unité.

Rem. 2 : Cette notion de mesure additive du contenu se généralise très bien à des collections M d'ensembles telles que, si A et B sont dans M, leur union et leur différence sont aussi dans M (*cf.* p. 357).

De cette définition se déduisent les formules donnant l'aire d'un parallélogramme (produit d'un côté par la hauteur correspondante) et d'un triangle (moitié du produit précédent).

Deux notions jouent un rôle important à ce niveau :

Déf. 4 : Deux polygones sont dits égaux par décomposition (notation $\overset{d}{=}$) s'il est possible de décomposer chacun d'eux en une réunion finie de parcelles polygonales d'intérieurs deux à deux disjoints, les deux décompositions étant les mêmes, à une isométrie près des parcelles (fig. D).

Déf. 5 : Deux polygones sont dits égaux par adjonction (noté $\overset{a}{=}$) si on peut les compléter par les mêmes triangles, à une isométrie près, les intérieurs étant disjoints, de façon à obtenir deux polygones égaux par décomposition (fig. E).

Des polygones égaux par décomposition ont même aire par application des propriétés de I.

Un théorème de Bolyai établit que des polygones égaux par adjonction sont aussi égaux par décomposition (on a donc équivalence).

L'aire d'un polygone P peut s'écrire comme la somme des aires de triangles inscrits dans P. On montre que le résultat est indépendant de la manière dont on a divisé P en triangles (*triangulation*).

Prop. 1 : *Le rapport des aires de deux triangles déduits l'un de l'autre par affinité est égal à la valeur absolue du rapport de l'affinité.*

La démonstration se fait d'abord pour des triangles qui ont un côté parallèle à l'axe d'affinité, puis pour des triangles quelconques. Elle s'étend aux polygones et à des figures limites de polygones.

La prop. 1 implique que le rapport des aires de deux figures reste constant lorsqu'on les transforme par une affinité.

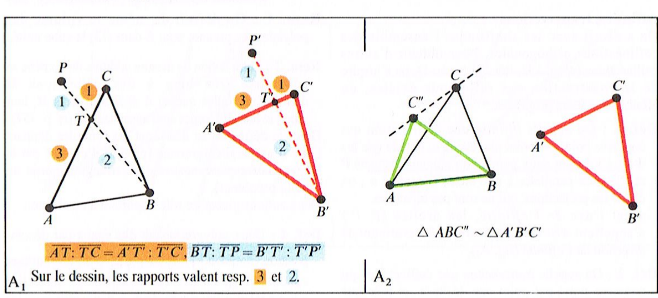
Rem. 3 : Toute transvection d'axe a est décomposable en le produit de deux affinités d'axe a.
Les droites globalement invariantes d'une transvection sont les parallèles à son axe. Une transvection conserve également le parallélisme et les rapports de longueur sur une même droite. Elle transforme tout polygone en un polygone de même aire.

Groupe des affinités et transvections

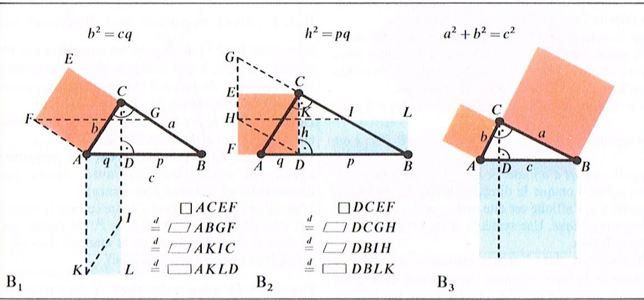
L'ensemble des transvections de même axe constitue un groupe commutatif pour la loi de composition.

L'ensemble des affinités et des transvections de même axe forme un groupe, qui, lui, n'est pas commutatif.

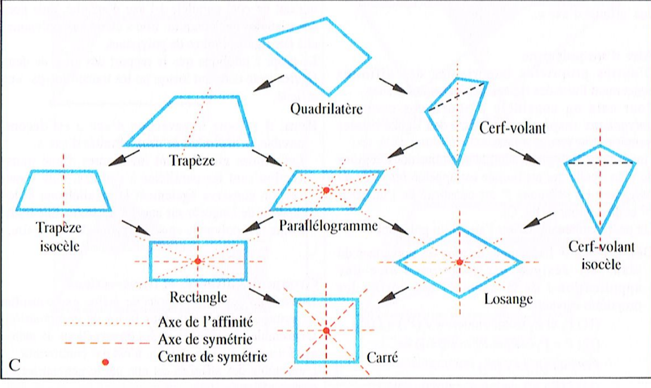
L'ensemble des affinités est une partie génératrice du groupe affine (p.163).



Applications affines



Propriétés des triangles rectangles



Classification des quadrilatères

Applications affines

Déf. 6 : La composée d'une affinité et d'une similitude est une bijection *affine* ou *transformation affine*.

Une bijection affine conserve les rapports de partage d'un segment, les rapports d'aires ainsi que le parallélisme.

On peut montrer qu'une bijection affine se décompose en le produit d'au plus trois affinités.

Les bijections affines représentent les collinéations les plus générales du plan euclidien :

Prop. 2 : *Toute collinéation du plan $\mathbb{R}^2$ est une bijection affine. Elle est parfaitement déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images (nécessairement non alignées).*

Démonstration : Du fait de la bijectivité, on a conservation du parallélisme et donc de la propriété de milieu (il suffit de considérer celui-ci comme intersection des deux diagonales d'un parallélogramme). Il s'ensuit que tout rapport de partage d'un segment est conservé.

À partir de là, il suffit de se donner les images de trois points non alignés pour pouvoir construire l'image de tout point du plan (en le repérant par ses coordonnées barycentriques – fig. A₁). Enfin, si on se donne un triangle ΔABC et son image $\Delta A'B'C'$, on construit C'' tel que $\Delta ABC''$ soit semblable, directement ou indirectement, à $\Delta A'B'C'$ de façon que l'une au moins des deux droites possibles CC'' soit sécante à la droite (AB) ; alors on passe de ΔABC à $\Delta ABC''$ par une affinité et de $\Delta ABC''$ à $\Delta A'B'C'$ par une similitude (fig. A₂) : on en déduit aisément que l'application que l'on vient de définir est une bijection affine au sens de la déf. 6.

De la prop. 2 il suit que deux triangles quelconques sont toujours images l'un de l'autre par une bijection affine.

L'ensemble des bijections affines constitue le *groupe affine*. On classe ses éléments suivant la nature et le nombre de ses points et droites fixes. Une bijection affine distincte d'une affinité et d'une transvection a au plus un point fixe. Par ce point, il peut passer zéro, une, deux ou une infinité de droites invariantes. Dans ce dernier cas il s'agit d'une homothétie.

Une bijection affine ayant au moins deux droites sécantes globalement invariantes s'appelle une *affinité d'*Euler. C'est la composée de deux affinités, l'axe de l'une donnant la direction de l'autre et vice-versa.

Propriétés des triangles rectangles

La restriction d'une transvection à une parallèle à son axe est une translation. On en déduit que l'aire d'une figure reste inchangée par transvection.

Prop. 3 (Théorème d'Euclide) : *Dans tout triangle rectangle, le carré s'appuyant sur un des côtés de l'angle droit a même aire que le rectangle obtenu à partir de la projection de ce côté sur l'hypoténuse et de l'hypoténuse elle-même :* $a^2 = cp$; $b^2 = cq$.

Pour démontrer ce résultat, on applique successivement une transvection, une rotation de 90° et une seconde transvection (fig. B₁). On peut aussi montrer que ces deux figures sont égales par décomposition.

Prop. 4 : *Dans tout triangle rectangle, le carré s'appuyant sur la hauteur issue de l'angle droit a même aire que le rectangle construit à partir des deux projections des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse :* $h^2 = pq$.

La fig. B₂ donne une construction qui prouve cette égalité.

Les prop. 3 et 4 permettent la résolution géométrique de deux problèmes : trouver un carré de même aire qu'un rectangle donné, construire la racine carrée d'un nombre.

Rem. : Ces formules se démontrent aussi (sous forme de rapports) à l'aide des similitudes, chaque triangle rectangle étant semblable aux deux triangles obtenus en abaissant la hauteur de l'angle droit sur l'hypoténuse.

Appliquer la prop. 3 aux deux côtés de l'angle droit conduit à :

Prop. 5 (Théorème de Pythagore): *Dans tout triangle rectangle, la somme des aires des deux carrés s'appuyant sur les côtés de l'angle droit est égale à l'aire du carré s'appuyant sur l'hypoténuse :* $a^2 + b^2 = c^2$ (fig. B₃).

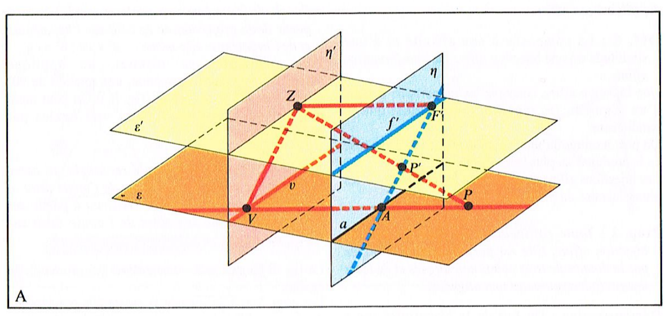
Ce théorème admet une réciproque : si pour un triangle on a l'égalité précédente, alors le triangle est rectangle et son hypoténuse a pour longueur c.

Classification des triangles et des quadrilatères

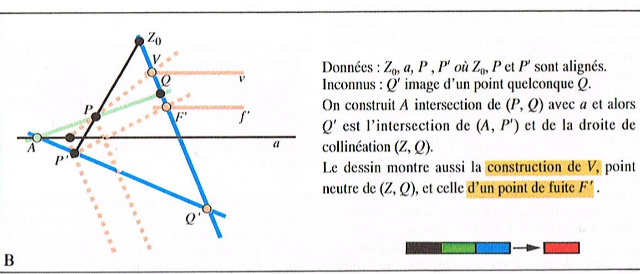
Toute application affine involutive du plan est soit une symétrie axiale (cas particulier : réflexion), soit une symétrie centrale. Les figures géométriques sont classées selon leurs invariances par symétrie.

Tout triangle est globalement conservé dans une symétrie par rapport à une médiane, de direction celle du côté correspondant. Suivant le nombre d'axes de symétrie orthogonale on a : les triangles asymétriques (0), les triangles isocèles (1) et les triangles équilatéraux (3).

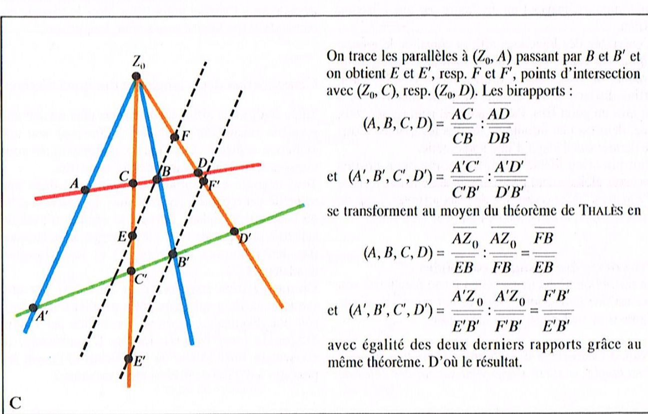
Un quadrilatère transformé en lui-même par une symétrie axiale a soit deux côtés parallèles (*trapèze*), soit une diagonale coupée en son milieu par l'autre diagonale (*cerf-volant*). La fig. C représente le classement ainsi obtenu où les flèches indiquent les passages à des cas de plus en plus particuliers.



Projection centrale dans l'espace



Collinéation perspective



Invariance du birapport

Projections centrales dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Les bijections affines représentent les collinéations les plus générales du plan. On a indiqué précédemment un procédé pour obtenir les affinités à partir des projections parallèles dans $\mathbb{R}^3$. Ce procédé peut être étendu dans un premier temps en considérant des projections centrales, c'est-à-dire des droites de projection passant toutes par un même point Z pris en dehors des deux plans ε et η. Si ε et η sont parallèles, on aboutit à une homothétie dans l'espace. Si au contraire ils ont une droite en commun a, alors la projection centrale n'est plus une application bijective de ε sur η. En effet, soit ε', resp. η', le plan parallèle à ε resp. η, passant par Z, et soit v intersection de ε et η', f' intersection de ε' et η : on constate (fig. A) que v n'a pas d'image dans η et que f' n'a pas d'antécédent dans ε. On appelle v *ligne neutre* et f' *ligne de fuite*.

Projections centrales dans l'espace $P^3(\mathbb{R})$

Ces exceptions peuvent être écartées en faisant de ε et η des plans projectifs soit comme on l'a vu p. 139, soit en complétant chaque droite d d'un plan par son point à l'infini, commun d'ailleurs à toutes les parallèles à d, l'ensemble des points à l'infini constituant la droite à l'infini du plan. La droite v est ainsi envoyée point par point sur la droite à l'infini de η, alors qu'on peut associer chaque point de f' à un point sur la droite à l'infini de ε.
Si l'on complète ainsi tous les plans de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, en associant à plusieurs plans parallèles la même droite à l'infini, et en rassemblant tous ces éléments à l'infini dans le plan à l'infini, on définit alors l'espace projectif $P^3(\mathbb{R})$. Dans cet espace, une projection centrale entre deux plans ne contenant pas le centre de projection constitue une bijection, que ces deux plans soient parallèles ou non ou que l'un des plans soit le plan à l'infini.

Collinéations perspectives

On obtient une bijection du plan projectif $P^2(\mathbb{R})$ (construit par extension du plan euclidien) en appliquant d'abord la projection de centre Z puis en rabattant η sur ε en le faisant tourner autour de a. Si ε et η sont parallèles, a est rejetée à l'infini, et on substitue au rabattement autour de a amenant η sur ε, la projection orthogonale de η sur ε. La bijection obtenue est une homothétie plane, qui conserve la droite de l'infini point par point.
D'une manière générale, dans la transformation obtenue de $P^2(\mathbb{R})$, les droites reliant un point et son image passent toutes par un point fixe Z_0, tandis que la droite a est invariante point par point. On a là une *collinéation perspective* au sens de la déf. 4 p. 141 (fig. B), encore nommée *perspective projective.*
De plus :

Déf. 1 : Pour une collinéation perspective, on appelle le point fixe Z_0 *centre de la collinéation*, la droite invariante *a axe de la collinéation*, les droites passant par Z_0 *droites de collinéation.*

La ligne neutre (droite dont l'image est à l'infini) et la ligne de fuite (droite image de celle de l'infini) sont parallèles à l'axe de la collinéation. On distinguera, selon la déf. 5 p. 141, les homologies $Z_0 \notin a$ et les

élations $Z_0 \in a$, ces dernières ne pouvant toutefois, contrairement aux homologies, provenir de constructions spatiales.

Déf. 2 : Deux figures sont dites *perspectivement congrues* quand elles peuvent être déduites l'une de l'autre par une collinéation perspective.

Les affinités, les transvections, les homothéties et les translations sont des cas particuliers de collinéations perspectives lorsque Z_0 ou a ou les deux sont pris à l'infini et lorsqu'on se limite à la restriction au plan affine réel de la collinéation.
Comme deux parallèles se coupent à l'infini, leurs images se coupent sur la ligne de fuite. À la différence des bijections affines, les collinéations perspectives ne conservent donc pas le parallélisme. Un parallélogramme n'est donc en général pas transformé en un parallélogramme, et par suite le milieu d'un segment et plus généralement les rapports de partage d'un segment ne sont pas conservés.
En revanche, le quotient de deux de ces rapports sera conservé, d'où l'introduction du *birapport* de quatre points :

Déf. 3 : Le *birapport* (A, B, C, D) de quatre points alignés, distincts, est défini de la façon suivante :
- si A, B, C, D sont des points du plan affine réel alors le birapport est le quotient de deux rapports de partage :

$$(A, B, C, D) := \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

- si C ou D est à l'infini alors le rapport de partage correspondant est pris égal à – 1
- si A ou B est à l'infini alors on pose : $(A, B, C, D) = (C, D, A, B)$

Cette égalité est alors vraie dans tous les cas.

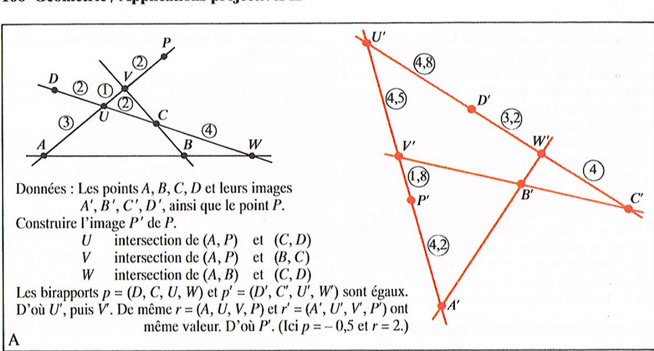
Prop. 1 : *Le birapport de quatre points reste conservé dans une collinéation perspective* (fig. C).

Prop. 2 : *Toute collinéation perspective différente de l'identité a pour seuls points fixes Z_0 et les points de l'axe de collinéation et pour seules droites invariantes l'axe et les droites de collinéation.*

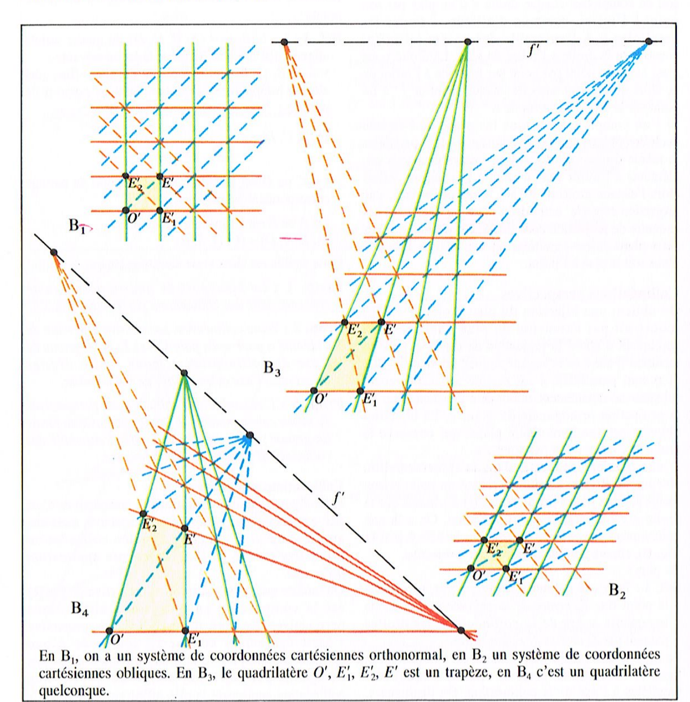
Prop. 3 : *L'ensemble des collinéations perspectives de même centre muni de la loi de composition forme un groupe ; il en est de même pour l'ensemble des collinéations perspectives de même axe.*

Collinéations projectives

La composée de deux collinéations perspectives n'est pas, en général, une collinéation perspective, mais une application plus générale appelée *collinéation projective* (déf. 6 p. 141), ou encore *application projective.*
On montre que toute collinéation projective de $P^2(\mathbb{R})$ est la composée d'au plus cinq collinéations perspectives. De plus, toute collinéation projective s'écrit également comme la composée d'une collinéation perspective et d'une bijection affine, en désignant par bijection affine de $P^2(\mathbb{R})$ une collinéation appliquant la plan affine sur lui-même, la droite de l'infini restant globalement invariante.



Détermination d'une collinéation projective



En B_1, on a un système de coordonnées cartésiennes orthonormal, en B_2 un système de coordonnées cartésiennes obliques. En B_3, le quadrilatère O', E'_1, E'_2, E' est un trapèze, en B_4 c'est un quadrilatère quelconque.

Maillage de MOEBIUS

Détermination des collinéations

Prop. 4 : *L'ensemble des collinéations projectives muni de la loi de composition définit un groupe, le groupe projectif.*

Pour $P^2(\mathbb{R})$, les collinéations projectives donnent toutes les collinéations possibles :

Prop. 5 : *Dans* $P^2(\mathbb{R})$, *toute collinéation est projective.*

Cette propriété n'est pas valable pour des espaces projectifs plus grands (comme $P^2(\mathbb{C})$) par exemple).
Suite à la prop. 2, on a :

Prop. 6 : *Toute collinéation projective est parfaitement définie par la donnée de quatre points non colinéaires trois à trois et de leurs images (vérifiant les mêmes conditions).*

La fig. A montre comment construire l'image P' d'un point quelconque P en s'appuyant sur la conservation des birapports.
Les collinéations projectives possèdent au moins un point fixe et au moins une droite invariante. Si cette droite est invariante point par point alors il s'agit d'une collinéation perspective.
Ces propriétés sur les éléments fixes ne contredisent pas celles des bijections affines : une bijection affine de $\mathbb{R}^2$ admet la droite de l'infini comme droite invariante, et si elle n'a pas de point fixe à distance finie, elle admet une direction de droite fixe, donc un point à l'infini fixe.
La notion de figures projectivement congrues généralise celle de figures affinement semblables.

Déf. 4 : Deux figures sont dites *projectivement congrues* si elles peuvent être envoyées l'une sur l'autre au moyen d'une collinéation projective.

Alors que tous les triangles sont congrus par bijection affine, tous les quadrilatères sont, d'après la prop. 6, projectivement congrus.

Rem. : Une application pratique importante de la prop. 6 est le repérage d'une photographie aérienne en photogrammétrie. Toute photographie d'un paysage plat représente en effet une projection centrale. L'emplacement d'un point quelconque du paysage peut ainsi être repéré en respectant les birapports à partir du moment où l'on a fixé quatre points non alignés. En pratique on recouvre la photographie et la carte par ce qu'on appelle un *maillage de MOEBIUS*, suffisamment fin.

Maillages de MOEBIUS

Déf. 5 : L'image projective d'un quadrillage affine régulier est appelé *maillage de MOEBIUS*.

Le quadrillage affine régulier est lui-même un maillage de MOEBIUS.
Un tel maillage peut être construit dès que l'on s'est donné les images O', E'_1, E'_2, E'_3 des points (0, 0), (1,0), (0,1), (1,1) (exemples fig. B). Pour cela on construit les points d'intersection des côtés opposés du quadrilatère O', E'_1, E'_2, E'_3, qui vont donner les deux points de fuite par lesquels passeront les faisceaux de droites images des deux familles de parallèles du quadrillage initial. On détermine aussi les deux points de la ligne de fuite correspondants aux diagonales du quadrillage, ce qui permet ensuite de construire le maillage de proche en proche et éventuellement de l'affiner. Ainsi, tout point peut être reporté du quadrillage sur le maillage avec la précision voulue.

Couples de points et de droites harmoniques

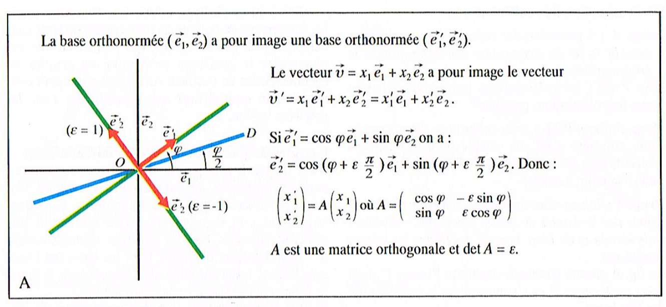
On a introduit à la p. 141 des collinéations perspectives involutives, les homologies harmoniques. On les appelle aussi symétries projectives, car elles englobent à la fois les symétries affines et les symétries centrales. Pour les symétries affines le centre de collinéation est à l'infini, pour les secondes l'axe est à l'infini. Dans une homologie harmonique, la ligne de fuite et la ligne neutre sont confondues.
Si P et P' sont images l'un de l'autre, et si (P, P') coupe l'axe a en A, alors les couples de points (P, P') et (Z, A) sont dits harmoniques d'après la déf. de la p. 141. Du fait de l'invariance du birapport on a :

$$(Z, A, P, P') = (Z, A, P', P)$$

Mais d'autre part, à cause de la déf. 3, le second birapport est inverse du premier. Ceci n'est possible que si leur valeur est -1 car $+1$ entraînerait $P = P'$ ce qui n'est toujours vrai que pour l'identité.
Pour des couples de points harmoniques, le premier couple découpe donc le segment déterminé par le deuxième couple de telle façon que les deux rapports de partage soient opposés (c'est ce qu'on appelle une *division harmonique*).
Inversement, si pour quatre points alignés Z, A, P, P' on a $(Z, A, P, P') = -1$, alors toute homologie de centre Z et d'axe passant par A, qui envoie P sur P', est harmonique.
À cause de l'invariance du birapport, deux couples de points alignés en division harmonique sont envoyés par une collinéation projective sur deux couples de points alignés en division harmonique. On a le même résultat pour deux couples de droites concourantes en division harmonique (g_1,g_2) et (g_3,g_4), c'est-à-dire quatre droites passant par un même point S et telles qu'une droite ne passant pas par S les coupe selon deux couples de points en division harmonique.

Sections d'un cône de révolution

Les coordonnées projectives d'une droite vérifient une équation linéaire. Dans $P^2(\mathbb{R})$ on s'intéresse aussi aux ensembles de points, dont les coordonnées projectives annulent une forme quadratique (voir p. 143), ainsi qu'à leurs images projectives. Le cercle en particulier appartient à cette famille. Ses images par projection centrale peuvent être obtenues comme sections planes d'un cône de révolution. Il s'agit d'ellipses, de paraboles ou d'hyperboles, selon que la courbe contient zéro, un ou deux points à l'infini. Si l'on ne fait plus de distinction dans $P^2(\mathbb{R})$ entre les points réels et imaginaires, alors on obtient un type de courbe qui est conservé par les collinéations projectives.



Rotation d'angle φ $(\varepsilon = 1)$, retournement d'axe D $(\varepsilon = -1)$.

Écriture matricielle d'une collinéation affine

La notion de coordonnées d'un point dans un plan affine, relativement au repère associé à trois points non alignés O, E_1, E_2 (O = origine, E_1 et E_2 = points unitaires) apparaît p. 142 (fig. E). On a également, dans le cadre du plan $\mathbb{R}^2$ (p. 151), introduit la notion de bipoints équipollents, permettant de retrouver la structure vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Dans ces conditions $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, où O est un point et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base de l'e.v. $\mathbb{R}^2$, est un repère R du plan $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$. Tout point P de $\mathbb{R}^2$ est défini biuniv. par ses coord. (x_1, x_2) : $\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. Un changement de coord. se fait en définissant un autre repère $R' = (O', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2)$ explicité par rapport à R. En posant $\overrightarrow{OP'} = x'_1\vec{e}\,'_1 + x'_2\vec{e}\,'_2$ une simple identification montre que :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$, où (α, β), resp. (γ, δ)

sont les comp. de $\vec{e}\,'_1$, resp. $\vec{e}\,'_2$, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et (μ_1, μ_2) les coord. de O' dans R. On a

$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \Leftrightarrow (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2)$ est une base (pp. 89, 91). Toute transformation de $\mathbb{R}^2$, $P \to P'$, définie dans R par $\vec{y} = M\vec{x} + \vec{t}$ ($\vec{x}$, $\vec{y}$ matrices colonnes des coord. de P, resp. P', dans R, M matrice fixée dans $GL_2(\mathbb{R})$), $\vec{t}$ fixé dans $\mathfrak{M}_{21}(\mathbb{R})$, est définie de façon analogue dans R'.

Soit alors une affinité f de rapport $k \in \mathbb{R}^*$, d'axe a, de direction donnée par g, droite sécante à a. En posant $\{O\} = a \cap g$ et en choisissant $E_1 \in a \setminus \{O\}$, $E_2 \in g \setminus \{O\}$, l'image P' (y_1, y_2) de P (x_1, x_2) par f est donnée par

$\vec{y} = A\,\vec{x}$ dans $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

f est donc une transformation du type précédent.

L'ensemble de toutes les transformations définies dans un repère R par $\vec{y} = M\vec{x} + \vec{t}$, $M \in GL_2(\mathbb{R})$, $\vec{t} \in \mathfrak{M}_{21}(\mathbb{R})$, est un groupe G pour la loi de composition. La structure euclidienne du plan $\mathbb{R}^2$ permet de préciser G, qui est indépendant du choix de R. Le choix d'un repère *orthonormé* $R_0 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, où $OE_1 = OE_2 = 1$, dr $(O, E_1) \perp$ dr (O, E_2) contribue à démontrer (*cf.* déf. 6 et prop. 2 p. 163) le théorème :

Th. : *Le groupe des collinéations affines de* $\mathbb{R}^2$ *est* G, *ensemble muni de la loi de composition des transformations de* $\mathbb{R}^2$ *définies dans un repère arbitrairement choisi par* $\vec{y} = M\vec{x} + \vec{t}$.

Rem. 1 : La transformation $\vec{y} = M\vec{x} + \vec{t}$ peut se ramener à $\vec{y} = M\vec{x}$ s'il existe un point fixe $\vec{x}_0$:
$\vec{x}_0 = M\vec{x}_0 + \vec{t}$ d'où $\vec{y} - \vec{x}_0 = M(\vec{x} - \vec{x}_0)$.

Donc x_0 est sol. de $(M - I)\,\vec{x} = -\,\vec{t}$. Soit $\det(M - \lambda I) = P(\lambda)$ le *polynôme caractéristique de* M, dont les racines sont appelées *valeurs propres* : si 1 n'est pas valeur propre il y a un point fixe unique. Si 1 est valeur propre il y a 0 ou une infinité de points fixes.

Repères orthonormés

D'après le th. de PYTHAGORE (p. 163) pour que des droites (OP) et (OP') soient orthogonales il faut et il suffit que $PP'^2 = OP^2 + OP'^2$. Dans un repère orthonormé (en abrégé r.o.n.) $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ et $\overrightarrow{OP'} = x'_1\vec{e}_1 + x'_2\vec{e}_2$ la condition s'écrit $(x_1^2 + x_2^2) + (x'^2_1 + x'^2_2) = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2$, c.-à-d. $x_1x'_1 + x_2x'_2 = 0$ (on retrouve le résultat p. 193). Par suite, si on veut que le repère $R' = (O, \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2)$ explicité dans le r.o.n. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ soit un r.o.n. il est nécessaire et suffisant que $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1$, $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ (*cf.* supra). Si l'on pose $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$, $\gamma = \cos\varphi$, $\delta = \sin\varphi$ on a $\varphi - \theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

Le changement de r.o.n. le plus général s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R},$$

$\varepsilon = \pm 1$. Si on oriente le plan (p. 147) R et R' ont même sens si, et seulement si, $\varepsilon = +1$. Les matrices

$C(\theta, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}$ sont dites orthogonales

Ce sont les solutions de l'équation : ${}^tMM = \mathrm{Id}$. Leur ensemble est, pour la multiplication, le groupe orthogonal O_2. On a $\det C(\theta, \varepsilon) = \varepsilon$. Le sous-ens. des matrices orthogonales de déterminant $+1$ est le sous-groupe SO_2 (*groupe spécial orthogonal*). SO_2 est isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Isométries

La première isométrie introduite est le retournement, i.e. une affinité de rapport -1, avec $g \perp a$ (*cf.* supra). Dans un r.o.n. associé on a donc la relation $\vec{y} = C(0, -1)\,\vec{x}$. Dans un r.o.n. de base orthonormée quelconque, mais d'origine $\in a$, on a donc par changement de coord. : $\vec{y}\,' = C(\varphi, -1)\,\vec{x}\,'$ (ill. A). Le produit de deux retournements d'axes de même direction est une translation de direction perpendiculaire (p.150). On a facilement, dans un repère quelconque : $\vec{y} = \vec{x} + \vec{t}$. L'ensemble des translations a une structure de groupe commutatif additif isomorphe à $(\mathbb{R}^2, +)$. Le produit de deux retournements d'axes concourants en un point O est une rotation de centre O (p.150). Dans un r.o.n. quelconque d'origine O, cette rotation s'écrit $\vec{y} = C(\varphi, 1)\,\vec{x}$ (ill. A). L'ensemble des rotations de centre O est, pour la loi de composition, un groupe isomorphe à SO_2.

Le produit (composition) d'un retournement par une translation parallèle à son axe est un glissement-retournement (p. 150). Il peut s'écrire simplement $\vec{y} = C(0, -1)\,\vec{x} + t\,\vec{e}_1$, dans le r.o.n. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $t \in \mathbb{R}^*$.

Toute isométrie est un des ex. cités. L'ensemble des isométries $\mathfrak{I}$ est un groupe pour la loi de composition. Ce groupe est décrit par la transformation $\vec{y} = C(\theta, \varepsilon)\,\vec{x} + \vec{t}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$, $\vec{t} \in \mathfrak{M}_{21}(\mathbb{R})$, dans un r.o.n. fixé. Pour $\varepsilon = 1$ on a le sous-groupe $\mathfrak{D}$ des *déplacements*. $\mathfrak{I} \setminus \mathfrak{D}$ est l'ens. des *antidéplacements* $(\varepsilon = -1)$.

Similitudes

Elles s'écrivent dans un r.o.n. :
$\vec{y} = kC(\theta, \varepsilon)\,\vec{x} + \vec{t}$, $k \in \mathbb{R}^*_+$. Pour $k = 1$ on retrouve les isométries. Pour $k \neq 1$ il y a un point fixe, car 1 n'est pas valeur propre de la matrice $kC(\theta, \varepsilon)$. On se ramène donc à $\vec{y} = kC(\theta, \varepsilon)\,\vec{x}$. Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, on a une homothétie : $\vec{y} = k\,Id\,\vec{x}$. Sinon on a une similitude directe pour $\varepsilon = +1$ (produit commutatif d'une rotation et d'une homothétie de même centre), et une similitude indirecte pour $\varepsilon = -1$ dans un r.o.n. (produit commutatif d'un retournement d'axe a et d'une homothétie centrée sur a) (*cf.* p. 156). L'ensemble des similitudes est un groupe pour la loi de composition (groupe des collinéations orthogonales). Une similitude multiplie les aires par k^2.

Autres bijections affines

On a $\vec{y} = M\vec{x} + \vec{t}$ dans un r.o.n. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où M n'est pas de la forme $kC(\theta, \varepsilon)$. S'il y a un point fixe, on se ramène à $\vec{y} = M\vec{x}$ dans un r.o.n. $(O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On peut démontrer qu'il existe un r.o.n. de même origine où :
$\vec{y}\,' = C(\theta, \varepsilon)\,D\,\vec{x}\,'$,

$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq \beta$, En posant $\beta = k\alpha$, on a

$\vec{y}\,' = \alpha\,C(\theta, \varepsilon)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\vec{x}\,'$, composition d'une affinité orthogonale par une similitude. S'il n'y a pas de point fixe, c'est que 1 est valeur propre de M. Il y a donc une deuxième valeur propre réelle μ. Si $\mu \neq 1$, il existe deux vecteurs unitaires indépendants $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ tels que $M\vec{w}_1 = \vec{w}_1$, $M\vec{w}_2 = \mu\,\vec{w}_2$. On peut trouver un repère $(O', \vec{w}_1, \vec{w}_2)$ non orthonormé en général, où

$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}$. On a le produit commutatif

d'une affinité par une translation parallèle à l'axe à l'axe de l'affinité.

Si $\mu = 1$, il existe un r.o.n. où l'on peut écrire $(\alpha \neq 0)$

$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}\,' + \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix}$. En posant $\vec{z}\,' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}\,'$, il

vient $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{z}\,' + \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix}$. La transfomation

$\vec{x}\,' \to \vec{z}\,'$ est une symétrie oblique par rapport à l'axe a des abscisses (affinité de rapport -1), et la transformation $\vec{z}\,' \to \vec{y}\,'$ un retournement par rapport à une perpendiculaire à a.

Rem. 2 : D'une manière générale si $M \in \mathfrak{M}_n(K)$, K corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, et si M possède p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$ simples ou multiples (p. 96) on introduit les sous-ens. de vecteurs F_j, définis par $\vec{w} \in F_j \Leftrightarrow (M - \lambda_j I)\,\vec{w} = \vec{0}$. Ce sont des s.e.v. $\neq \{\vec{0}\}$. Chaque F_j est le s.e.v. propre associé à la valeur propre λ_j. Toute famille $(\vec{w}_1, \dots \vec{w}_p)$, telle que $\forall j$, $\vec{w}_j \in F_j \setminus \{0\}$, est libre.

Rem. 3 : La transformation $\vec{y} = M\vec{x} + \vec{t}$ multiplie les aires par $|\det M|$ (voir p. 201 déterminant et polynôme caractéristique d'une application linéaire).

Collinéations projectives dans $P^2(\mathbb{R})$

On a introduit les coordonnées homogènes d'un point, d'une droite dans un plan projectif (pp. 143, 145). $P^2(\mathbb{R})$ est le plan projectif réunion de $\mathbb{R}^2$ et de la droite de l'infini D_∞. Si ${}^t(x_0, x_1, x_2) \neq 0$ désigne un point de $P^2(\mathbb{R})$, il s'identifie au point de $\mathbb{R}^2$ défini, si

$x_0 \neq 0$, par $\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$. Si $x_0 = 0$ c'est le point à l'infini

dans la direction du vecteur $\vec{v}(x_1, x_2)$. L'éq. d'une droite de $P^2(\mathbb{R})$ est $(u_0, u_1, u_2)\,{}^t(x_0, x_1, x_2) = 0$. D_∞ a pour éq. $x_0 = 0$. Ses coord. sont $(1, 0, 0)$, à un facteur multiplicateur près non nul. Une droite $(u_0, u_1, u_2) \neq D_\infty$ est la réunion d'une droite de $\mathbb{R}^2$ et de son point à l'infini ${}^t(0, u_2, -u_1)$.

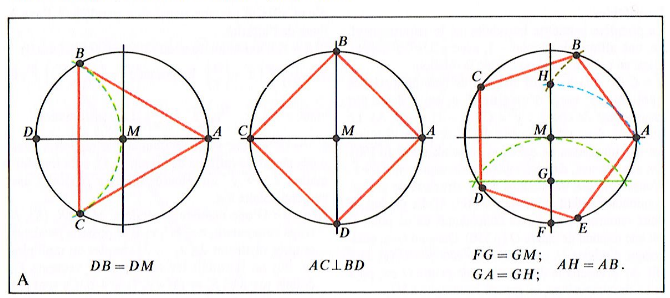
Si $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ est une collinéation affine

de $\mathbb{R}^2$, elle est la restriction à $\mathbb{R}^2$ de la collinéation

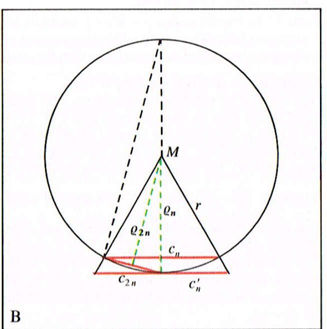
projective $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & \alpha & \beta \\ t_2 & \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, en abrégé $Y = LX$.

Toute collinéation projective est définie par une matrice inversible L de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ connue à un facteur multiplicateur près $\neq 0$: $Y = LX$. L'ens. des collinéations projectives a une structure de groupe isomorphe à celui des matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de det $+1$. Toute collinéation projective transforme bijectivement un point en point et une droite en droite.

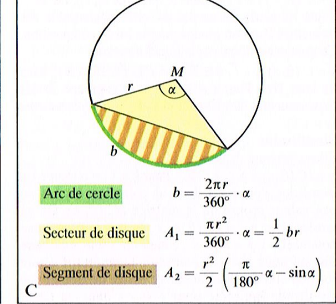
Un point fixe d'une collinéation projective satisfait à $LX = \lambda X$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $X \neq 0$: comme L est réelle de dim. 3×3, son polynôme caractéristique est réel de degré 3 et admet au moins une racine réelle non nulle (L régulière). Un vecteur propre associé définit donc un point fixe. Les points fixes que l'on peut construire à partir de L sont également ceux qu'on obtient à partir de μL, $\mu \neq 0$. De même il y aura au moins une droite fixe, obtenue en résolvant $\lambda\,U = UL$, où $U = (u_0, u_1, u_2) \neq 0$.



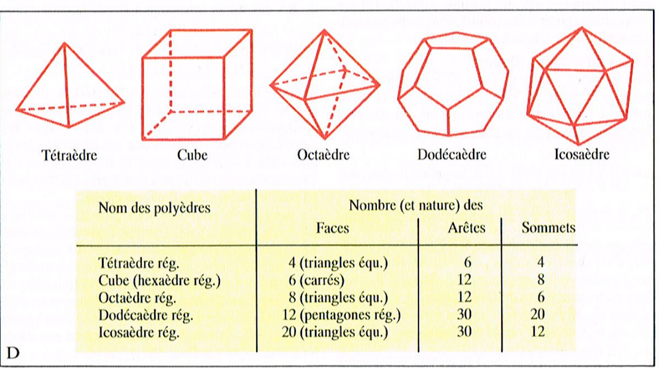
Construction du triangle équilatéral, du carré, du pentagone régulier



Polygones inscrit et circonscrit



Portions de cercle et de disque



Nom des polyèdres	Nombre (et nature) des		
	Faces	Arêtes	Sommets
Tétraèdre rég.	4 (triangles équ.)	6	4
Cube (hexaèdre rég.)	6 (carrés)	12	8
Octaèdre rég.	8 (triangles équ.)	12	6
Dodécaèdre rég.	12 (pentagones rég.)	30	20
Icosaèdre rég.	20 (triangles équ.)	30	12

Polyèdres réguliers

Polygones réguliers

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on peut associer à chaque segment un nombre réel, longueur de ce segment (p. 50). Cette relation ne s'étend pas sans considérations supplémentaires aux courbes. L'exemple du périmètre d'un cercle montre comment une définition de la longueur d'une portion de courbe est possible dans certains cas. Grâce à l'analyse on pourra généraliser la méthode.

Un *n-polygone régulier* ($n > 2$) est un polygone fermé (p. 161) avec n sommets qui délimitent des côtés égaux et des angles internes de même mesure. Tout polygone régulier possède un cercle circonscrit qui passe par chacun de ses sommets et un cercle inscrit qui est tangent à chacun de ses côtés. Les centres de ces deux cercles sont confondus. Soit un cercle donné par son centre M et son rayon r : il existe, pour tout $n > 2$, un (et un seul à une isométrie près) n-polygone régulier inscrit dans ce cercle. Dans certains cas, on peut le construire à la règle et au compas (voir p. 115 et ex. en fig. A). Un calcul, non trigonométrique, permet alors d'évaluer le côté c_n en fonction de r et de n. On en tire le périmètre $p_n = nc_n$ du polygone. Pour le rayon du cercle inscrit, on applique le théorème de PYTHAGORE :

$$\rho_n^2 = r^2 - \left(\frac{c_n}{2}\right)^2, \rho_n = r\sqrt{1-\left(\frac{c_n}{2r}\right)^2} \quad \text{(fig. B)}$$

Par l'homothétie de centre M et de rapport $k_n = \frac{r}{\rho_n}$, on obtient un autre n-polygone, circonscrit au cercle de départ, de côté c'_n et de périmètre p'_n :

$$c'_n = \frac{r}{\rho_n} c_n, p'_n = \frac{r}{\rho_n} p_n \quad \text{(fig. B).}$$

Soient A et B deux sommets consécutifs du n-polygone inscrit : la demi-bissectrice intérieure de l'angle $\sphericalangle AMB$ coupe le cercle en un point, qui forme avec A et B trois sommets consécutifs d'un $2n$-polygone inscrit. La longueur de ce côté c_{2n} est elle aussi calculable grâce à la formule d'EUCLIDE pour un triangle rectangle :

$$c_{2n}^2 = 2r(r-\rho_n), c_{2n} = r\sqrt{2\left(1-\frac{\rho_n}{r}\right)} \quad \text{(fig. B).}$$

Périmètre d'un cercle

On considère à présent un polygone régulier à n_0 côtés (par exemple $n_0 = 6$, pour lequel $c_6 = r$) et on forme une suite de polygones par doublements successifs du nombre des côtés. La suite d'intervalles $((p_n p'_n))$ avec $n = n_0 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ représente une suite d'intervalles emboîtés (p. 63). On s'apercevra aisément que $p_{2n} > p_n$ et $p'_{2n} < p'_n$, et que la suite $p'_n p_n$ converge vers zéro. Cette suite d'intervalles emboîtés détermine un nombre réel (p. 63). Celui-ci est indépendant du choix de n_0. En effet, si l'on commence une autre suite avec m_0 et une troisième avec $n_0 m_0$, la première suite et la troisième d'une part, la deuxième et la troisième d'autre part formeront deux suites d'intervalles emboîtés équivalentes au sens de la déf. de la p. 63.

Le nombre réel ainsi déterminé est plus grand que le périmètre de n'importe quel polygone inscrit dans le cercle et plus petit que le périmètre de n'importe quel polygone circonscrit au cercle. Il est appelé *périmètre du cercle*. Si $r = 1$, la moitié du périmètre est désignée par π. Pour un cercle quelconque, on a donc $p = 2\pi r$.

La méthode est très commode pour la déf. du périmètre d'un cercle et pour la démonstration de son existence; mais elle est très peu pratique. ARCHIMÈDE a fait le calcul jusqu'au polygone à 96 côtés et trouvé

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

L'analyse donne de bien meilleures méthodes. Par un développement en série on a calculé π à l'aide d'un puissant ordinateur au-delà de 100 000 décimales, $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$ LINDEMANN a démontré que π est un nombre transcendant. Il en résulte qu'avec la donnée du rayon r, la construction d'un segment de longueur le périmètre du cercle est impossible avec une règle et un compas (*rectification de la circonférence d'un cercle*, p. 115).

Aire d'un disque

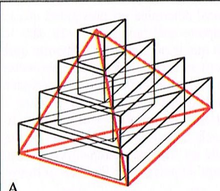
En formant cette fois-ci les suites des aires des polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle, A_n et A'_n on trouve $A_{2n} = \frac{r}{2} p_n$, $A'_n = \frac{r}{2} p'_n$. Les intervalles (A_n, A'_n) avec $n = n_0 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ forment une suite d'intervalles emboîtés, dont la longueur tend vers 0. Le nombre réel ainsi obtenu $A = \frac{r}{2} p = \pi r^2$ est appelé l'*aire du disque*. Les formules relatives à la longueur d'un arc de cercle et à l'aire de portions de disque les plus courantes sont données en fig. C.

Polyèdres réguliers

Une extension de ces concepts à l'espace $\mathbb{R}^3$ conduit, par analogie avec les polygones réguliers, aux *polyèdres réguliers*. Ils sont délimités par des polygones réguliers égaux. Les arêtes concourantes en un même sommet forment des figures directement isométriques. Comme un n-polygone régulier peut être divisé en $n - 2$ triangles, la mesure d'un angle intérieur au polygone régulier est

$\frac{n-2}{n} 180°$. En chaque sommet du polyèdre se rencontrent au moins trois faces. Puisque la somme d'angles de même sommet ne peut dépasser 360°, on ne peut avoir que 3, 4 ou 5 triangles, 3 carrés ou 3 pentagones réguliers. Il n'y a donc que cinq polyèdres réguliers possibles (fig. D).

Étendre la méthode de l'approximation du cercle par les polygones réguliers à celle de la sphère par les polyèdres n'est donc pas possible si l'on ne considère que les polyèdres réguliers.



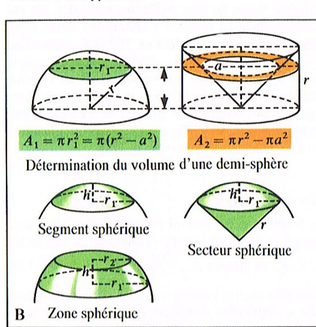
Grâce à la formule $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on obtient les volumes des solides en forme d'escalier à n marches, inscrits et circonscrits :

$$V_n = \frac{h}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} B \cdot \frac{k^2}{n^2} = \frac{Bh}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3} Bh\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right),$$

$$V'_n = \frac{h}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} B \cdot \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{3} Bh\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

On en déduit pour une pyramide $V = \frac{1}{3} Bh$.

Volume d'une pyramide



Sphère et portions de sphère

Prisme	$V = Bh$
Cylindre à base circulaire	$V = \pi r^2 h$
Cylindre droit à base circulaire	$E = 2\pi rh$
Pyramide	$V = \frac{1}{3} Bh$
Pyramide tronquée	$V = \frac{1}{3} h\left(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right)$
Cône à base circulaire	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
Cône de révolution	$E = \pi rs$
Cône tronqué à base circulaire	$V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$
Cône tronqué de révolution	$E = \pi(r_1 + r_2)s$
Sphère	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$
Segment sphérique	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ $= \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + h^2)$
	$E = 2\pi rh = \pi(r_1^2 + h^2)$
Secteur sphérique	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$
Zone sphérique	$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$
C	$E = 2\pi rh$

Formules de calcul pour les solides

Nom du polytope $\mathbb{R}^4$	Nombre (et nature) des frontières Solides	Faces	Arêtes	Sommets
5-cellules rég.	5 tétraèdres	10	10	5
8-cellules rég.	8 cubes	24	32	16
16-cellules rég.	16 tétraèdres	32	24	8
24-cellules rég.	24 octaèdres	96	96	24
120-cellules rég.	120 dodécaèdres	720	1 200	600
600-cellules rég.	600 tétraèdres	1 200	720	120

Nom du polytope $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 5$)	Nombre (et nature) des frontières			
	Polytopes de dim. $(n-1)$		Polytope de dim. k ($0 \leqslant k \leqslant n-1$)	
Simplexe rég. de dim. n	$n+1$	Simplexes de dim $(n-1)$	$\binom{n+1}{k+1}$	Simplexes de dim. k
Cube de dim. n	$2n$	Cubes de dim. $(n-1)$	$\binom{n}{k} 2^{n-k}$	Cubes de dim. k
2^n-cellules rég. de dim. n	2^n	Simplexes de dim. $(n-1)$	$\binom{n}{k+1} 2^{k+1}$	Simplexes de dim. k

« Volume » V_n de dim. n mesuré par		« Surface » A_n de dim. $(n-1)$ mesurée par
$\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)!} r^n$, si n pair	$\dfrac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!} r^n$, si n impair	$\dfrac{n V_n}{r}$

D

Polytopes réguliers, volumes et surfaces des sphères de dimension n

Prisme et cylindre

Dans l'espace, la réunion des polygones (p. 161) déduits d'un polygone P par les translations de vecteur $t\vec{v}$, $t \in [0, 1]$, $\vec{v}$ vecteur non nul et non parallèle au plan de P, est un ensemble de points appelé *prisme*. Le contour du polygone engendre une surface appelée *surface latérale* du prisme. P et son image P' par la translation de vecteur $\vec{v}$ sont appelés *bases*, leur distance *hauteur* du prisme. Si le vecteur de translation est orthogonal au plan de P, le prisme est dit *droit*.

Si l'on étend la notion d'égalité par décomposition des polygones aux polyèdres, dont le prisme est un cas particulier, on voit que deux prismes droits de bases égales par décomposition et de même hauteur sont décomposables en prismes droits égaux. La détermination du volume d'un prisme se ramène dans ce cas à celui d'un parallélépipède rectangle (prisme avec arêtes perpendiculaires 2 à 2), ce volume se calculant suivant la déf. 2 et la rem. 1, p. 161, par comparaison avec le cube unité : $V = Bh$, où B est l'aire de la base du prisme et h sa hauteur.

Cette formule reste valable pour un prisme quelconque et peut s'établir par décomposition des volumes, en trois étapes :

(1) Tout prisme de base un parallélogramme est égal par décomposition à un parallélépipède rectangle de base de même aire et de hauteur égale.

(2) Tout prisme à base triangulaire est égal par décomposition au prisme précédent, ayant pour base un parallélogramme de même aire que celle du triangle et de même hauteur.

(3) Tout prisme enfin se laisse décomposer en un nombre fini de prismes à base triangulaire de même hauteur, dont la somme des aires des bases est égale à celle de la base polygonale de départ.

Si, dans la définition d'un prisme, on remplace le polygone P par une base circulaire (rayon r), on obtient un cylindre. En considérant le cercle comme limite de polygones, on obtient $V = \pi r^2 h$ pour le volume du cylindre et $E = 2\pi rh$ pour son aire latérales, s'il s'agit d'un cylindre droit.

Pyramide et cône

L'union des segments reliant chaque point d'un polygone à un point S, non coplanaire avec ce polygone, est un ensemble de points appelé *pyramide*. Les points des segments reliant la frontière du polygone au point S forment la *surface latérale* de la pyramide. La distance du point S au plan du polygone est appelée *hauteur* de la pyramide. La détermination du volume d'une pyramide est moins aisée que celle du prisme. En particulier, on ne peut rien exploiter de la propriété d'égalité des volumes par décomposition. DEHN a prouvé qu'il existe des pyramides avec des bases de même aire et de même hauteur mais qui ne sont pas égales par décomposition. On approche alors une pyramide par des solides se prêtant mieux aux calculs et on définit son volume par des intervalles emboîtés. Comme chaque pyramide se décompose en pyramides à base triangulaire, il suffit de poursuivre la recherche pour ces dernières. Pour une pyramide dont le pied de la hauteur se situe à l'intérieur de la base, on la découpe par n plans parallèles au plan de la base ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), la distance entre deux plans consécutifs étant constante. Les surfaces d'intersection ont des aires qui se calculent à partir de la surface de la base par homothétie de centre S. Le $k^{ième}$ triangle aura pour aire $S_k = \frac{k^2}{n^2} S$ (p. 157). Ces surfaces triangulaires sont les bases de prismes extérieurs, resp. intérieurs, au sens large, à des troncs de pyramide, sections de cette dernière par des plans parallèles à sa base (ill. A). On encadre ainsi le volume V de la *pyramide* par deux suites de volumes (V_n) et (V'_n) ($n \in \mathbb{N} \setminus\{0\}$) conduisant à une suite d'intervalles emboîtés. Des propriétés simples d'encadrement en analyse donnent le résultat $V = \frac{1}{3} Bh$.

Comme cas limite de la pyramide, on obtient un cône de même qu'on avait obtenu un cylindre comme cas limite du prisme. C'est pour cela que la formule du volume d'un cône à base circulaire est $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Pour un cône de révolution de génératrice de longueur s, l'aire de la surface latérale est $S = \pi rs$. Elle correspond à l'aire d'un secteur de cercle de rayon s, avec un arc de longueur $2\pi r$ que l'on aurait découpé et déformé pour obtenir la surface latérale du cône.

Rem. : Les formules de volumes Bh, resp. $\frac{1}{3} Bh$ sont également valables pour tout cylindre, resp. tout cône, ayant pour base une surface plane limitée par une courbe de JORDAN C (*cf.* p. 393). L'aire latérale d'un cylindre droit est hl, si C est rectifiable de longueur l (*cf.* p. 395).

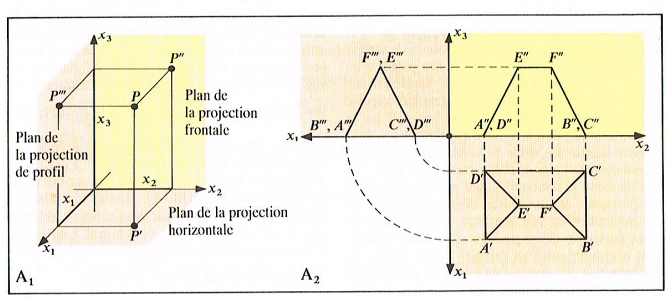
Sphère

La définition et le calcul du volume d'une sphère se font comme pour la pyramide, par découpage par des plans parallèles. ARCHIMÈDE avait déjà, par une méthode voisine, déterminé le volume de la sphère. Il avait remarqué qu'une demi-sphère et un cylindre, diminué d'un cône inscrit convenable (fig. B), avaient des surfaces de découpe de même aire dans le cas d'une section par un plan parallèle à leur base commune, et par conséquent avaient même volume.

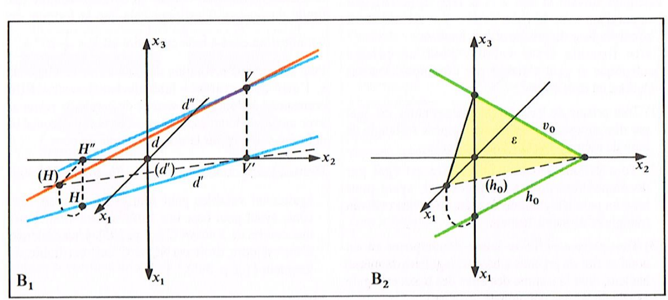
La surface d'une sphère est approchée en la découpant en zones par des plans parallèles, l'aire de chaque zone élémentaire étant assimilée à l'aire latérale d'un tronc de cône de révolution de même base que la zone. Les formules relatives à la sphère, aux portions de sphère et autres solides se trouvent dans le tab. C.

Rem. 1 : Dans le calcul intégral, les méthodes d'approximation précédemment vues pour les longueurs de courbes, les surfaces et volumes, seront approfondies et les calculs plus développés.

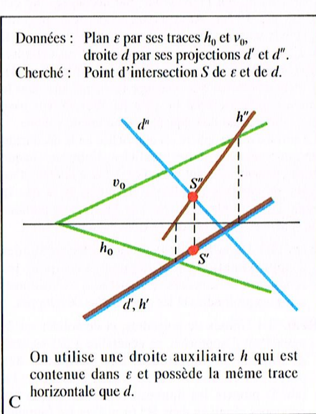
Rem. 2 : L'étude de polyèdres, et de solides qu'ils permettent d'approcher, se généralise à des espaces de dimension supérieure. Les analogues des polyèdres en dim > 3 s'appellent *polytopes*. Le tab. D montre les données relatives à tous les polytopes réguliers dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 4$) et les formules relatives aux sphères de dim. n (*hypersphères*).



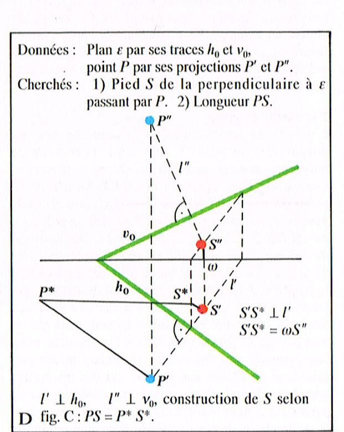
Coordonnées dans l'espace et projections orthogonales, solides en projection sur trois plans.



Traces d'une droite et traces d'un plan



Point d'intersection d'une droite et d'un plan



Perpendiculaire à un plan passant par un point

But de la géométrie descriptive

La géométrie descriptive a pour but la représentation des figures de l'espace dans le plan $\mathbb{R}^2$, de façon à retrouver facilement les caractéristiques d'origine. L'emploi de projections permet de représenter les points (resp. les droites) par des points (resp. des droites).

Dans le cas des tableaux, des photographies ou des images de l'œil humain, il s'agit de projections centrales. Pour les dessins techniques et les représentations de solides en mathématiques, on préfère les projections parallèles. Ces applications procurent en général une bonne vision de l'espace, mais ont l'inconvénient de ne pas être bijectives. La géométrie descriptive remédie à cette insuffisance.

Coordonnées dans l'espace et projections orthogonales

Si l'on munit l'espace d'un système orthonormal de coordonnées cartésiennes, on peut attribuer bijectivement à chaque point P d'une figure un triplet (x_1, x_2, x_3) de nombres réels (fig. A_1). On les appelle dans l'ordre *abscisse*, *ordonnée* et *cote*.

Pour la détermination d'un polyèdre (p. 241), la connaissance des coordonnées des sommets et la donnée des arêtes suffisent. Même pour certaines structures beaucoup plus complexes, la donnée d'un nombre fini de coordonnées et d'éléments est suffisante.

On a l'habitude de présenter le système de coordonnées de la façon suivante : l'axe des x_1 orienté vers l'avant, l'axe des x_2 vers la droite et l'axe des x_3 vers le haut.

Déf. 1 : Par projection orthogonale d'un point $P(x_1, x_2, x_3)$ sur les plans de coordonnées, on obtient la *projection horizontale* $P'(x_1, x_2, 0)$, la *projection frontale* $P''(0, x_2, x_3)$ et la *projection de profil* $P'''(x_1, 0, x_3)$ (fig A_1).

Sur la projection frontale (resp. horizontale), on fait apparaître en traits pleins les arêtes visibles de face (resp. de dessus) ; celles cachées sont en pointillé.

On rabat la projection horizontale autour de l'axe des x_2 vers le bas, dans le plan frontal, et pareillement pour la projection de profil autour de l'axe des x_3, vers la droite s'il s'agit d'une vue de gauche, vers la gauche si c'est une vue de droite. L'axe des x_2 est la *ligne de terre ;* P' et P'' sont sur une *ligne de rappel*, P'' et P''' sur une ligne de rappel de profil.

Couplage de deux projections orthogonales

Dans la représentation décrite ci-dessus, le triplet de points (P', P'', P''') permet de retrouver sans équivoque la position dans l'espace du point P. Mais deux seulement des projections de ce point suffisent. En général, on choisit les projections horizontale et frontale et on nomme ce mode de représentation *projection sur deux plans.*

L'application $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définie par $P \to (P', P'')$ est bijective. Suivant la forme et la position de la figure à représenter, on peut gagner en lisibilité en complétant par une projection de profil. Celle-ci n'est pas systématiquement utilisée.

Toute droite de l'espace est représentée par un couple de droites (d', d'') sur les deux plans de projection, dans certains cas, par un point et une droite.

Prop. 1 : *Deux droites se coupent si, et seulement si, les points d'intersection de leurs projections se trouvent sur une même ligne de rappel.*

Déf. 2 : Le point d'intersection d'une droite d avec le plan horizontal, resp. le plan frontal, est appelé *trace horizontale H,* resp. *trace frontale V* (fig. B_1).

Déf. 3 : La droite d'intersection d'un plan ε avec le plan horizontal, resp. frontal, est appelée *trace horizontale* h_0, resp. *trace frontale* v_0 (fig. B_2).

Prop. 2 : *Les traces horizontale et frontale d'un plan se coupent sur l'axe* x_2 *ou lui sont parallèles.*

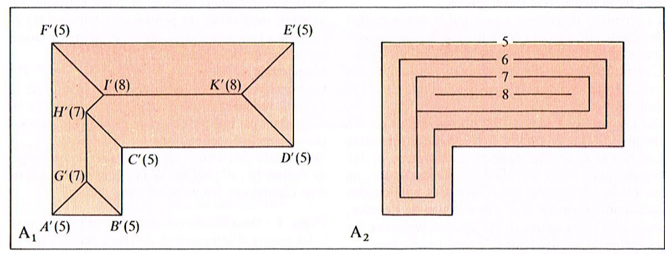
Prop. 3 : *Si une droite d est contenue dans un plan* ε, *alors les traces de d se trouvent sur les traces horizontale et frontale du plan.*

Déf. 4 : Les droites parallèles au plan horizontal s'appellent *droites horizontales*, celles parallèles au plan frontal *droites frontales*.

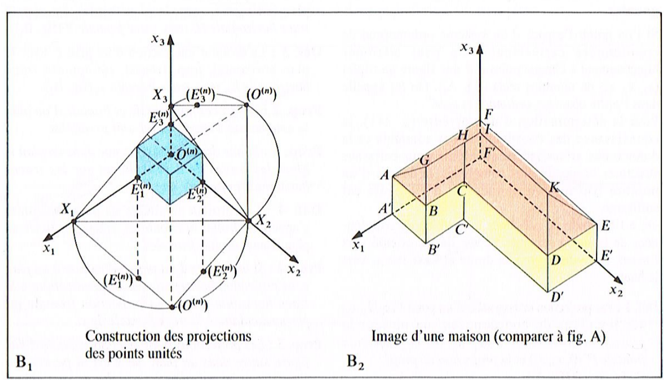
Prop. 4 : *Si une droite d est perpendiculaire à un plan* ε, *sa projection horizontale est perpendiculaire à la trace horizontale de* ε, *sa projection frontale est perpendiculaire à la trace frontale de* ε.

Prop. 5 : *Les projections frontale et horizontale d'une figure située dans un plan qui n'est ni parallèle à l'axe des* x_1, *ni parallèle à l'axe des* x_3, *sont affines (p. 161).*

En géométrie descriptive, il existe de nombreuses méthodes de construction de points d'intersection, de perpendiculaires, de parallèles, de détermination des longueurs réelles de segments, d'angles, etc. La *construction des ombres* et des intersections de surfaces peut nécessiter des connaissances géométriques approfondies. La fig. C montre en exemple la construction du point d'intersection d'une droite et d'un plan, donnés par leurs traces. Dans la fig. D, c'est un plan et un point P qui sont donnés. Il faut construire le pied S de la perpendiculaire au plan passant par P. Pour la détermination de la distance entre le point et le plan, on a rabattu le plan vertical contenant PS sur le plan horizontal.



Projection cotée (A_1) et représentation avec lignes de niveau d'une toiture (A_2)



Construction des projections des points unités

Image d'une maison (comparer à fig. A)

Application axonométrique orthogonale

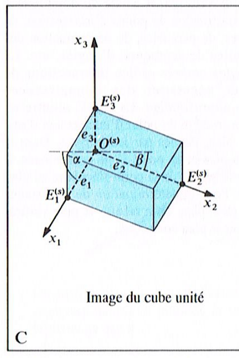
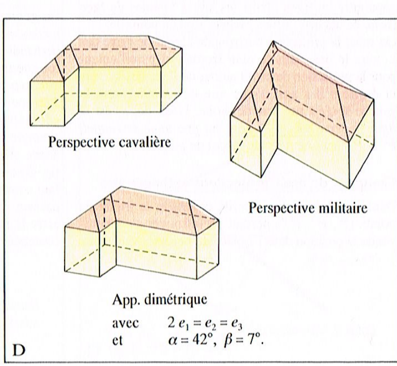


Image du cube unité



Perspective cavalière

Perspective militaire

App. dimétrique avec $2e_1 = e_2 = e_3$ et $\alpha = 42°$, $\beta = 7°$.

Application axonométrique oblique

Représentations axonométriques usuelles

Projection cotée

Une autre possibilité pour compléter une projection orthogonale en une application bijective est de rajouter entre parenthèses à la projection horizontale P' d'un point P sa *cote* x_3. $P'(x_3)$ s'appelle la *projection horizontale cotée* de P. L'association $P \to P'(x_3)$ définit une application bijective, nommée *projection cotée*.

Cette forme de projection s'applique essentiellement aux représentations de surfaces de l'espace, dont les projections horizontales ne présentent pas de superpositions, par ex. des toits (fig. A_1), des pentes, des terrains. Sur certains types de carte, on relie les points possédant la même cote, ce qui définit une *ligne de niveau* (fig. A_2 pour la surface du toit de la fig. A_1). Si on utilise des cotes qui se suivent à intervalles réguliers, on gagne en lisibilité pour les surfaces représentées, celles-ci étant d'autant plus pentues que la densité des lignes de niveau augmente. Une courbe qui coupe toutes les lignes de niveau orthogonalement (trajectoire orthogonale) s'appelle une *courbe de plus grande pente*.

Application axonométrique orthogonale

Déf. 5 : Une projection parallèle d'un volume et d'un repère orthonormal sur un plan est une *application axonométrique parallèle*, la figure obtenue étant la *projection axonométrique parallèle*.

Le cas de l'*application axonométrique orthogonale*, où la projection est orthogonale, est important ($P^{(n)}$ image de P). Si les axes coupent le plan de la figure, qui est le plan de la feuille de dessin, en X_1, X_2 et X_3 et si $O^{(n)}$ est l'image de l'origine, alors il ressort de la prop. 4 que $O^{(n)}$ est l'orthocentre du triangle $X_1X_2X_3$. Ce dernier est toujours à angles aigus, donc $O^{(n)}$ est à l'intérieur du triangle. On positionne le dessin de telle manière que $O^{(n)}X^3$ pointe vers le haut. La fig. B_1 montre la construction des images $E_1{}^{(n)}$, $E_2{}^{(n)}$ des points unités, par rabattement des triangles $O^{(n)}X_1X_2$ et $O^{(n)}X_3X_1$. On a ensuite représenté le dessin du cube unité. On remarque que l'on peut construire l'image d'un point donné de coordonnées quelconques (fig. B_2). On obtient une application bijective lorsqu'on associe à tout point P le couple de points ($P^{(n)}$, $P'^{(n)}$) de sa projection axonométrique orthogonale et de la projection axonométrique orthogonale de sa projection orthogonale sur le plan (O, x_1, x_2). On pourrait de même utiliser les projections axonométriques orthogonales des projections orthogonales de P sur les plans (O, x_2, x_3) et (O, x_3, x_1).

Application axonométrique oblique

On convient pour les applications axonométriques parallèles quelconques, dites *applications axonométriques obliques*, du choix des images de l'origine et des points unités du système de coordonnées ($P^{(s)}$ image de P). Ces images, simplement, ne doivent pas appartenir à une même droite, sans autre restriction. On a la prop. de POHLKE :

Prop. 7 : *Si quatre points $O^{(s)}$, $E_1^{(s)}$, $E_2^{(s)}$, $E_3^{(s)}$ d'un plan ne sont pas sur une même droite, on peut les considérer comme les images de l'origine et des points unités d'un repère orthonormal dans une projection parallèle.*

On laisse à nouveau l'axe $O^{(s)}E_3{}^{(s)}$ pointer verticalement vers le haut. On désigne les angles entre $O^{(s)}E_1{}^{(s)}$, resp. $O^{(s)}E_2{}^{(s)}$, et la droite, prise horizontale X_1X_2 (fig. B_1) ,par α, resp. β, les longueurs des projections $O^{(s)}E_1{}^{(s)}$, $O^{(s)}E_2{}^{(s)}$, $O^{(s)}E_3{}^{(s)}$, par e_1, e_2, e_3 (fig. C). En dehors des angles, ce sont les rapports de ces longueurs qui sont fondamentaux. On peut choisir des rapports de longueurs et des mesures d'angles quelconques mais certains choix sont préférés. Si $e_1 = e_2 = e_3$, l'application est appelée *isométrique*, si seulement deux longueurs sont égales, *dimétrique*, et si les longueurs sont toutes différentes, *trimétrique*.

Une appl. avec $e_2 = e_3$ et $\beta = 0°$ est appelée *perspective cavalière*. Si $e_1 = e_2$ et $\alpha + \beta = 90°$, on parle de *perspective militaire*. D'autres applications appréciées sont les isométriques avec $\alpha = \beta = 30°$ et les dimétriques avec $2e_1 = e_2 = e_3$, $\alpha = 42°$ et $\beta = 7°$ (fig. D). Dans ces deux derniers cas, on a une impression de vision rapprochée. Cela peut apporter des facilités de compréhension lors de travaux de construction. On a par ex. comme image axonométrique oblique d'une sphère une ellipse, un cercle pour une application axonométrique orthogonale.

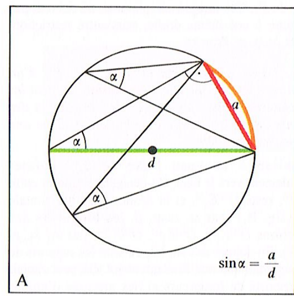
Rem. 1 : Les indices supérieurs (n) et (s) sont souvent abandonnés pour une meilleure lisibilité.

Rem. 2 : Si l'on passe des projections parallèles aux projections centrales, on peut construire de même des projections axonométriques centrales.

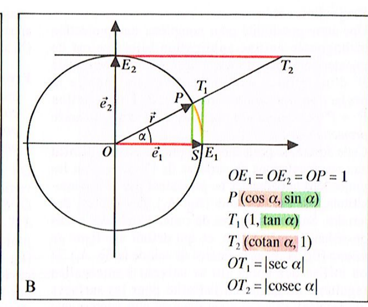
Conception d'une carte

On rencontre des problèmes pour la représentation plane d'une surface sphérique, par exemple la surface terrestre. Une telle représentation n'est pas possible sans déformation. On ne peut pas reporter toutes les longueurs à l'échelle (*conservation des longueurs*). On peut cependant choisir de conserver soit les mesures d'angles (*conservation des angles*) soit les aires à l'échelle (*conservation des aires*), ou d'autres propriétés.

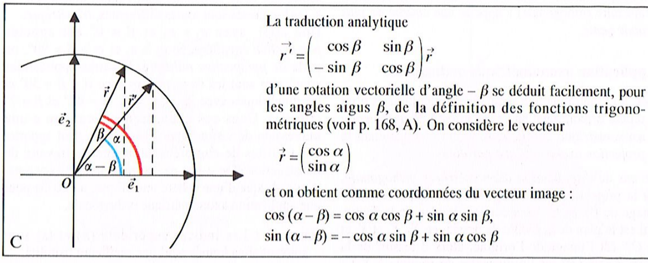
Parmi les procédés cartographiques, on peut citer les projections, directement dans le plan (*projection stéréographique* : ex. p. 66, C) ou sur la surface d'un cône ou d'un cylindre, que l'on applique ensuite sur le plan (*carte conique* ou *cylindrique*). On utilise encore d'autres méthodes (par ex. la représentation de MERCATOR, qui conserve les angles ; bien que dite projection de MERCATOR, elle n'en est pas une).



Sinus d'un angle



Signification géométrique des fonctions trigonométriques



Obtention des formules $\sin(\alpha-\beta)$ et $\cos(\alpha-\beta)$

$y = \sin\alpha$ $y = \cos\alpha$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\text{cotan}\,\alpha$
$0°$	0	1	0	—
$30° = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$45° = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$60° = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$90° = \frac{\pi}{2}$	1	0	—	0

Si $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{cotan}^2\alpha}}$$

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\text{cotan}^2\alpha}}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{1}{\text{cotan}\,\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\tan\alpha} = \text{cotan}\,\alpha$$

D $y = \tan\alpha$ $y = \text{cotan}\,\alpha$

Graphes des fonctions trigonométriques et formules de transformation

Fonctions trigonométriques

Certains problèmes de géométrie conduisant à l'étude d'un triangle rectangle peuvent être résolus par le calcul grâce aux théorèmes de PYTHAGORE et d'EUCLIDE. D'autres problèmes demandent des relations entre des longueurs de segments et des mesures d'angles, ce qui est possible grâce aux *fonctions trigonométriques.*

La meilleure manière de les introduire est de considérer des angles inscrits dans un cercle. De la prop. 7, p. 153, on déduit que des angles α de même mesure s'appuient sur des cordes de même longueur. Puisque les mesures d'angles et les rapports de deux longueurs de segments sont invariants par homothétie, le rapport $a{:}d$ de la longueur de la corde au diamètre du cercle ne dépend que de la mesure de l'angle α (fig. A). La fonction ainsi définie pour $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ par $\alpha \rightarrow a : d$ s'appelle *fonction sinus*. On écrit $a : d = \sin\alpha$.

Pour un angle aigu, on peut s'arranger pour qu'un des côtés soit le diamètre d'un cercle, et obtenir ainsi un triangle dont le troisième côté est la corde définie par l'angle. D'après la propriété de THALÈS, ce triangle est droit, et le sinus de l'angle est le rapport entre le côté opposé à l'angle et l'hypoténuse (fig. A). On peut introduire $\sin\alpha$ grâce à ce rapport et indépendamment du cercle. De même manière peut être introduit le rapport entre le côté adjacent à α et l'hypoténuse. Cela donne le sinus de l'angle complémentaire (à $\frac{\pi}{2}$) de α, que l'on note $\cos\alpha$. On généralise la définition de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ par une méthode numérique grâce aux formules :

(1) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,

(2) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$,

que l'on détermine facilement pour des angles aigus (fig. C). La formule

(3) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$

est valable si on utilise l'unité radian pour la mesure de l'angle : elle traduit le fait que la longueur d'une corde et celle de l'arc correspondant sont égales asymptotiquement pour des angles positifs petits. Si l'on applique les formules précédentes à un couple (f, g) de fonctions réelles continues, on peut montrer grâce à l'analyse que seul le couple (sin, cos) vérifie les trois égalités. On obtient les développements en série

$$\sin\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\alpha^{2n+1}}{(2n+1)\,!}, \quad \cos\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\alpha^{2n}}{(2n)\,!}$$

Ces séries sont convergentes pour un réel α quelconque et peuvent être utilisées pour former des tables de fonctions. Les fonctions sont périodiques de période 2π, mesure de l'angle plein en radian. On a :

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\,k\pi)$, $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\,k\pi)$

$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$, $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$.

Pour un angle quelconque, on a donc une nouvelle signification de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ comme coordonnées du vecteur unité $\vec{e}$ faisant un angle α avec l'axe des abscisses d'un repère orthonormé (fig. B). On définit ensuite les fonctions tangente et cotangente par

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\text{cotan}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Ces fonctions ont pour période π et ne sont pas définies pour $\alpha = (2\,k+1)\,\frac{\pi}{2}$, resp. $\alpha = k\,\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On a

$\text{cotan}\,\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Rem. : On utilise encore parfois les fonctions $\sec\alpha := 1 : \cos\alpha$, $\text{cosec}\,\alpha := 1 : \sin\alpha$.

Pour les angles aigus, on peut introduire toutes ces fonctions à l'aide de rapports de côtés d'un triangle rectangle. La fig. B illustre la signification géométrique des fonctions trigonométriques. Le tableau D donne les graphes de ces fonctions et leurs principales propriétés. Pour $\alpha = \beta$, la relation (2) donne :

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ pour tout angle α.

Avec cela, il est possible de déterminer à partir de la valeur d'une fonction trigonométrique d'un angle α les valeurs absolues de toutes les autres fonctions (fig. D).

On peut compléter les formules (2) et (3) par les suivantes (*théorèmes d'addition*) :

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\text{cotan}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{cotan}\,\alpha\,\text{cotan}\,\beta \mp 1}{\text{cotan}\,\beta \pm \text{cotan}\,\alpha}$$

De ces formules peuvent en être déduites d'autres pour les multiples et les fractions d'angles, par ex.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$,

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, \quad \text{cotan}\,2\alpha = \frac{\text{cotan}^2\alpha - 1}{2\,\text{cotan}\,\alpha}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Ces formules peuvent aussi servir à établir les tables trigonométriques. À partir de $\sin 30° = 0{,}5$ on peut par divisions successives par deux et grâce aux formules d'addition remplir les tables par petits intervalles.

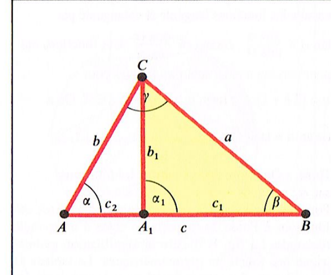
Les transformations des sommes en produits et vice-versa sont données par les formules suivantes :

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

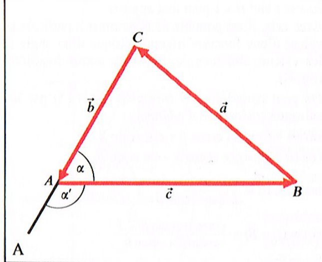
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$



Démonstration non vectorielle :
On considère le triangle rectangle A_1BC.
D'après le th. de PYTHAGORE on peut écrire

$a^2 = b_1^2 + c_1^2$, où
$b_1^2 = b^2 - c_2^2$ et
$c_1^2 = (c \mp c_2)^2$ (signe moins si α est aigu, signe plus si α est obtus).

On obtient alors par substitution :
$a^2 = b^2 - c_2^2 + c^2 \mp 2\,cc_2 + c_2^2$
$a^2 = b^2 - c^2 \mp 2\,cc_2$.
Mais $c_2 = \pm\, b \cos\alpha$ (signe plus si α est aigu, signe moins si α est obtus). On a donc :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos\alpha$.



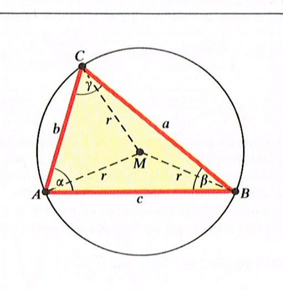
Démonstration par les vecteurs :
On écrit le carré scalaire de $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$:

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{b} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{c} \rangle$$
$$= \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle + 2\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha'$$
$$\text{avec} \quad \alpha' = \measuredangle(\vec{b}, \vec{c}) = \pi - \alpha$$

si bien que
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos\alpha.$$

A

Propriété des cosinus

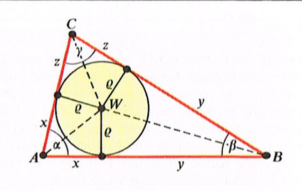


Les angles du triangle sont des angles inscrits dans le cercle circonscrit au triangle. Soit r le rayon du cercle ; on obtient par la déf. du sinus :

$$\frac{a}{2r} = \sin\alpha, \quad \frac{b}{2r} = \sin\beta, \quad \frac{c}{2r} = \sin\gamma.$$

B

Propriété des sinus



Les côtés du triangle sont tangents au cercle inscrit (rayon ρ). Les points de contact séparent ces côtés en segments de longueurs égales deux à deux. Si l'on note x, y, z leurs longueurs, on a

$$x + y + z = s,$$
$$x + y = c,$$
$$y + z = a,$$
$$x + z = b.$$

On en déduit :
C $x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c.$

Triangle et cercle inscrit

Calculs relatifs aux triangles rectangles
Les calculs d'éléments du triangle rectangle à partir des longueurs de deux côtés ou de la longueur d'un côté et de la mesure d'un angle non droit sont possibles grâce à la propriété de la somme des angles d'un triangle rectangle, le théorème de PYTHAGORE et les fonctions trigonométriques. Autrefois à l'aide de tables de valeurs, actuellement avec les calculatrices, ces déterminations par le calcul s'avèrent beaucoup plus précises qu'une mesure déduite d'une construction géométrique.

Calculs relatifs à un triangle quelconque
Le véritable but de la trigonométrie est de faire des calculs concernant un triangle quelconque, où, en général, on donne trois mesures indépendantes parmi les côtés et les angles : il s'agit de déterminer les autres de ces éléments, ce qui amène à trois équations indépendantes pour six variables.
Une possibilité pour obtenir un tel système est la généralisation du théorème de PYTHAGORE :

Propriété des cosinus (ill. A)
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos\alpha$,
$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ac \cos\beta$,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos\gamma$.
La démonstration de la première relation est donnée en ill. A, les deux autres s'obtenant par permutation circulaire.
L'utilisation de ce théorème est aisée si les trois côtés (CCC) ou un angle et ses deux côtés adjacents (CAC) sont donnés. Dans tout autre cas, elle s'avère difficile et on préfère utiliser une autre méthode.
À partir de la définition du sinus pour les angles inscrits d'un cercle, on obtient :

Propriété des sinus (fig. B)
$$\frac{a}{2r} = \sin\alpha, \; \frac{b}{2r} = \sin\beta, \; \frac{c}{2r} = \sin\gamma$$
où r désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle (fig. B). Ce système portant sur sept grandeurs on le complète par la relation des angles $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
La propriété des sinus s'écrit aussi en éliminant r
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$ (c.-à-d. les côtés d'un triangle sont proportionnels aux sinus des angles opposés).
La propriété des sinus et la propriété de la somme des angles d'un triangle permettent la résolution des problèmes dans un triangle quelconque, mais ne conduisent à des calculs simples que dans des cas bien précis (CAA, ACA, CCA), pour lesquels l'utilisation de la propriété des cosinus est rendue difficile. Les deux méthodes se complètent donc bien.
La propriété des cosinus est assez inefficace pour les calculs logarithmiques à cause des sommes rencontrées, si bien que l'on a établi d'autres formules basées sur des rapports de côtés et d'angles pour rendre les calculs dans les cas CCC et CAC plus agréables. Avec l'invasion des ordinateurs, les calculs logarithmiques sont de moins en moins utilisés, si bien que ces formules ont perdu de leur importance.

Propriété des quotients des tangentes
On a $$\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Propriété des carrés des tangentes
$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$$; s représente la moitié du périmètre du triangle, soit $2\,s = a + b + c$. Les autres relations analogues s'obtiennent par permutation circulaire.
La propriété des quotients des tangentes est utilisée pour le type CAC. De a, b, γ on calcule par exemple $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$, et on détermine ensuite $\frac{\alpha-\beta}{2}$ grâce à la propriété des quotients des tangentes. On a alors $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$ et $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$.
La propriété des carrés des tangentes, également appelée propriété des demi-angles, peut s'utiliser avantageusement pour le type CCC.
La propriété des quotients des tangentes s'obtient à partir de la propriété des sinus en utilisant les formules de la p. 179.
Pour la démonstration de la propriété des carrés des tangentes, on utilise la propriété des cosinus sous la forme $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$ et on l'introduit dans les relations donnant $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ et $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ en p. 179. On fait le rapport et on simplifie.

Autres formules concernant un triangle
Les points de contact du cercle inscrit avec les côtés découpent sur ceux-ci des longueurs égales deux à deux, soit $s - a$, $s - b$, $s - c$ (fig. C).
À partir de $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s-a}$ et de la propriété des carrés des tangentes, on obtient
$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$
L'aire $\mathcal{A}$ du triangle s'obtient en additionnant les aires des trois triangles ABW, BCW, CAW. Ceux-ci possédant la même hauteur ρ, on a
$$\mathcal{A} = \rho\, s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{(HERON)}.$$
D'autres formules donnant l'aire sont obtenues en calculant trigonométriquement les hauteurs du triangle :
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha = \frac{1}{2}\,ca\sin\beta.$$
Comme par exemple $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$, on a $\mathcal{A} = \frac{abc}{4r}$ et donc $r = \frac{abc}{4\mathcal{A}}$, on peut obtenir le rayon du cercle circonscrit en connaissant les longueurs des côtés du triangle.

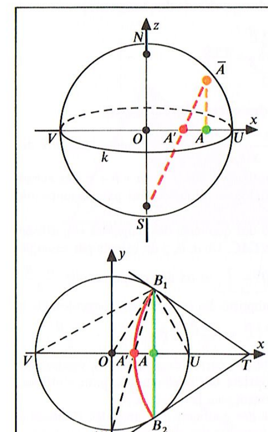


Image d'un point $A\ (x, 0, 0)$:

$$\pi_1(A) = \bar{A}\left(x, 0, \sqrt{1-x^2}\right),$$

$$\pi_2 \circ \pi_1(A) = A'(x', 0, 0) \quad \text{avec} \quad x' = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

$$l_k(O, A) = \frac{1}{2}\ \ln(O, A, U, V) = \frac{1}{2}\ \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$l_p(O, A') = \ln(O, A', U, V) = \ln \frac{1+x'}{1-x'}.$$

Or $\left(\frac{1+x'}{1-x'}\right)^2 = \frac{1+x}{1-x}$, si bien que $l_k(O, A) = l_p(O, A')$.

On peut examiner x et x' à l'aide des longueurs correspondantes :

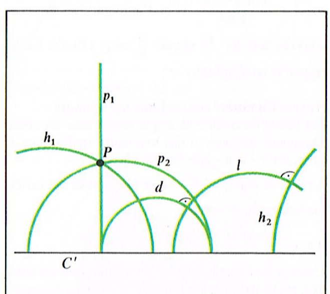
$$x = \frac{e^{l_k(OA)} - e^{-l_k(OA)}}{e^{l_k(OA)} + e^{-l_k(OA)}},$$

$$x' = \frac{e^{l_p(OA')} - 1}{e^{l_p(OA')} + 1}.$$

Image d'une droite :

La droite passant par A et les deux points impropres B_1 et B_2 se transforme en un arc de cercle passant par A', B_1 et B_2. Celui-ci rencontre le cercle C orthogonalement. Son centre est le point d'intersection des tangentes en B_1 et B_2 à C.

Passage du modèle de Klein à celui du cercle de Poincaré

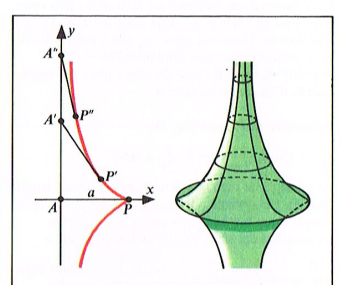


Les points du plan hyperbolique sont les points du demi-plan supérieur (ouvert) ; les « droites », les demi-droites et les demi-cercles du demi-plan supérieur orthogonaux à C'. Deux « droites » ont ou un point commun, ou une « perpendiculaire » commune ou un point impropre commun sur $C' \cup \{\infty\}$. Dans le dernier cas, on parle de parallèles hyperboliques.

Par un point n'appartenant pas à une droite d passent deux parallèles hyperboliques à cette droite (c'est-à-dire deux droites non connectables à d).

B

Modèle du demi-plan de Poincaré



Une tractrice est engendrée par la trajectoire d'un point P tiré par un point A gardant une distance constante a avec P, et parcourant une droite d. Si $a = 1$ et si d est l'axe des y, on obtient l'équation :

$$y' = \mp \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Cette équation différentielle admet comme solution

$$y = \ln \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x} \mp \sqrt{1-x^2}.$$

Par rotation de cette courbe autour de l'axe des y, on engendre une surface de courbure de Gauss constante négative (pseudo-sphère particulière).

C

Tractrice et pseudo-sphère

Modèle de Klein, longueur de segment hyperbolique

Un plan hyperbolique est, d'après la p. 137, un plan métrique contenant au moins deux droites non connectables entre elles (¬ C), tel que pour tout point A et toute droite d non incidente à A, il existe au plus deux droites incidentes à A non connectables à d (H).

On a déjà donné p. 133 un exemple de plan métrique possédant ces propriétés (modèle de Klein).

Parmi les différents modèles de plans euclidiens, le plan $\mathbb{R}^2$ de la géométrie euclidienne élémentaire est caractérisé par les axiomes complémentaires (A) et (D). Dans le modèle de Klein, ces axiomes sont également valables et l'on peut montrer qu'il s'agit de l'unique plan hyperbolique de ce genre à un isomorphisme près. Son plan idéal (p. 143) est le plan projectif $P^2(\mathbb{R})$. Dans la suite, on supposera que les axiomes (A) et (D) sont satisfaits (p. 147).

L'ensemble de toutes les isométries (compositions de réflexions) du modèle de Klein est l'ensemble de toutes les collinéations projectives du plan idéal qui transforment le cercle des points impropres en lui-même. Toute droite joignant deux points propres A et B contient deux points impropres U et V : le birapport strictement positif (A, B, U, V) est conservé dans toute collinéation. Puisque $(A, B, U, V) = (B, A, U, V)^{-1}$, $|\ln(A, B, U, V)|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et ne dépend que de la paire $\{A, B\}$. Si $A = B$ et si U et V sont deux points impropres alignés avec A, le logarithme est nul. On peut montrer que

$l_k(A, B) := \frac{1}{2}\ |\ln(A, B, U, V)|$ a toutes les propriétés d'une distance (*longueur de segment hyperbolique*).

Le facteur $\frac{1}{2}$ a été introduit dans la définition de la longueur hyperbolique pour garder une analogie avec la trigonométrie euclidienne (voir ci-dessous).

Modèle du cercle de Poincaré, mesure d'angle

On introduit la mesure d'angle dans le modèle de Klein à l'aide d'un birapport approprié ; on choisit ici un autre modèle. On l'obtient à partir de celui de Klein, en prenant le cercle C des points impropres comme équateur d'une sphère (fig. A) et en projetant orthogonalement les points du plan hyperbolique, intérieur de C, par une première application π_1 sur la demi-sphère supérieure, puis en transformant les points de celle-ci par une projection centrale π_2 de centre le pôle sud, en retour sur l'intérieur de C. Par π_1, les droites hyperboliques du modèle de Klein se transforment en demi-cercles verticaux sur la sphère, et ceux-ci, par π_2 (projection stéréographique), donnent à l'intérieur de C les arcs de cercle orthogonaux à C et les diamètres, nouvelles droites du plan hyperbolique. Les angles de deux droites hyperboliques ont leur mesure euclidienne invariante par une isométrie hyperbolique ; en effet les déplacements hyperboliques correspondent aux applications homographiques (conservation des angles en grandeur et sens), qui transforment l'intérieur de C en lui-même. Le groupe de ces applications sera étudié plus avant dans la théorie des fonctions. C sera plongé comme cercle dans le plan complexe.

Dans le modèle de Poincaré, on adopte donc pour mesure hyperbolique d'angles la mesure euclidienne. Quant à la mesure des longueurs, elle s'obtient facilement de la façon qui suit.

U et V étant les points de rencontre de la « droite » passant par A' et B' avec le cercle C, a, b, u, v les nombres complexes correspondant à ces points dans le plan complexe, on peut former le birapport

$(a, b, u, v) = \frac{u-a}{b-u} : \frac{v-a}{b-v}$ conforme au birapport projectif, et concordant avec lui, lorsque les quatre points sont sur une même droite euclidienne. Si A' et B' sont les images de A et B lors du passage du modèle de Klein à celui de Poincaré, alors on a

$(A, B, U, V) = (A', B', U', V')^2$. Si l'on pose

$l_p(A', B') := |\ln|(a, b, u, v)||$ alors $l_p(A', B') = l_k(A, B)$.

Pour la distance d'un point $A(x, 0)$, resp. $A'(x', 0)$ de l'axe des réels à l'origine, on a une écriture assez simple en x, resp. en x'.

Modèle du demi-plan de Poincaré

On peut transformer l'intérieur du cercle unité du plan complexe par la transformation $z' = \frac{z+i}{iz+1}$ en le demi-plan supérieur des parties imaginaires > 0. Cette application homographique, qui conserve les angles, transforme les droites du modèle du cercle de Poincaré en les demi-cercles du demi-plan qui ont leur centre sur l'axe des réels et en les demi-droites perpendiculaires à cet axe (modèle du demi-plan de Poincaré, fig. B). Longueur de segments et mesure d'angles s'ensuivent comme pour le modèle du cercle.

Pseudo-sphère

Sous le terme de pseudo-sphère, on entend toute surface ayant une courbure de Gauss constante négative (voir Géométrie différentielle). Beltrami a prouvé que toute surface de ce type pouvait être considérée comme une partie de plan hyperbolique, lorsque l'on prend comme droite toute ligne liant deux quelconques de ses points (ligne géodésique) par le plus court chemin. Les longueurs de segments et les mesures d'angles se calculent en géométrie euclidienne infinitésimale. Un exemple d'une telle surface est la surface de révolution engendrée par une tractrice tournant autour de son asymptote (fig. C) ; d'une manière générale tout exemple dans $\mathbb{R}^3$ présente des lignes singulières, le long desquelles la définition générale du plan tangent ne s'applique pas.

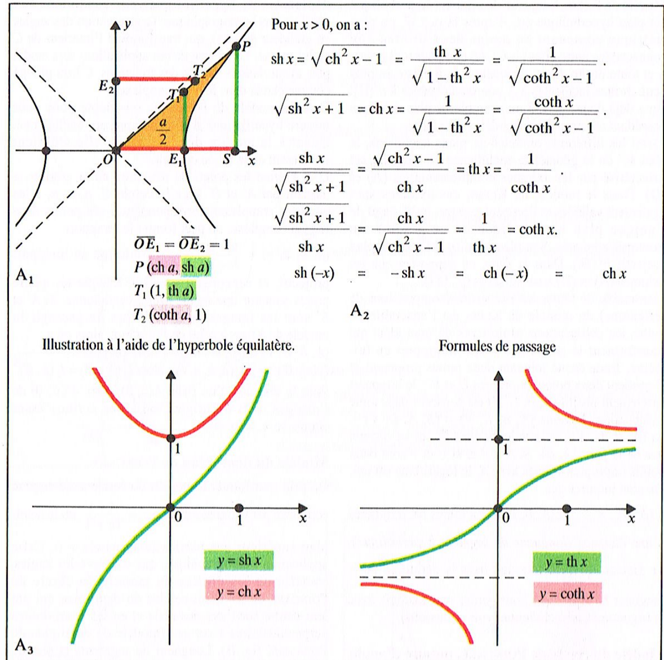
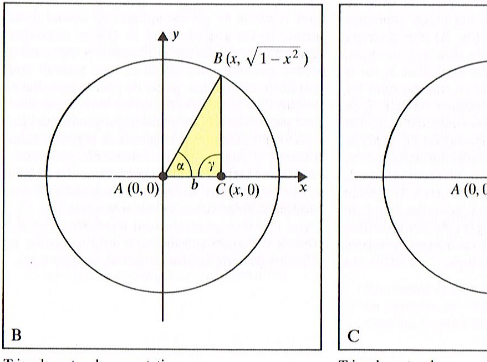


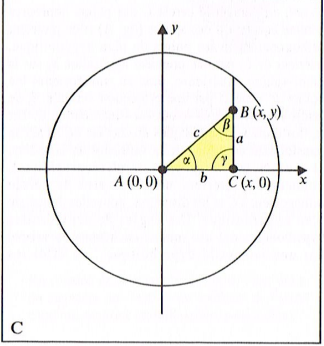
Illustration à l'aide de l'hyperbole équilatère.

Formules de passage

Fonctions hyperboliques



Triangle rectangle asymptotique



Triangle rectangle

Fonctions hyperboliques

On a introduit en géométrie euclidienne les fonctions trigonométriques pour les calculs appliqués aux triangles. On définit en géométrie hyperbolique les *fonctions hyperboliques* sur $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sinus, cosinus, tangente, cotangente hyperboliques par :

$$\text{sh}\,a = \frac{e^a - e^{-a}}{2},\ \text{ch}\,a = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

$$\text{th}\,a = \frac{\text{sh}\,a}{\text{ch}\,a},\ \text{coth}\,a = \frac{\text{ch}\,a}{\text{sh}\,a},\ a \neq 0.$$

On établit facilement les formules d'addition, proches de celles des fonctions trigonométriques, par ex.

$\text{sh}\,(a \pm b) = \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b \pm \text{ch}\,a\,\text{sh}\,b$

$\text{ch}\,(a \pm b) = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b \pm \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b,$

avec la relation importante $\text{ch}^2 a - \text{sh}^2 a = 1$.

Géométriquement, on peut interpréter les quatre fonctions hyperboliques en faisant intervenir une hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = 1$ (fig. A_1). Dans ce cas, a est le double de l'aire du secteur d'hyperbole OE_1P, tandis que les valeurs des fonctions hyperboliques sont lues de la même façon que les fonctions trigonométriques. Le tab. A_2 contient des formules de passage pour $x > 0$, la fig. A_3 les graphes des fonctions. On a établi comme pour les fonctions trigonométriques des tables de fonctions hyperboliques, peu utilisées depuis l'emploi des calculatrices.

Triangles rectangles asymptotiques

Sous le terme de triangle rectangle asymptotique, on entend un triangle ABC rectangle en C avec un sommet impropre B. Si l'on se place dans le modèle de Klein le sommet A au centre du cercle des points impropres, la droite (AC) prise comme axe des abscisses, avec $C = (x, 0)$ (fig.B) on obtient la relation

$\tan \frac{\alpha}{2} = e^{-b}$ (Lobatschewski).

On a en effet d'après la p. 183

$x = \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}} = \text{th}\,b$. La fig. B illustre $\cos\alpha = \text{th}\,b$,

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \text{th}^2 b} = \frac{1}{\text{ch}\,b}$. Par passage aux angles moitiés, on obtient

$2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \text{th}\,b$, $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\text{ch}\,b}$ dont la division membre à membre donne le résultat.

Calculs concernant les triangles rectangles

La construction du modèle de Klein permet de vérifier que les retournements qui conservent l'orthogonalité par déf. conservent également le birapport donc la distance (ils engendrent les isométries). Étant donné un triangle, $A'\,B'\,C'$, rectangle en C', il existe un retournement qui l'amène en ABC, A centre du cercle des points impropres ; l'axe des x étant défini par A et C, l'étude métrique du triangle $A'\,B'\,C'$ se ramène à celle du triangle ABC (fig.C). Il existe des relations entre les côtés (a, b, c), et les angles $(\alpha, \beta, \gamma = \frac{\pi}{2})$. Ainsi :

Prop. 1 : *On a dans un triangle rectangle hyperbolique :*

$\text{th}\,a = \tan\alpha\,\text{sh}\,b$, $\text{th}\,b = \tan\beta\,\text{sh}\,a$,

$\text{th}\,a = \cos\beta\,\text{th}\,c$, $\text{th}\,b = \cos\alpha\,\text{th}\,c$,

$\text{sh}\,a = \sin\alpha\,\text{sh}\,c$, $\text{sh}\,b = \sin\beta\,\text{sh}\,c$,

$\text{ch}\,c = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b$, $\text{ch}\,c = \text{cotan}\,\alpha\,\text{cotan}\,\beta$,

$\cos\alpha = \text{ch}\,a \sin\beta$, $\cos\beta = \text{ch}\,b \sin\alpha$.

La *démonstration* est donnée pour la première formule : Soit B de coordonnées x et y ; on a :

$$b = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},\ a = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-x^2} + y}{\sqrt{1-x^2} - y}.$$

Après résolution en x et y, on obtient

$x = \text{th}\,b$ (p. 183), $y = \sqrt{1-x^2}\ \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} = \frac{\text{th}\,a}{\text{ch}\,b}$.

Or $\tan\alpha = \frac{y}{x}$. D'où le résultat.

Calculs concernant un triangle quelconque

Prop. 2 : *La somme des angles d'un triangle hyperbolique est plus petite que π.*

Dém. : Pour un triangle rectangle, on déduit de $\text{ch}\,c = \text{cotan}\,\alpha\,\text{cotan}\,\beta$ et $\text{ch}\,c > 1$, pour $c \neq 0$: $\text{cotan}\,\alpha\,\text{cotan}\,\beta > 1$. D'où $\text{cotan}\,\alpha > \tan\beta$, c.-à-d. $\frac{\pi}{2} - \alpha > \beta$, $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

La somme des angles d'un triangle rectangle est donc plus petite que π. On utilise alors la propriété de division d'un triangle quelconque en deux triangles rectangles pour justifier le résultat général.

Les calculs relatifs à un triangle en géométrie hyperbolique sont donc plus compliqués qu'en géométrie euclidienne, puisqu'il faut distinguer six types de situations (*CCC, CCA, CAC, CAA, ACA, AAA*) à cause de la somme variable des angles. Les propriétés requises pour résoudre les problèmes sont toutefois apparentées à celles de la géométrie euclidienne.

Propriété des sinus

$$\frac{\text{sh}\,a}{\sin\alpha} = \frac{\text{sh}\,b}{\sin\beta} = \frac{\text{sh}\,c}{\sin\gamma}.$$

Propriété des cosinus des côtés

$\text{ch}\,a = \text{ch}\,b\,\text{ch}\,c - \text{sh}\,b\,\text{sh}\,c\cos\alpha,$

$\text{ch}\,b = \text{ch}\,c\,\text{ch}\,a - \text{sh}\,c\,\text{sh}\,a\cos\beta,$

$\text{ch}\,c = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b - \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b\cos\gamma.$

Propriété des cosinus des angles

$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\,\text{ch}\,a,$

$\cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\,\text{ch}\,b,$

$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,\text{ch}\,c.$

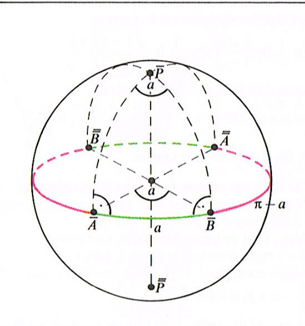
Les démonstrations se font en décomposant les triangles en triangles rectangles.

Les propriétés des cosinus des côtés sont utilisées pour les cas *CCC* et *CAC*, les prop. des cosinus des angles pour les cas *AAA* et *ACA*. Dans les cas restants, on détermine une quatrième grandeur par la propriété des sinus. On connaît ainsi deux côtés et deux angles (*ACCA*). Puis on décompose le triangle par l'intermédiaire de la hauteur relative au côté à évaluer en deux triangles rectangles et on la calcule. On peut alors terminer.

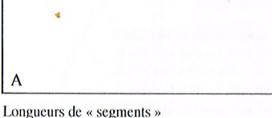
Aire d'un triangle

Comme en géométrie euclidienne, on peut établir, en géométrie hyperbolique, des formules liant les côtés et les angles d'un triangle à d'autres grandeurs associées à celui-ci. Par exemple, l'aire d'un triangle, que l'on détermine sur la pseudo-sphère à l'aide du calcul intégral, a une expression remarquable.

Prop. 3 : *L'aire d'un triangle hyperbolique est donnée par la formule* $A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ (*lacune hyperbolique*).

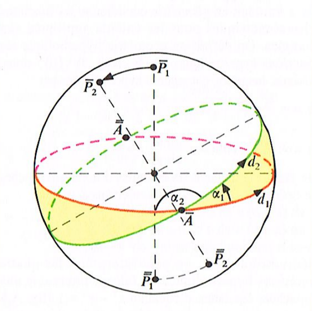


Les points $A = \{\bar{A}, \bar{\bar{A}}\}$ et $B = \{\bar{B}, \bar{\bar{B}}\}$ définissent une droite $d\ (A, B)$ et découpent celle-ci en exactement deux « segments ». Les longueurs des segments sont a, resp. $\pi - a$. Elles coïncident avec les valeurs des angles formés au pôle $P = \{\bar{P}, \bar{\bar{P}}\}$ par les perpendiculaires à $d\ (A, B)$ passant par A et par B.



A

Longueurs de « segments »

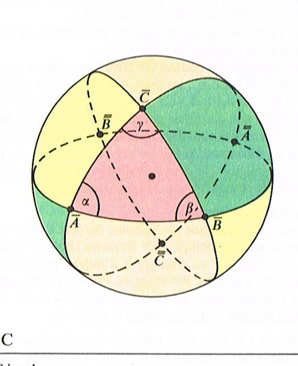


Alors qu'une « droite » ne sépare pas le plan elliptique en deux « régions », à cause de l'identification de deux points antipodaux, deux « droites » distinctes d_1 et d_2 le découpent en deux fuseaux. On associe à ceux-ci resp. les angles α_1 et α_2 au point d'intersection A de d_1 et d_2 $(\alpha_1 + \alpha_2 = \pi)$. Si l'on oriente les deux droites, on détermine par l'intermédiaire de $(\vec{d_1}, \vec{d_2})$ le fuseau balayé par $\vec{d_1}$ lors de la rotation autour de A l'amenant sur $\vec{d_2}$. On conserve le même fuseau si on oriente chacune des deux droites dans le sens opposé.

L'aire du plan elliptique est 2π (sphère unité). On en déduit les aires resp. des deux fuseaux : $2\alpha_1$ et $2\ \alpha_2$

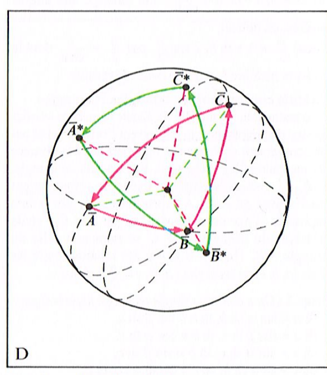
B

Fuseaux



C

Triangle



D

Triangles polaires l'un de l'autre

Modèle de la sphère

À la p. 137, un plan elliptique a été défini comme plan métrique dans lequel il existe des triangles polaires, c.-à-d. des triangles avec trois angles droits (P). De la validité de l'axiome (P), on peut conclure à (¬ R) et (C). Ce résultat peut aller plus loin :

Prop. 1 : *Dans un plan elliptique, deux droites d_1 et d_2 distinctes ont toujours un et un seul point d'intersection P et une et une seule perpendiculaire commune d.*

On appelle P pôle de d et d polaire de P (p. 133). Parmi les différents modèles possibles, on en a donné un particulier en fig. B, p. 136 (*modèle de la sphère*). On peut se ramener à un modèle isomorphe dans le plan $\mathbb{R}^2$ par projection stéréographique de la sphère. Les deux modèles, munis de propriétés supplémentaires, conviennent pour représenter d'autres plans elliptiques. On a l'axiome (A) (p. 147) ainsi qu'un axiome de complétude, à formuler un peu différemment de l'axiome (D) (p. 147), car l'ensemble des « points » d'une « droite » ne peut être muni que d'un ordre cyclique (p. 149). Les considérations suivantes se rapportent au modèle de la sphère et donc à tout modèle isomorphe. Ici, un « point » elliptique est un couple de points diamétralement opposés (fig. A), ce qui est nécessaire pour que deux « points » différents déterminent une « droite » de façon unique. Les « droites » du modèle de la sphère sont les grands cercles, c.-à-d. les cercles dont le centre coïncide avec le centre de la sphère. En géométrie différentielle, on peut montrer que ces grands cercles sont les lignes géodésiques de la sphère. Deux points non diamétralement opposés découpent le grand cercle qu'ils déterminent en deux arcs, le plus petit représentant le plus court chemin possible reliant les deux points sur la sphère. Si l'on identifie deux points diamétralement opposés, les deux « points » déterminent deux « segments » (fig. A). L'un d'eux représente à nouveau le plus court chemin.
Dans le modèle de la sphère, les angles sont mesurés comme en géométrie euclidienne. On utilise les longueurs d'arc sur la sphère unité pour la mesure des segments. Les longueurs des « segments », résultats du découpage de la « droite » d par les « points » A et B, apparaissent aussi comme les mesures des angles formés par les perpendiculaires (PA, PB) à d, issues de P, pôle de d (fig. A). Les longueurs des segments se situent toujours entre 0 et π. Les longueurs des deux « segments » déterminés par A et B sont supplémentaires à π.
Les résultats de l'étude de la géométrie elliptique, sur le modèle de la sphère, sont applicables à la géométrie sphérique avec des points opposés différenciés, si les figures se limitent à une demi-sphère. Cela concerne en particulier les triangles dits d'EULER, dont les côtés et les angles sont plus petits que π, et dont l'étude est fondamentale en géométrie sphérique.

Fuseaux, triangles, aires

Deux « droites » distinctes se coupent toujours et forment ce qu'on appelle deux *fuseaux* (fig. B). Ils sont caractérisés par deux angles α_1 et α_2 au point d'intersection, qui sont supplémentaires à π. Les aires de ces fuseaux sur la sphère unité se calculent facilement; elles valent $A_1 = 2\alpha_1$, resp. $A_2 = 2\alpha_2$.
Puisque deux « points » permettent d'établir deux « segments », trois « points » déterminent quatre triangles elliptiques (fig. C). Soit a, b, c les longueurs des côtés d'un de ces triangles, α, β, γ, les mesures de ses angles : pour les triangles associés, on a les mesures suivantes :

$a, \pi - b, \pi - c, \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$,
resp. $\pi - a, b, \pi - c, \pi - \alpha, \beta, \pi - \gamma$,
resp. $\pi - a, \pi - b, c, \pi - \alpha, \pi - \beta, \gamma$.

L'union d'un triangle associé et du triangle initial forme un fuseau, les quatre triangles formant une demi-sphère. Soit A, resp. A_1, A_2, A_3 les aires correspondantes, on obtient, à partir de

$A + A_1 = 2\alpha$, $\quad A + A_2 = 2\beta$, $\quad A + A_3 = 2\gamma$ et $A + A_1 + A_2 + A_3 = 2\pi$.

Prop. 2 : *L'aire d'un triangle elliptique est donnée par la formule $A = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ (excès sphérique).*

La somme des angles d'un triangle est donc toujours supérieure à π.

Triangles polaires

On peut orienter une « droite » en géométrie elliptique (orientation d'un grand cercle de la sphère). Si l'on considère deux « droites » orientées (axes) $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$, et si l'on amène $\vec{d_1}$ par rotation d'angle α sur $\vec{d_2}$, alors le pôle P_1 de $\vec{d_1}$ décrit par rotation un « segment » de longueur α (fig. B). S'il existe un triangle dont le périmètre est orienté (angles α, β, γ), alors tout axe correspondant à un côté de ce triangle peut, par rotation, se ramener à celui du côté orienté suivant. De cette manière, les pôles définissent un triangle particulier (*triangle polaire*), dont les côtés sont supplémentaires à π avec les angles correspondants du triangle initial. On a :

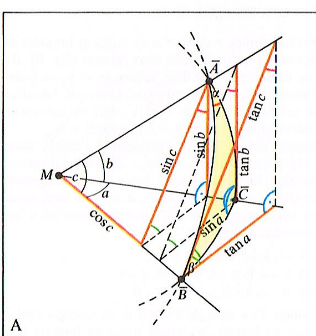
$a' + \alpha = \pi, b' + \beta = \pi, c' + \gamma = \pi$.

Le triangle polaire du triangle polaire est le triangle initial, et :

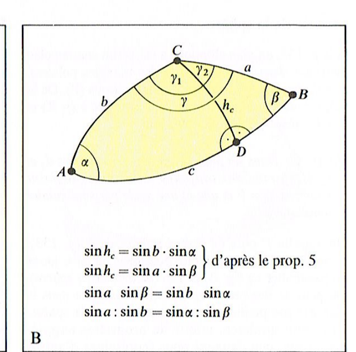
$a + \alpha' = \pi, b + \beta' = \pi, c + \gamma' = \pi$.

Toute proposition sur les angles et les côtés d'un triangle conduit à une proposition duale sur les côtés et les angles du triangle polaire.

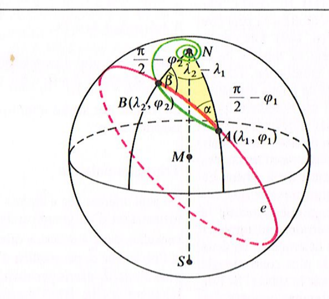
Rem. : Un triangle coïncide avec son triangle polaire si ses côtés et angles ont pour valeur $\frac{\pi}{2}$ (triangle trirectangle, p. 137).



Triangle rectangle



Propriété des sinus



On peut repérer un point sur le globe terrestre par sa longitude λ et sa latitude φ. Pour déterminer la distance sphérique de deux points A (λ_1, φ_1) et B (λ_2, φ_2) on considère le triangle sphérique A, B, N, où N est le pôle nord. La propriété des cosinus des côtés donne :

$$\cos e = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

La longueur de l'arc de grand cercle $\widehat{AB}$ (orthodromie) est :

$$s_1 = r \cdot e.$$

Pour la loxodromie sous l'angle de cap δ, on a la relation entre λ et φ :

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\tan\delta}{\cos\varphi}.$$

Cette équation différentielle admet la solution :

$$\lambda = \tan\delta \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + C.$$

La longueur de l'arc de loxodromie entre A et B est donnée par :

$$s_2 = \frac{r(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos\delta}.$$

C

Orthodromies et loxodromies

Propriété des côtés et des angles dans un triangle elliptique

Dans un triangle elliptique, comme dans le cas euclidien ou hyperbolique, la somme des longueurs de deux côtés est supérieure à la longueur du troisième. Si l'on applique cela au triangle associé dont les côtés sont a, $\pi - b$, $\pi - c$, on a $(\pi - b) + (\pi - c) > a$, soit, $a + b + c < 2\pi$.

Prop. 3 : *La somme des longueurs des côtés d'un triangle elliptique est inférieure à 2π.*

Pour le triangle polaire, on obtient
$0 < (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) < 2\pi$, donc la conclusion de la prop. 2 (p. 187) peut être plus forte :

Prop. 4 : *La somme des angles d'un triangle elliptique est comprise entre π et 3π.*

Calculs concernant un triangle rectangle

Pour les calculs relatifs aux triangles elliptiques, on peut distinguer six types de problèmes, comme dans le cas hyperbolique, qui se ramènent aux calculs concernant les triangles rectangles.

Soit $\gamma = \frac{\pi}{2}$, ce qui n'interdit pas que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\beta = \frac{\pi}{2}$.

En traçant le plan tangent en $\overline{B}$ à la sphère et les plans parallèles passant par $\overline{A}$ et $\overline{C}$, et en construisant le triangle par projection centrale dans ces plans depuis le centre M de la sphère (fig. A), on établit :

Prop. 5 : *Dans un triangle elliptique rectangle, on a les relations :*

$\tan a = \tan\alpha \sin b$, $\quad \tan b = \tan\beta \sin a$,
$\tan a = \cos\beta \tan c$, $\quad \tan b = \cos\alpha \tan c$,
$\sin a = \sin\alpha \sin c$, $\quad \sin b = \sin\beta \sin c$,
$\cos c = \cos a \cos b$, $\quad \cos c = \operatorname{cotan}\alpha \operatorname{cotan}\beta$,
$\cos\alpha = \cos a \sin\beta$, $\quad \cos\beta = \cos b \sin\alpha$.

Ces formules sont des cas particuliers des formules qui suivent. Elles correspondent exactement à celles de la p. 185. Pour les côtés, les fonctions hyperboliques sont remplacées par les fonctions trigonométriques. Si deux ou trois angles sont droits, la prop. 5 entraîne que tout angle a même mesure que son côté opposé.

Calculs concernant des triangles quelconques

Grâce aux calculs relatifs aux triangles rectangles formés en partageant un triangle par une de ses hauteurs, on établit des propriétés pour les triangles elliptiques qui correspondent à celles de la géométrie hyperbolique :

Propriété des sinus

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

Propriété des cosinus des côtés

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$,
$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta$,
$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$.

Propriété des cosinus des angles

$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$,
$\cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos b$,
$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$.

Bien que les propriétés des cosinus des côtés suffisent pour résoudre tout type de problème, on opère en général suivant la méthode donnée p. 185. Dans les cas CCA et CAA, pour lesquels on utilise aussi la proprité des sinus, on peut donner deux solutions.
Pour simplifier les calculs, on introduit, comme dans la géométrie euclidienne, d'autres propriétés, par ex. :

Prop. du demi-angle : (pour le type CCC)

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \,\sin(s-a)}.$$

Prop. du demi-côté : (pour le type AAA)

$$\tan^2\frac{a}{2} = -\frac{\cos\sigma\,\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\,\cos(\sigma-\gamma)}.$$

s représente ici le demi-périmètre, σ la moitié de la somme des angles.

Égalités de Neper : (pour les types CAC et ACA)

$$\tan\frac{a}{2} : \tan\frac{b+c}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2} : \cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

$$\tan\frac{a}{2} : \tan\frac{b-c}{2} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2} : \sin\frac{\beta-\gamma}{2},$$

$$\operatorname{cotan}\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{b+c}{2} : \cos\frac{b-c}{2},$$

$$\operatorname{cotan}\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \sin\frac{b+c}{2} : \sin\frac{b-c}{2}.$$

Pour chacune des égalités mentionnées, il en existe deux autres obtenues par permutation circulaire.
On calcule l'excès sphérique ε, qui représente aussi l'aire, à l'aide de la formule suivante due à L'Huilier, qui correspond à celle de Heron (p. 181) :

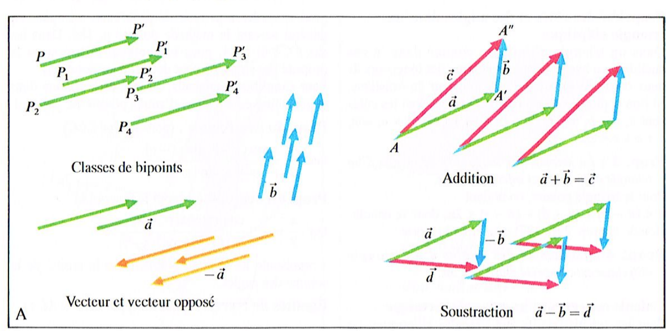
$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\,\tan\frac{s-a}{2}\,\tan\frac{s-b}{2}\,\tan\frac{s-c}{2}}.$$

Simplifications dans un cas limite

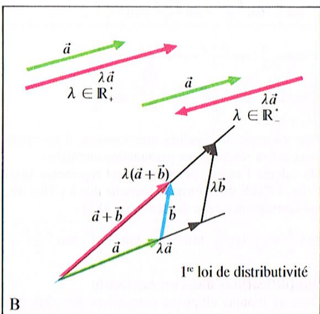
Dans un triangle elliptique comportant des côtés très petits, on peut approcher dans les propriétés ci-dessus, les valeurs des sinus et tangentes des côtés par les longueurs de ceux-ci et le cosinus par 1. Dans ce cas limite, les relations se ramènent à celles de la géométrie euclidienne. Cette remarque est également valable pour les triangles hyperboliques.

Applications

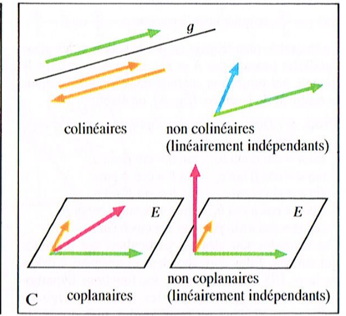
Les propriétés de la géométrie elliptique sont applicables aux problèmes de la sphère sans grandes modifications, même si l'on renonce à l'association des points antipodaux. On peut citer leur usage dans les calculs de distances, de positions, de routes pour les trajets maritimes ou aériens (géographie mathématique). Les grands cercles de la surface de la terre (*orthodromies*, fig. C) jouent un rôle important pour la détermination du plus court chemin entre deux points, mais ont un inconvénient : l'angle de cap du parcours change en général constamment. Les lignes qui coupent les méridiens sous un angle de cap constant (*loxodromies*, fig. C) ne sont plus « rectilignes » au sens de la géométrie elliptique.
D'autres applications interviennent en astronomie de position.



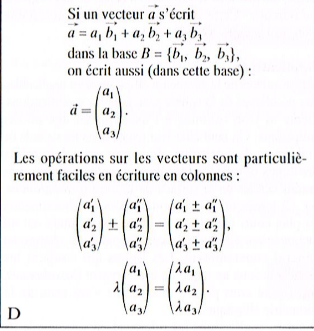
Vecteurs, addition et soustraction de vecteurs



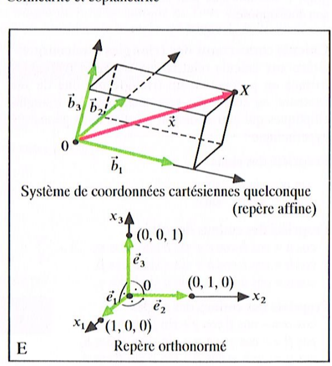
Multiplication par un scalaire



Colinéarité et coplanéarité



Écriture en colonnes



Système de coordonnées, vecteur de position

La géométrie analytique étudie les figures géométriques par des méthodes algébriques. Pour définir un point, elle utilise des nombres réels, ou des éléments d'un autre corps, comme coordonnées. La notion de *vecteur* sert à décrire les positions relatives des points.

Définition d'un vecteur

Elle est présentée dans le cas de l'espace euclidien tridimensionnel. Par vecteur, on entend, comme précédemment p. 151, une classe d'équivalence de couples (P', P'') de points, ou *bipoints*. Un bipoint (P', P'') de la classe définissant un vecteur est un représentant de ce vecteur, P' en est l'origine, P'' l'extrémité. Pour la classe $[\![(P, P')]\!]$ on écrit aussi $\overrightarrow{PP'}$ (fig. A). La classe de tous les bipoints dont l'origine coïncide avec l'extrémité s'appelle le vecteur nul $\vec{0}$. La norme d'un vecteur $\vec{a}$ est la longueur du segment commun à tous ses représentants. On la note $|\vec{a}|$ ou parfois a.

Addition et soustraction

On introduit une opération interne dans l'ensemble des vecteurs, nommée addition. Pour définir $\vec{a}+\vec{b}$, on choisit un représentant (A, A') de $\vec{a}$ et (A', A'') de $\vec{b}$. On pose $\vec{a}+\vec{b} := \overrightarrow{AA''}$, résultat indépendant du choix de A (fig. A). On remarque que l'ensemble de tous les vecteurs forme relativement à cette opération un groupe commutatif. L'élément neutre est le vecteur nul. L'élément inverse d'un vecteur $\overrightarrow{PP'}$, appelé *vecteur opposé*, est le vecteur $\overrightarrow{P'P}$.
Le vecteur opposé de $\vec{a}$ est désigné par $-\vec{a}$. On introduit donc la *soustraction* par $\vec{a}-\vec{b} := \vec{a}+(-\vec{b})$.

Multiplication par un scalaire

À partir du groupe additif des vecteurs, on définit une opération externe, dans le sens de la déf. 14 de la p. 41, avec $\Omega = \mathbb{R}$ comme corps des scalaires.
$\lambda\vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda\vec{0} = \vec{0}$), est un vecteur, vérifiant $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$, ses représentants sont parallèles à ceux de $\vec{a}$. Ils ont même sens si $\lambda > 0$, des sens opposés si $\lambda < 0$ (fig. B). Si $\lambda = 0$, alors $\lambda\vec{a} = \vec{0}$. On a alors toutes les propriétés d'un Ω-module. En particulier, on a pour tout couple de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et tout couple de réels λ et μ :
$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, première loi de distributivité (fig. B),
$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, deuxième loi de distributivité,
$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$, « loi d'associativité ».
$\mathbb{R}$ étant un corps, l'ensemble de tous les vecteurs est donc un espace vectoriel (déf. 16 p. 41). On le représente par V^3. Dans le plan, on le notera V^2.
Le vecteur unité $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ dans les directions et sens du vecteur $\vec{a}$ est parfois désigné par $\vec{a}^{\,\circ}$.

Dépendance et indépendance linéaire

Des vecteurs sont dits *colinéaires* s'il existe une droite à laquelle leurs représentants sont parallèles (fig. C). Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
Pour deux vecteurs colinéaires, $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$, il existe au moins un vecteur qui est un multiple de l'autre. Cette propriété est équivalente au fait qu'il existe des réels λ_1 et λ_2, avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, tels que le vecteur nul soit une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sous la forme $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 = \vec{0}$. Une généralisation de la colinéarité est donnée par la « coplanéarité ». Des vecteurs sont dits coplanaires s'il existe un plan, auquel leurs représentants sont parallèles (fig. C). Deux vecteurs sont toujours coplanaires, le vecteur nul est coplanaire à tout couple de vecteurs.
Soient trois vecteurs coplanaires $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: alors l'un au moins est combinaison linéaire des deux autres. La « coplanéarité » est donc équivalente à la formulation : il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$, tels que
$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{0}$. Pour des vecteurs non coplanaires, l'égalité n'est vérifiée que pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La colinéarité et la « coplanéarité » sont des cas particuliers de dépendance linéaire (p. 87). n vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sont dit *linéairement dépendants* s'il existe n réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{a}_i = \vec{0}$;
sinon, on les dit *linéairement indépendants*. Dans V^3, quatre vecteurs sont toujours linéairement dépendants.
Soit $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ une base (déf. 8, p. 87) de V^3 : alors tout vecteur $\vec{a}$ a une écriture unique comme combinaison linéaire $\vec{a} = a_1\vec{b}_1 + a_2\vec{b}_2 + a_3\vec{b}_3$.
Les termes $a_i\vec{b}_i$ sont appelés composantes, les coefficients a_i coordonnées du vecteur dans cette base.
On utilise souvent la notation pratique en colonne
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Pour les calculs en colonne, voir tab. D.

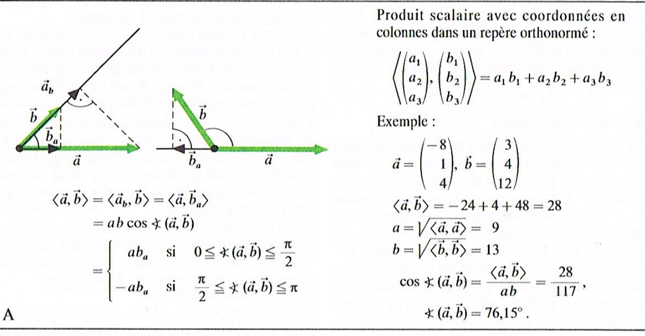
L'espace de points $\mathbb{R}^3$

Un couple (O, B) composé d'un point O de l'espace (origine) et d'une base B est appelé repère (fig. E). Par l'application bijective $f : \{O\} \times \mathbb{R}^3 \to V^3$ définie par

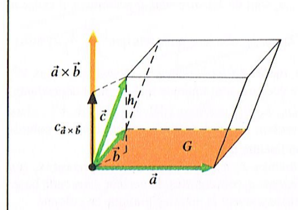
$$(O, X(x_1, x_2, x_3)) \mapsto \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

on associe à chaque point $X \in \mathbb{R}^3$ un *vecteur de position* $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$.
Il existe des repères particuliers dits *orthonormés* (r.o.n.) (fig. E). Les vecteurs de base doivent vérifier :
(1) $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, (2) $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ pour $i \neq j$,
On dit que deux bases B et B' de V^3 sont en relation $\mathfrak{R}$ si $\det B'/B$ (pp. 89,91) est > 0. $\mathfrak{R}$ est une rel. d'équivalence à deux classes C et C'. On convient que l'une est celle des *bases directes*, par ex. C, C', celle des *bases indirectes*. V^3 est dit alors orienté par C.

(3) Un *repère orthonormé direct* (r.o.n.d.) a sa base dans C. (En physique, C est déterminée par la règle des trois doigts.)



Produit scalaire



Dans un repère orthonormé direct ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) on obtient le produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$, avec les colonnes coordonnées, par le développement suivant d'un déterminant formel :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$, le trièdre ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$) est direct, $|\vec{a} \times \vec{b}| = G$. Le volume du parallélépipède est égal à

$$|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle| = |\vec{a} \times \vec{b}|\, c_{\vec{a}\times\vec{b}} = hG.$$

B

Produit vectoriel et produit mixte

Outre la multiplication par un scalaire, on peut mentionner d'autres types de multiplication pour le calcul vectoriel.

Produit scalaire

Déf. : L'application $\langle , \rangle : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ déf. par

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \begin{cases} 0 \text{ pour } \vec{a} = \vec{0} \\ \quad \text{ou } \vec{b} = \vec{0} \\ ab\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \text{ pour } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{b} \neq \vec{0}, \end{cases}$$

associe à tout couple ($\vec{a}, \vec{b}$) de vecteurs un nombre réel que l'on nomme *produit scalaire* de $\vec{a}$ par $\vec{b}$ (suite p. 193).

Une restriction au plan est possible et même assez souvent utile.

On désigne par $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ la mesure d'angle géométrique, c'est-à-dire que l'on a $0 \leqslant \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant \pi$.

Au lieu de $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, on écrit aussi $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Les produits $a \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, resp. $b \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, peuvent être interprétés géométriquement à l'aide des projections de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ (vecteur $\vec{a}_b$), resp. de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$ (vecteur $\vec{b}_a$) pour a et b non orthogonaux (ill. A).

On a alors :

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}_a \rangle = \pm ab_a$,

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}_b, \vec{b} \rangle = \pm a_b b$.

Propriétés : (pour tous $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in V^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$)

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ *loi de commutativité*

$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ *loi de distributivité*

$\lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle$ *loi d'associativité mixte.*

Conséquences et applications : $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ est vérifiée si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux ou si l'un des deux vecteurs est le vecteur nul. On dit de toute façon que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Pour les vecteurs de base d'un repère orthonormé, on a :

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 0, \text{ si } i \neq j \\ 1, \text{ si } i = j \end{cases}$$

Dans le cas d'un r.o.n., les produits scalaires se calculent facilement avec la notation en colonnes :

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Une condition pour que deux vecteurs soient orthogonaux s'écrit alors très simplement.

De la déf. du produit scalaire résulte $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a^2$. La norme d'un vecteur $\vec{a}$ est :

$$a = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \text{ dans un r.o.n.}$$

De même la distance de $P(x_1, x_2, x_3)$ à $Q(y_1, y_2, y_3)$ est

$$PQ = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}\ .$$

On peut aussi calculer l'angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$. La déf. donne

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{ab}, \ \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi] \text{ (ex. ill. A).}$$

Produit vectoriel

Cette notion suppose V^3 orienté.

Déf. : L'application $\times : V^3 \times V^3 \to V^3$, définie par

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \times \vec{b} := \begin{cases} \vec{0} \text{ si } \vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ liés} \\ \vec{v} \text{ si } \vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ ind.} \end{cases} \text{ avec}$$

$v = ab \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, où $\vec{v} \perp \vec{a}$

$\vec{v} \perp \vec{b}$ et ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$) formant une base directe, associe à tout couple ($\vec{a}, \vec{b}$) de vecteurs un vecteur que l'on appelle *produit vectoriel* de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Le produit vectoriel est une opération interne à V^3 dans le sens de la déf. 1, p. 39. Il y a donc possibilité d'avoir plusieurs facteurs, ce qui n'était pas le cas du produit scalaire. La norme du produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (fig. B).

Propriétés : (pour tous $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in V^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$)

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ *loi d'anticommutativité,*

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ *loi de distributivité,*

$\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ *loi d'associativité mixte.*

Il n'y a pas d'associativité pour le produit vectoriel de trois vecteurs.

Conséquences et applications : Le produit vectoriel peut s'utiliser pour la détermination de mesure d'angles ou d'aires. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ est vérifiée si, et seulement si, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires. En particulier, on a $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ pour tout vecteur $\vec{a}$. Pour les vecteurs de base d'un repère orthonormé direct, on a $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ et $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$. On en déduit une méthode de calcul simple pour une représentation des vecteurs en colonnes dans un r.o.n.d.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

L'ill. B montre le produit vectoriel sous forme de colonne.

Produit mixte

Déf. : Le produit scalaire $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$ est appelé produit *mixte* des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Il suppose V^3 orienté.

La valeur absolue du produit mixte représente le volume du parallélépipède s'appuyant sur les vecteurs le composant (ill. B).

Propriétés : Pour tout $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in V^3$, le produit mixte change de signe lors de la permutation de deux vecteurs.

$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$ *permutation des opérations,*

$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c} \times \vec{a}, \vec{b} \rangle$ *permutation circulaire.*

Conséquences et applications : $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ est vérifiée si, et seulement si, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont coplanaires.

Avec l'écriture des vecteurs en colonnes, on peut calculer un produit mixte comme un déterminant (r.o.n.d.) :

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Autres relations sur les produits

D'autres relations font intervenir toutes les formes de produits, par ex. :

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}, \vec{c}) \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$

(loi de développement de Grassmann)

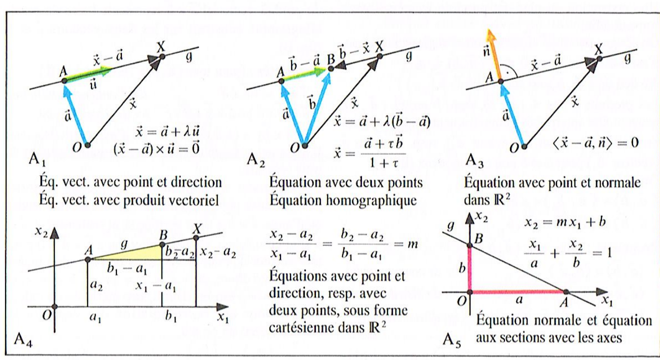
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{d} \rangle \vec{c} - \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{d}$

$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$

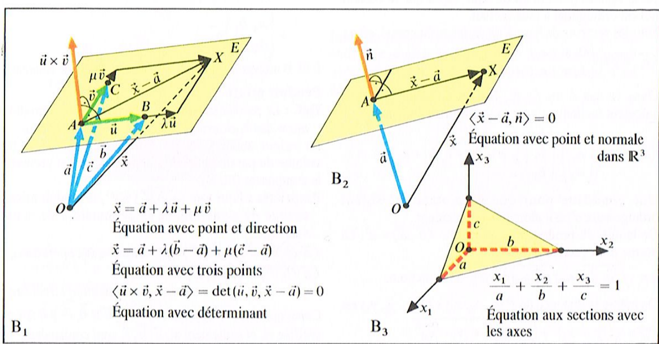
(formules de Lagrange)

et comme cas particulier de la dernière formule :

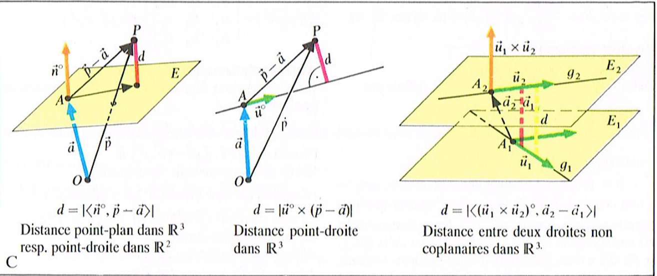
$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{l} \rangle = a^2 b^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$.



Équations de droites



Équations de plans



Calcul de distances dans ℝ³

Représentation d'une droite

Déterminer une équation de courbe ou de surface consiste, à partir d'un point de référence O, à trouver une relation caractérisant les vecteurs de position des points constituant l'ensemble étudié, ou, de manière équivalente, à former, à partir d'un repère donné, une relation portant sur les coordonnées de ses points.

Pour une droite, plusieurs possibilités peuvent s'offrir. Si elle est définie à partir d'un point A de vecteur de position $\vec{a}$ et d'une direction donnée par le vecteur $\vec{u}$, on a une équation de la forme :

$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\,\vec{u}$ (*équation vectorielle avec point et direction*).

Le paramètre λ parcourt l'ensemble des réels.

Si la droite est définie par deux points A et B de vecteurs de position $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, le vecteur directeur de la droite est $\vec{b} - \vec{a}$, et l'on a (fig. A_2) :

$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\,(\vec{b} - \vec{a})$ (*équation vectorielle avec deux points*).

Les deux formes d'équation sont valables dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$.

On peut aussi choisir comme paramètre le rapport τ, dans lequel le point X partage le segment AB.

À partir de $\vec{x} - \vec{a} = \tau\,(\vec{b} - \vec{x})$, on a (fig. A_2) :

$\vec{x} = \dfrac{\vec{a} + \tau\vec{b}}{1 + \tau}$ (*équation homographique*)

On obtient pour $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ tous les points de la droite, sauf B.

Étant donné que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{x} - \vec{a}$ sont colinéaires, on peut utiliser l'équation suivante dans $\mathbb{R}^3$ (fig. A_1) :

$\vec{u} \times (\vec{x} - \vec{a}) = \vec{0}$ (*équation avec produit vectoriel*)

On peut définir une droite dans $\mathbb{R}^2$ par un point et un vecteur orthogonal $\vec{n}$ (*vecteur normal*) à cette droite. On a alors (fig. 3) :

$\langle \vec{n}, \vec{x} - \vec{a} \rangle = 0$ (*équation avec point et normale*).

Cette équation est de la forme :

$\alpha x_1 + \beta x_2 + \delta = 0$, équ. la plus générale d'une droite $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$

Les équations vectorielles se ramènent à des systèmes d'équations portant sur les coordonnées. On peut, dans $\mathbb{R}^2$, éliminer le paramètre des équations paramétriques. Des équations importantes portant sur les coordonnées (équations cartésiennes) dans $\mathbb{R}^2$, sans paramètre, sont à signaler (fig. A_4, A_5) :

$\dfrac{x_2 - a_2}{x_1 - a_1} = m$ (*équation avec point et direction non parallèle à Ox_2*).

$\dfrac{x_2 - a_2}{x_1 - a_1} = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ (*équation avec deux points*).

$x_2 = m\,x_1 + b$ (*équation normale*).

$\dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b} = 1$ (*équation avec sections avec les axes*).

m désigne la pente de la droite, a et b repèrent les intersections avec les axes Ox_1, resp. Ox_2.

Représentation d'un plan

Un plan peut être défini par un point A et deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a (fig. B_1) :

$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ (*équation vectorielle avec point et direction*).

Les paramètres λ et μ décrivent de façon indépendante l'ensemble des réels.

Si on donne trois points non alignés, on peut déterminer une équation vectorielle du plan associé (fig B_1) :

$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\,(\vec{c} - \vec{a}) + \mu\,(\vec{b} - \vec{a})$ (*équation vectorielle avec trois points*).

Avec $\vec{n}$ comme vecteur normal on a (fig. B_2) :

$\langle \vec{n}, \vec{x} - \vec{a} \rangle = 0$ (*équation avec point et normale*).

Si on prend comme vecteur normal le produit vectoriel $\vec{u} \times \vec{v}$ des vecteurs de direction, on obtient (fig. B_1) :

$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{x} - \vec{a} \rangle = 0$ (*équation avec déterminant*).

Après développement du déterminant, on obtient une équation affine en les coordonnées x_1, x_2, x_3. Toute équation de cette forme ($\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0$, avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$) est une équation de plan dans l'espace. Une expression particulière donne les coordonnées a, b, c des intersections avec les axes (fig. B_3) :

$\dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b} + \dfrac{x_3}{c} = 1$ (*équation aux sections avec les axes*)

Étude d'intersections

Deux droites d'équations vectorielles

$\vec{x} = \vec{a}_1 + \lambda_1\,\vec{u}_1$ et $\vec{x} = \vec{a}_2 + \lambda_2\,\vec{u}_2$

sont *parallèles* si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires. Elles sont *confondues* si $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ sont colinéaires.

Des droites non parallèles se coupent si le système d'équations de coordonnées $\vec{a}_1 + \lambda_1\,\vec{u}_1 = \vec{a}_2 + \lambda_2\,\vec{u}_2$ admet un couple solution (λ_1, λ_2), sinon on dit que les droites sont *non coplanaires*.

Deux plans d'équations

$\vec{x} = \vec{a}_1 + \lambda_1\,\vec{u}_1 + \mu_1\,\vec{v}_1$ et $\vec{x} = \vec{a}_2 + \lambda_2\,\vec{u}_2 + \mu_2\,\vec{v}_2$

sont *parallèles* si $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}_2$ sont coplanaires. Ils sont *confondus* si $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}_2$, $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ sont coplanaires.

Deux plans non parallèles possèdent toujours une *droite d'intersection* commune. Pour déterminer son équation vectorielle, on peut par ex. déterminer ses points d'intersection avec deux plans de coordonnées ou deux plans parallèles à un même plan de coordonnées.

L'étude du parallélisme ou de l'intersection d'une droite et d'un plan se fait également sans difficulté.

Calcul de distances

On calcule la distance d'un point P à une droite dans $\mathbb{R}^2$, resp. à un plan dans $\mathbb{R}^3$, en utilisant en r.o.n. l'équation de la droite, resp. du plan, avec point et normale, la direction de cette dernière étant définie par un vecteur $\vec{n}^\circ$:

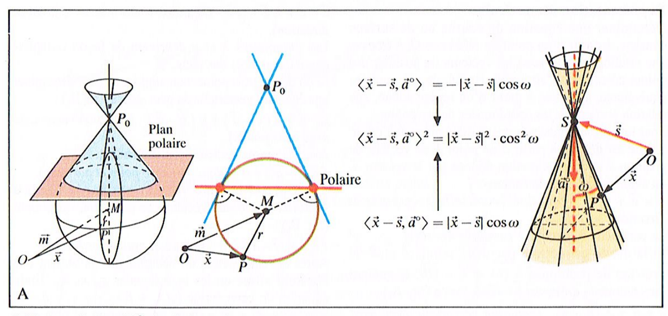
$\langle \vec{n}^\circ, \vec{x} - \vec{a} \rangle = 0$ (Forme de HESSE).

Si P est repéré par $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, sa dist. à la droite, resp. au plan, est $d = |\langle \vec{n}^\circ, \vec{p} - \vec{a} \rangle|$.

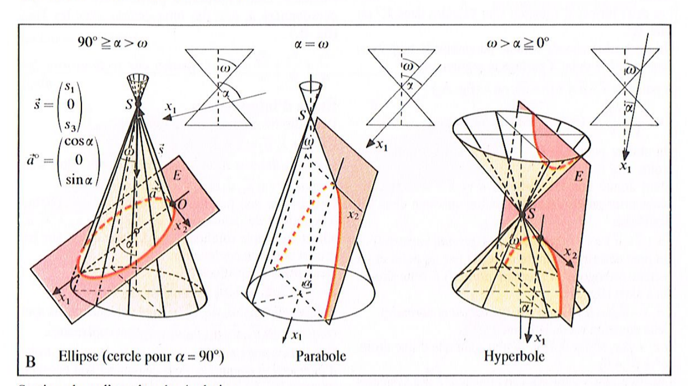
Dans $\mathbb{R}^3$ la dist. de P à une droite D passant par A ($\vec{a} = \overrightarrow{OA}$) est, commodément, $d = |\,\vec{u}^\circ \times (\vec{p} - \vec{a})\,|$, où $\vec{u}^\circ$ est un vecteur unitaire dirigeant D ($P \in D \Leftrightarrow d = 0$, éq. avec produit vect.).

La distance, dans $\mathbb{R}^3$, de deux droites non coplanaires $\vec{x} = \vec{a}_1 + \lambda_1\,\vec{u}_1$, $\vec{x} = \vec{a}_2 + \lambda_2\,\vec{u}_2$, est donnée par

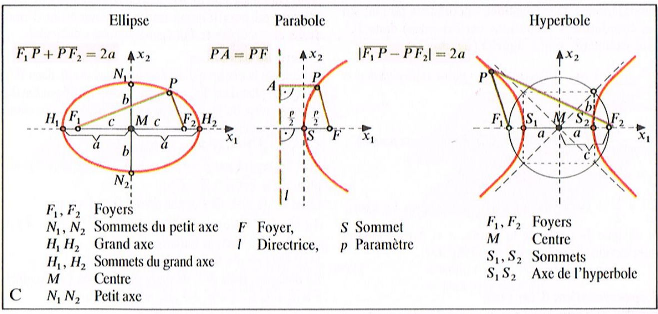
$d = \left|\left\langle (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)^\circ, (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \right\rangle\right|$.



Sphère, cercle dans $\mathbb{R}^2$, demi-cône, cône



Section plane d'un cône de révolution
(Plan $SO\,x_1$ = plan contenant l'axe du cône et la perpendiculaire issue de S au plan de section)



Ellipse, parabole, hyperbole

Sphère et cercle
L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ (de $\mathbb{R}^2$) qui sont situés à une même distance r ($r \in \mathbb{R}_+^*$) d'un point central M est une sphère (un cercle dans $\mathbb{R}^2$). L'éq. en est $|\vec{x}-\vec{m}| = r$. Dans un r.o.n. on a donc pour la sphère $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2 = r^2$, et pour le cercle $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2 = r^2$.

Tangentes à la sphère et au cercle, plan tangent
Une droite qui a un point commun et un seul avec une sphère, resp. un cercle, s'appelle une *tangente*, le point commun étant dit *point de contact*. Pour une sphère l'ensemble des points de toutes les tangentes qui ont même point de contact forme un plan : c'est le *plan tangent*. Toute tangente à une sphère ou à un cercle est perpendiculaire au rayon du point de contact, c'est-à-dire au segment joignant celui-ci au centre M ; d'où l'équation vectorielle du plan tangent (de la tangente pour le cercle) : $\langle \vec{x}-\vec{m}, \vec{b}-\vec{m} \rangle = r^2$, où $\vec{b}$ désigne le vecteur représentatif du point de contact.

Plan polaire, polaire
L'ens. des tangentes que l'on peut mener à une sphère d'un point extérieur à celle-ci P_0 (appelé *pôle*) est un cône (fig. A). L'ens. des points de contact est un cercle dont le plan s'appelle *plan polaire* de P_0 (fig. A). Dans le cas d'un cercle dans $\mathbb{R}^2$, on peut lui mener, d'un point extérieur P_0, deux tangentes distinctes dont les points de contact définissent la (droite) *polaire* de pôle P_0. On en déduit l'éq. vect. du plan polaire, resp. de la polaire : $\langle \vec{x}-\vec{m}, \vec{p_0}-\vec{m} \rangle = r^2$.

Demi-cône, cône (de révolution)
Les points d'un demi-cône de révolution, défini par son sommet S, son vecteur axial unitaire $\vec{a_0}$ et son angle d'ouverture 2ω, peuvent être représentés par l'équation vectorielle (fig. A) : $\langle \vec{x}-\vec{s}, \vec{a_0} \rangle = |\vec{x}-\vec{s}| \cos\omega$.
Pour le cône, extension du demi-cône, on écrira :

$$\langle \vec{x}-\vec{s}, \vec{a_0} \rangle^2 = \langle \vec{x}-\vec{s}, \vec{x}-\vec{s} \rangle \cos^2\omega \,.\ (\vec{a_0} = \vec{a}^{\circ}.)$$

Section d'un cône (de révolution) par un plan
En dehors de certains cas particuliers (point, droite ou paire de droites sécantes), l'intersection d'un cône de révolution par un plan est soit une ellipse (voire un cercle), soit une parabole, soit une hyperbole (fig. B). La justification analytique demande le choix d'un r.o.n. bien adapté (fig. B). L'éq. du plan de section se traduisant par $x_3 = 0$, celle de l'intersection apparaît sous la forme, dans le plan des coord. x_1, x_2 :
$(1-\varepsilon^2)\,x_1^2 - 2\,px_1 + x_2^2 = 0$ où l'*excentricité* ε vaut $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\omega}$, et le paramètre $p : |\vec{s}|\,(\varepsilon - \cos(\alpha+\omega))$.
L'intersection est symétrique par rapport à l'axe des x_1 et contient l'origine du repère.
L'écriture $x_2^2 = 2px_1 - (1-\varepsilon^2)\,x_1^2$ est dite équation canonique de la section conique. Pour $s = 0$, on trouve les cas d'exception cités plus haut (le plan sécant passe par S). Dans la suite on suppose $s \neq 0$.

I. $90° \geq \alpha > \omega$ ou $\omega > \alpha \geq 0°$
Sous ces hypothèses l'axe des x_1 coupe le cône non seulement à l'origine des coord., mais encore au point $A\left(\dfrac{2p}{1-\varepsilon^2}, 0, 0\right)$ puisque ε est différent de 1. Si l'on transfère le rep. de telle sorte que le milieu $M\left(\dfrac{p}{1-\varepsilon^2}, 0, 0\right)$ du segment OA devienne l'origine,

on obtient l'éq. cart. $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1$, où $a := \left|\dfrac{p}{1-\varepsilon^2}\right|$.
$1-\varepsilon^2$ est > 0 pour $90° \geq \alpha > \omega$, et est < 0 pour $\omega > \alpha \geq 0°$. En posant $b := a\sqrt{|1-\varepsilon^2|}$, on a :

(1) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$, $(90° \geq \alpha > \omega)$ (2) $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$ $(\omega > \alpha \geq 0°)$

L'ens. des points corresp. à (1) s'appelle *ellipse*, celui corresp. à (2) *hyperbole*. Si dans (1) $a = b$ ($\alpha = 90°$) on a un cercle (ellipse particulière).

II. $\alpha = \omega$
alors $\varepsilon = 1$ et l'éq. se réduit à $x_2^2 - 2px_1 = 0$. (3)
L'ensemble des points associés s'appelle *parabole*.

Ellipse, parabole, hyperbole
sont également des courbes que l'on peut caractériser par des propriétés ponctuelles.
a) Soit F_1 et F_2 deux points distincts tels que $|\overrightarrow{F_1F_2}| = 2c$ et $a > 0$. Pour $a > c$, l'ensemble des points P tels que $|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$ est une ellipse ; pour $a < c$, l'ensemble des points P tels que $\left||\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}|\right| = 2a$ est une hyperbole (figure C).
b) Soit F et l resp. un point et une droite fixes dont la dist. est $p > 0$: l'ens. des points équidistants de F et l est une parabole de paramètre p (fig. C).
Rem. : Plus généralement l'ensemble des points, dont le rapport des distances respectives à F et l est une constante $\varepsilon > 0$, est une conique d'excentricité ε.
Tangentes à ces trois courbes : si l'on reprend le repère de la figure C et donc les équations (1), (2), (3) précédentes, alors celles des tangentes au point courant $A(a_1, a_2)$ s'écrivent
pour l'ellipse (1T) $\dfrac{x_1 a_1}{a^2} + \dfrac{x_2 a_2}{b^2} - 1 = 0$,
pour l'hyperbole (2T) $\dfrac{x_1 a_1}{a^2} - \dfrac{x_2 a_2}{b^2} - 1 = 0$,
pour la parabole (3T) $x_2 a_2 - p(x_1 + a_1) = 0$.

Éq. gén. du second degré en deux coordonnées
C'est ainsi qu'on désigne l'équation de la forme
$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_1x_2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0$
($A, \ldots, F \in \mathbb{R}$; A, B, C non tous nuls).
Les équations des sections coniques précédentes en sont des cas particuliers. Dans l'autre sens l'équation générale ne représente que des sections coniques, mais avec tous les cas exceptionnels comprenant en plus l'ensemble vide et deux droites parallèles, et ce dans toutes les positions possibles. En présentant l'équation générale sous la forme :
$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2\,(a_{01}x_1 + a_{02}x_2) + a_{00} = 0$,
avec $a_{ik} \in \mathbb{R}$, on en déduit l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{01} a_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_{00} = 0,$$

où la matrice carrée 2×2 n'est pas nulle. On peut traiter cette éq. de la même manière qu'une éq. de quadrique (p. 201). Les configurations obtenues s'identifient à celles qu'on observe en coupant par les plans de coord. les surfaces de la p. 202.

Soit un déplacement (1) $\vec{x}^* = C\vec{x} + \vec{c}$ (${}^tCC = Id$; $\det C = +1$).

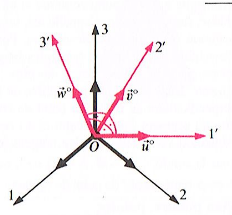
La transformation vectorielle associée $\vec{v}^* = C\vec{v}$ possède un sous-espace de vecteurs invariants non réduit à $\{\vec{0}\}$. On détermine un vecteur unitaire $\vec{u}^\circ$ de ce sous-espace. On construit ensuite un vecteur $\vec{v}^\circ$, également unitaire, orthogonal à $\vec{u}^\circ$. En posant $\vec{w}^\circ = \vec{u}^\circ \times \vec{v}^\circ$, on dispose d'une base orthonormée directe $\vec{u}^\circ, \vec{v}^\circ, \vec{w}^\circ$. Sa matrice $S := (\vec{u}^\circ, \vec{v}^\circ, \vec{w}^\circ)$ est orthogonale de det + 1.

Par changement de coordonnées, $\vec{x} = S\vec{x}'$, l'origine restant inchangée, le déplacement s'écrit :
(2) $\vec{x}'^* = C'\vec{x}' + {}^tS\vec{c}$, avec $C' = {}^tSCS$.

La matrice C' est orthogonale, de det + 1 et $\vec{u}^\circ = C'\vec{u}^\circ$. D'où

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ avec } \varphi \in [0, 2\pi[. \text{ Alors}$$

$$(2\text{ a})\quad \vec{x}'^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \vec{x}' + \begin{pmatrix} \langle \vec{u}^\circ, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{v}^\circ, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{w}^\circ, \vec{c} \rangle \end{pmatrix}.$$



I) φ = 0. Alors $C' = C = Id$. On a une **translation** de vecteur $\vec{c}$ (l'identité si $\vec{c} = \vec{0}$).

II) $0 < \varphi < 2\pi$. L'écriture (2 a) montre qu'il existe un point fixe si et seulement si $\langle \vec{u}^\circ, \vec{c} \rangle = 0$.

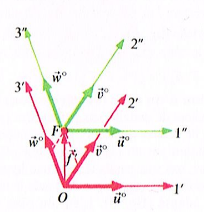
II a) $\langle \vec{u}^\circ, \vec{c} \rangle = 0$. Le plan $(O, \vec{v}^\circ, \vec{w}^\circ)$ contient un point fixe unique F.

Un calcul montre qu'il est défini dans le repère $(O, \vec{u}^\circ, \vec{v}^\circ, \vec{w}^\circ)$

$$\text{par la colonne } \vec{f}' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\operatorname{cotan}\frac{\varphi}{2} \\ 0 & \operatorname{cotan}\frac{\varphi}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \vec{v}^\circ, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{w}^\circ, \vec{c} \rangle \end{pmatrix}.$$

Dans le repère $(F, \vec{u}^\circ, \vec{v}^\circ, \vec{w}^\circ)$ le déplacement s'écrit
(3) $\vec{x}''^* = C'\vec{x}''$.

C'est une **rotation** d'angle φ autour de l'axe $(F, \vec{u}^\circ)$.



II b) $\langle \vec{u}^\circ, \vec{c} \rangle \neq 0$. En écrivant (2 a) sous la forme :

$$\vec{x}'^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \vec{x}' + \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \vec{v}^\circ, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{w}^\circ, \vec{c} \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \vec{u}^\circ, \vec{c} \rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on peut considérer le déplacement comme la composition de la rotation d'angle φ autour de l'axe $(F, \vec{u}^\circ)$ précédemment rencontrée par la translation de vecteur $\langle \vec{u}^\circ, \vec{c} \rangle \vec{u}^\circ$ (parallèle à l'axe de la rotation). Cette composition est commutative et porte le nom de **vissage**.

Endomorphisme

On appelle endomorphisme toute application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même. Un endomorphisme est parfaitement déterminé par l'image d'une base. En particulier si $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ est une base de V^3, un endomorphisme f de V^3 est connu dès que les images respectives $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3$ de $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ sont précisées : Si $x = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3$,

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{b}_1) + x_2 f(\vec{b}_2) + x_3 f(\vec{b}_3) = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{b}'_1$$

Soit $\vec{x}' = f(\vec{x}) = x'_1\vec{b}_1 + x'_2\vec{b}_2 + x'_3\vec{b}_3$ et A la matrice 3×3, (a_{ij}), dont les colonnes ont pour éléments les coordonnées des vecteurs $\vec{b}_j$ dans B ; on a la relation $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ou en abrégé $\vec{x'} = A\vec{x}$. Si A est inversible, c'est-à-dire si les vecteurs $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3$, forment une base, f est un isomorphisme de V^3 sur lui-même (condition nécessaire et suffisante).

Application affine dans $\mathbb{R}^3$

On entend par là toute application g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par l'écriture matricielle $\vec{x'} = A\vec{x} + \vec{c}$, où A est une matrice réelle 3×3 et $\vec{c}$ un vecteur-colonne fixe ; en désignant par M et M' les points définis respectivement par $\vec{x}$ et $\vec{x}'$, O et O' ceux définis par $\vec{O}$ et $\vec{c}$, on voit donc que $\overrightarrow{O'M'} = A\,\overrightarrow{OM}$. Plus généralement si $M'_0 = g(M_0)$, on a $\overrightarrow{M'_0M'} = A\overrightarrow{M_0M}$. En définitive une application affine g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est définie par l'image d'un point et un endomorphisme $f : \overrightarrow{g(M_0)\,g(M)} = f(\overrightarrow{M_0M})$: l'application $g \mapsto f$ est un homomorphisme pour la loi de composition.

Propriétés d'une application affine

Si l'on se donne d'une part quatre points non coplanaires P_0, P_1, P_2, P_3, et d'autre part quatre points quelconques P'_0, P'_1, P'_2, P'_3, il existe une et une seule application affine g, telle que $g(P_i) = P'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. En effet on connaît $P'_0 = g(P_0)$ et les images des trois vecteurs indépendants $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}$ sous l'endomorphisme associé. Toute application affine peut être définie de cette façon.
Toute application affine g conserve le parallélisme et le rapport de deux bipoints parallèles.
Si A est régulière, g définit une bijection de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même : g transforme toute droite en droite, tout plan en plan. Si A n'est pas régulière $(\det(A) = 0)$, g est dite singulière : elle n'est ni injective, ni surjective. Une droite peut aussi bien se transformer en droite qu'en point. Un plan peut devenir un plan, une droite, un point.

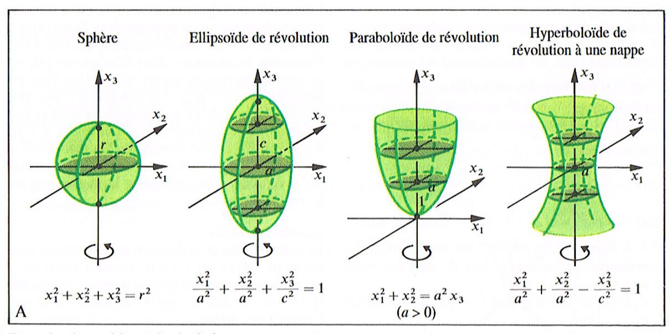
L'ensemble des bijections affines ($\det(A) \neq 0$) a une structure de groupe : c'est le groupe affine. Si $|\det(A)| = 1$ le volume de tout parallélépipède est conservé. L'ensemble des bijections affines telles que $|\det(A)| = 1$ est un sous-groupe du groupe affine. Une bijection affine telle que $A = Id$ est une translation. L'ensemble des translations est un sous-groupe du sous-groupe précédent. Une bijection affine telle que $A = \lambda\, Id$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, est une homothétie. Les translations et les homothéties transforment toute droite en une droite parallèle. Elles constituent le sous-groupe des homothéties-translations.

Isométries affines

La conservation de la distance euclidienne de deux points (p. 193) n'est pas une propriété commune à toutes les applications affines. Si le repère cartésien de référence est orthonormé, la condition pour que l'application affine $g : \vec{x}' = C\vec{x} + \vec{c}'$ conserve la distance de deux points est que ${}^tCC = Id$, c'est-à-dire que C soit orthogonale (p. 168). Lorsque cette condition est remplie, l'endomorphisme de V^3, $\vec{x}' = C\vec{x}$ conserve le produit scalaire ; g prend le nom d'isométrie affine. Comme $\det({}^tC) = \det(C)$, on a $(\det(C))^2 = 1$ (p. 91), donc $\det(C) = \pm 1$; si $\det(C) = +1$, on dit que g est un déplacement ; dans le cas contraire, $\det(C) = -1$, g est un antidéplacement.

Changement de repère

Un repère est un couple (O, B) où O désigne un point de $\mathbb{R}^3$ origine et $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ une base de V^3 (p. 191).
Un point P de $\mathbb{R}^3$ est défini par son vecteur de position $\vec{x}$: $\overrightarrow{OP} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3$; x_1, x_2, x_3, sont les coordonnées de P dans le repère (O, B). Si l'on choisit un nouveau repère (O', B'), on écrira
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, avec $\overrightarrow{O'P} = x'_1\vec{b}'_1 + x'_2\vec{b}'_2 + x'_2\vec{b}'_2$.
Si l'on connaît les coordonnées c_i de O' dans le repère (O, B) et les expressions des vecteurs $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3$, de la nouvelle base B' par rapport à l'ancienne, on peut calculer les anciennes coordonnées de P en fonction des nouvelles. On obtient une relation de la forme $\vec{x} = L\vec{x}' + \vec{c}$, où L est une matrice 3×3 régulière dont les colonnes successives définissent $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3$ par rapport à B, les vecteurs $\vec{x}, \vec{x}', \vec{c}$, symbolisant les colonnes respectives ${}^t(x_1, x_2, x_3)$, ${}^t(x'_1, x'_2, x'_3)$, ${}^t(c_1, c_2, c_3)$. C'est une écriture analogue à celle d'une application affine bijective. Si L est une matrice orthogonale C, elle permet de définir un changement de bases orthonormées, et tout changement de bases orthonormées se fait par l'intermédiaire d'une telle matrice. Comme $C^{-1} = {}^tC$, les lignes de C expriment les b_i en fonction des b'_j. On notera ici l'analogie d'écriture avec celle d'une isométrie affine (voir suite p. 201).



Exemples de quadriques de révolution

Équation d'une quadrique : $7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 14x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 6 = 0$

Forme matricielle : $(x_1\,x_2\,x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 2\underbrace{(7\ \ -4\ \ 5)}_{{}^t\vec{a}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 6 = 0$

Équation caractéristique : $\det(A - x\,Id) = \begin{vmatrix} 7-x & -2 & 0 \\ -2 & 6-x & -2 \\ 0 & -2 & 5-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-6)(x-9) = 0$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 9$

Vecteurs propres unitaires : $(A - \lambda_1\,Id)\,\vec{e} = \vec{0}$ $\quad (A - \lambda_2\,Id)\,\vec{e} = \vec{0}$ $\quad (A - \lambda_3\,Id)\,\vec{e} = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\vec{e} = \vec{o}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\vec{e} = \vec{o}$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\vec{e} = \vec{o}$

$\vec{e}_1^{\,\circ} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_2^{\,\circ} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_3^{\,\circ} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrice-rotation : $C = (\vec{e}_2^{\,\circ}\,\vec{e}_1^{\,\circ}\,\vec{e}_3^{\,\circ}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Les vecteurs unitaires forment, dans l'ordre indiqué, un repère orthonormé direct.

Équation réduite selon des directions principales :

${}^tCAC = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},\ {}^t\vec{a}\,C = (0\ \ 3\ \ 9)$ $\qquad (x_1^*\,x_2^*\,x_3^*)\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} + 2(0\ \ 3\ \ 9)\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2x_1^{*2} + x_2^{*2} + 3x_3^{*2} + 2x_2^* + 6x_3^* + 2 = 0$

Translation $\vec{x}^* = \vec{\hat{x}} + \vec{c}$ avec ${}^t\vec{c} = (0\ \ -1\ \ -1)$: $2\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 3\hat{x}_3^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\hat{x}_1^2}{1} + \frac{\hat{x}_2^2}{2} + \frac{\hat{x}_3^2}{\frac{2}{3}} = 1$

B Ellipsoïde de révolution (voir p. 203)

Exemple d'équation réduite en axes principaux

Quadriques. Équation générale.

En faisant tourner les sections coniques, cercle, ellipse, parabole, hyperbole autour d'un de leurs axes de symétrie orthogonale, on obtient dans $\mathbb{R}^3$ plusieurs types de surfaces de révolution : sphère, ellipsoïde de révolution allongé ou aplati, paraboloïde de révolution, hyperboloïde de révolution à une ou deux nappes (ex. fig. A). Ces surfaces peuvent être représentées par des équations très simples si l'on choisit un repère orthonormé convenable (fig. A). Si on leur fait subir un déplacement, tout en conservant le même repère, on aboutit en général à une équation bien plus compliquée pour leurs transformées, bien qu'il ne s'agisse en fait que d'un changement de position ; cette équation est de la forme :

$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + Dx_1x_2 + Ex_1x_3 + Fx_2x_3 + Gx_1 + Hx_2 + Ix_3 + K = 0$
$(A, \ldots, K \in \mathbb{R})$.

On va, réciproquement, étudier la configuration d'un ensemble de points définis par une équation de ce type. Pour désigner un tel ensemble, on utilisera le vocabulaire : surface du second ordre ou plus simplement **quadrique**.

Il est d'usage de préférer l'écriture suivante pour l'étude des quadriques :

(I) $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + 2a_{03}x_3 + a_{00} = 0$

ou sous forme matricielle :

(II) ${}^t\vec{x}A\vec{x} + 2\,{}^t\vec{a}\,\vec{x} + a_{00} = 0$ avec

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0,\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R},$

Rem. : A est symétrique (${}^tA = A$), non nulle car il s'agit de surfaces du second ordre.

Passage à des directions principales

On peut montrer qu'il est toujours possible de faire un changement de coordonnées défini par $\vec{x} = C\vec{x}'$, où C est une matrice orthogonale, de telle sorte qu'il n'y ait plus de terme en $x_i\,x_j$ dans la nouvelle équation. Celle-ci est dite équation selon des directions principales :

(I') $a'_{11}x_1'^2 + a'_{22}x_2'^2 + a'_{33}x_3'^2 + 2a'_{01}x'_1 + 2a'_{02}x'_2 + 2a'_{03}x'_3 + a'_{00} = 0\ (a'_{00} = a_{00})$

et sous forme matricielle :

(II') ${}^t\vec{x}'({}^tCAC)\,\vec{x}' + 2\,({}^t\vec{a}\,C)\,\vec{x}' + a_{00} = 0$, où

$A' = {}^tCAC = C^{-1}AC$ est une matrice diagonale non nulle ($A' = (a'_{ij})$ avec $a'_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

Le problème est donc : trouver C orthogonale telle que $C^{-1}AC$ soit diagonale.

Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Si $y = Ax$ et $y' = A'x'$ sont les écritures matricielles d'un endomorphisme f dans les bases B et B', et si L est la matrice changement de base, on a successivement $x = Lx'$, $y = Ly'$, soit $y' = L^{-1}AL\,x'$, c'est-à-dire $A' = L^{-1}AL$. On en déduit que les polynômes

$P_A(X) = \det(A - X\,Id)$ et
$P_{A'}(X) = \det(A' - X\,Id)$ sont égaux puisque
$\det(A - X\,Id) = \det(L^{-1})\det(A - X\,Id)\det(L)$
$= \det(L^{-1}AL - XL^{-1}L) = \det(A' - X\,Id)$.

On peut donc écrire $P_f(X) = \det(A - X\,Id)$, puisqu'il s'agit en fait d'un polynôme associé à f et non à A. P_f est le *polynôme caractéristique* de f. Son degré est égal à la dimension de l'espace sur lequel opère f. Le scalaire λ est *valeur propre* de f si $f - \lambda Id$ n'est pas injectif, soit $\det(A - \lambda Id) = 0$. Les valeurs propres de f sont les racines de P_f (*cf.* p. 169).

Si $f - \lambda Id$ n'est pas injectif, il existe $\vec{v}$ non nul tel que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$: $\vec{v}$ est un *vecteur propre* associé à λ. L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ, complété par le vecteur nul, est un sous-espace vectoriel appelé *sous-espace propre* relatif à λ (solution du système homogène $(A - \lambda Id)\,\vec{v} = 0$, *cf.* p. 93). Un endomorphisme est dit diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de cet endomorphisme. On emploie le même vocabulaire pour une matrice carrée puisqu'on peut toujours lui associer un endomorphisme. En dimension 3, si $B' = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$ est une base propre pour f, la matrice de f dans cette base est diagonale. Si A représente f dans la base B, et si L est la matrice changement de base, $L^{-1}AL$ est diagonale (voir suite p. 203).

Répertoire des isométries affines (suite de la p. 199)

(A) S'il y a un point invariant pour $g : \vec{x}' = C\vec{x} + \vec{c}$, il existe $\vec{x}_0$ tel que $\vec{x}_0 = C\vec{x}_0 + \vec{c}$. On en tire $\vec{x}' - \vec{x}_0 = C(\vec{x} - \vec{x}_0)$ et par transfert de l'origine en $P_0(\vec{x}_0) : \vec{y}' = C\vec{y}$.

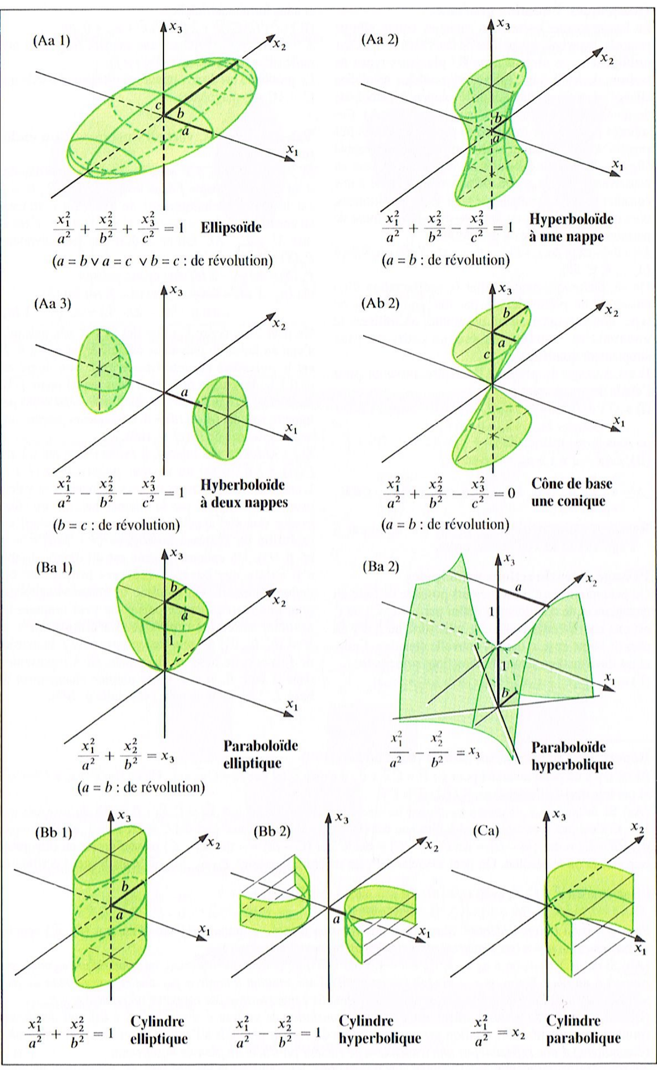
(Aa) Si $\det(C) = 1$, il existe au moins un vecteur unitaire $\vec{u}_0$ tel que $\vec{u}_0 = C\,\vec{u}_0$: il suffit de prouver que $Id - C$ n'est pas inversible, c'est-à-dire que $\det(Id - C) = 0$. On a d'une part $\det C = \det {}^tC = 1$, et d'autre part $\det(Id - C) = \det {}^t(Id - C) = \det({}^tCC - {}^tC) = \det {}^tC \det(C - Id) = -\det(Id - C)$ puisqu'on est en dimension impaire. D'où le résultat. On peut associer à P_0 un repère orthonormé P_0, $\vec{u}_0$, $\vec{v}_0$, $\vec{w}_0$ dans lequel l'écriture de l'isométrie est $\vec{z}' = C_0\vec{z}$, avec $C_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, $\varepsilon = +1$.

Pour $\varphi = 0$ on trouve l'*identité*. Sinon on a une *rotation* d'angle φ autour de l'axe défini par $(P_0, \vec{u}_0)$ appelée *retournement* si $\varphi = \pi$ (ou *symétrie orthogonale par rapport à une droite*).

(Ab) Si $\det(C) = -1$, on a $\vec{u}_0 = -C\,\vec{u}_0$, $\varepsilon = -1$. Pour $\varphi = 0$ on obtient une *réflexion*, ou *symétrie orthogonale par rapport à un plan*. Sinon on a le produit (commutatif) d'une *rotation d'angle φ par une réflexion selon un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation*, produit qui s'identifie à une *symétrie par rapport à un point* si $\varphi = \pi$.

(B) S'il n'y a pas de point invariant, on a soit une *translation* de vecteur $\vec{c}$, $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{c}$ ($C = Id$), soit un *vissage* (produit commutatif d'une rotation par une translation de vecteur parallèle à l'axe de la rotation), soit le *produit* (commutatif) *d'une réflexion par une translation de vecteur parallèle au plan de la réflexion.*

Ne sont des déplacements que l'identité, les translations, les rotations et les vissages. Ils constituent un sous-groupe du groupe des isométries affines.



Quadriques

Classification des quadriques

On peut donc, dans un repère orthonormé bien choisi, écrire l'équation d'une quadrique sous la forme (I′) précédemment indiquée, et finalement déduire de cette écriture une classification des surfaces du second ordre :

(I′) $a'_{11}x'^2_1 + a'_{22}x'^2_2 + a'_{33}x'^2_3 + 2a'_{01}x'_1 + 2a'_{02}x'_2 + 2a'_{03}x'_3 + a'_{00} = 0$

(A) $a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_{33} \neq 0$

On pose pour i = 1, 2, 3 : $x'_i = \hat{x}_i - \frac{a'_{0i}}{a'_{ii}}$ (translation des axes). Alors il reste $a'_{11}\hat{x}_1^2 + a'_{22}\hat{x}_2^2 + a'_{33}\hat{x}_3^2 + \hat{a}_{00} = 0$

(Aa) $\hat{a}_{00} \neq 0$. L'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{\hat{x}_1^2}{\left(\frac{-\hat{a}_{00}}{a'_{11}}\right)} + \frac{\hat{x}_2^2}{\left(\frac{-\hat{a}_{00}}{a'_{22}}\right)} + \frac{\hat{x}_3^2}{\left(\frac{-\hat{a}_{00}}{a'_{33}}\right)} = 1$$

(Aa1) Si les trois dénominateurs sont > 0, on a un *ellipsoïde* (éventuellement de révolution si deux dénominateurs sont égaux, voire une sphère si les trois dénominateurs sont égaux).

(Aa2) Deux dénominateurs sont > 0, l'autre est < 0 : on a un *hyperboloïde à une nappe* (de révolution si les deux dénominateurs > 0 sont égaux).

(Aa3) Deux dénominateurs sont < 0, l'autre est > 0 : on a un *hyperboloïde à deux nappes* (de révolution si les deux dénominateurs < 0 sont égaux).

(Aa4) Si les trois dénominateurs sont < 0, c'est l'ensemble vide.

(Ab) $\hat{a}_{00} \neq 0$ $a'_{11}\hat{x}_1^2 + a'_{22}\hat{x}_2^2 + a'_{33}\hat{x}_3^2 = 0$

(Ab1) Si tous les coefficients sont > 0, resp < 0, seul le point (0, 0, 0) convient. Il n'y a pas de surface.

(Ab2) Si deux coefficients sont de signes contraires, on a un *cône*.

(B) $a'_{11} \cdot a'_{22} \neq 0$, $a'_{33} = 0$. On pose pour $i = 1, 2$:

$x'_i = \hat{x}_i - \frac{a'_{0i}}{a'_{ii}}$, et on garde x'_3 (translation des axes).

Alors il reste $a'_{11}\hat{x}_1^2 + a'_{22}\hat{x}_2^2 + 2a'_{03}x'_3 + \hat{a}_{00} = 0$

(Ba) $a'_{03} \neq 0$. On pose $x'_3 = \hat{x}_3 - \frac{\hat{a}_{00}}{2a'_{03}}$ d'où l'équation

$a'_{11}\hat{x}_1^2 + a'_{22}\hat{x}_2^2 + 2a'_{03}\hat{x}_3 = 0.$

(Ba1) Si a'_{11} et a'_{22} sont de même signe on a un *paraboloïde elliptique* (de révolution si $a'_{11} = a'_{22}$).

(Ba2) Si a'_{11} et a'_{22} sont de signes contraires on a un *paraboloïde hyperbolique*.

(Bb) $a'_{03} = 0$ et **$\hat{a}_{00} \neq 0$** $a'_{11}\hat{x}_1^2 + a'_{22}\hat{x}_2^2 + \hat{a}_{00} = 0$

Cette équation peut s'écrire $\frac{\hat{x}_2^1}{\left(-\frac{\hat{a}_{00}}{a'_{11}}\right)} + \frac{\hat{x}_2^2}{\left(-\frac{\hat{a}_{00}}{a'_{22}}\right)} = 1$

(Bb1) Les deux dénominateurs sont > 0 : il s'agit d'un *cylindre elliptique* (de révolution si les dénominateurs sont égaux).

(Bb2) Les deux dénominateurs sont de signes contraires : il s'agit d'un *cylindre hyperbolique*.

(Bb3) Les deux dénominateurs sont < 0 : c'est l'ensemble vide.

(Bc) $a'_{03} = 0$ et **$\hat{a}_{00} = 0$** $a'_{11}\hat{x}_1^2 + a'_{22}\hat{x}_2^2 = 0$

(Bc1) a'_{11} et a'_{22} sont de signes contraires. Il s'agit de deux plans sécants.

(Bc2) a'_{11} et a'_{22} sont de même signe. On a la droite $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 0$

(C) $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} = a'_{33} = 0$ soit

$a'_{11}x'^2_1 + 2a'_{01}x'_1 + 2a'_{02}x'_2 + 2a'_{03}x'_3 + a'_{00} = 0,$

qu'on écrit en divisant par a'_{11} :

$$\left(x'_1 + \frac{a'_{01}}{a'_{11}}\right)^2 + 2(\hat{a}_{02}x'_2 + \hat{a}_{03}x'_3 + \hat{a}_{00}) = 0$$

(Ca) $\hat{a}_{02}^2 + \hat{a}_{03}^2 = p^2 \neq 0$. On pose $\hat{a}_{02} = p\cos\varphi$, $\hat{a}_{03} = p\sin\varphi$, $x'_1 + \frac{a'_{01}}{a'_{11}} = \hat{x}_1$,

$$x'_2\cos\varphi + x'_3\sin\varphi + \frac{\hat{a}_{00}}{p} = \hat{x}_2 .$$

D'où $\hat{x}_1^2 + 2p\hat{x}_2 = 0$ en repère orthonormé.

C'est un *cylindre parabolique*.

(Cb) $\hat{a}_{02}^2 + \hat{a}_{03}^2 = 0$. Il vient $\hat{x}_1^2 + 2\hat{a}_{00} = 0$

(Cb1) Si $\hat{a}_{00}$ est < 0 on a deux plans parallèles.

(Cb2) Si $\hat{a}_{00} = 0$ on a le plan $\hat{x}_1 = 0$ compté deux fois.

(Cb3) Si $\hat{a}_{00}$ est > 0 c'est l'ensemble vide.

Quadriques à centre

Un point M est *centre* d'un quadrique si la symétrie par rapport à M laisse cette quadrique globalement invariante. On peut chercher un centre éventuel directement à partir de l'équation II (p. 201), en posant $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{m}$, $\vec{m}$ étant choisi de façon que les termes du premier degré disparaissent dans l'équation en $\vec{x}'$. En effet une équation de la forme ${}^t\vec{x}'\,A\,\vec{x}' + a'_{00} = 0$ signifie que l'origine est centre de symétrie (invariance par $\vec{x}' \mapsto -\vec{x}'$) :

${}^t\vec{m}\,A\,\vec{x}' + {}^t\vec{x}'\,A\,\vec{m} + 2\,{}^t\vec{a}\,\vec{x}'$ doit donc disparaître.

Comme ${}^t\vec{m}\,A\,\vec{x}' = {}^t\vec{x}'\,A\,\vec{m}$, puisque A est symétrique, la condition est $A\vec{m} + \vec{a} = 0$. Il y aura au moins un centre si cette équation vectorielle est possible.

Les ellipsoïdes et hyperboloïdes ont un centre et un seul. Les paraboloïdes n'en ont pas. Les cônes ont un centre unique. Les cylindres elliptiques et hyperboliques ont chacun une droite de centres. Les cylindres paraboliques n'ont pas de centre.

(Suite de la page 201.) Pour une matrice symétrique réelle 3 × 3, on a les résultats suivants :
(1) Le polynôme caractéristique a toujours trois racines réelles, distinctes ou non.
(2) Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux.
(3) Si λ est valeur propre double, resp. triple, il existe deux, resp. trois vecteurs propres associés à λ linéairement indépendants. **Conséquence :** on peut toujours trouver une base orthonormée de vecteurs propres.
a) Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont valeurs propres simples, il existe trois vecteurs unitaires $\vec{l}_i$ tels que $A\vec{l}_i = \lambda_i\vec{l}_i$, et ces trois vecteurs sont orthogonaux (2). $\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3\}$ est une base orthonormée de vecteurs propres.
b) Si λ_1 est valeur propre simple et λ_2 valeur propre double, on construit deux vecteurs normés $\vec{l}_1$ et $\vec{l}_2$ tels que $A\vec{l}_1 = \lambda_1\vec{l}_1$, $A\vec{l}_2 = \lambda_2\vec{l}_2$; $\vec{l}_1$ et $\vec{l}_2$ sont orthogonaux d'après (2). Le produit vectoriel $\vec{l}_3 = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2$ est normé, orthogonal à $\vec{l}_1$ et $\vec{l}_2$, et c'est un vecteur propre pour λ_2. $\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3\}$ est une base orthonormée de vecteurs propres.
c) λ est valeur propre triple : la matrice A est égale à λId. Toute base orthonormée est une base de vecteurs propres.
Rem. : Les directions principales sont les directions propres de A. Une équation selon des directions principales s'obtient donc en prenant une base orthonormée de vecteurs propres.

Espace affine

Soit E un ensemble non vide d'él. P, Q… appelés points, V un espace vectoriel sur un corps com. K d'él. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$… S'il existe une loi de composition externe notée additivement $E \times V \to E : P + \boldsymbol{v} = Q$, vérifiant les deux conditions :

(1) $\forall P \in E$, l'application $\varphi_P : \boldsymbol{v} \to P + \boldsymbol{v} = \varphi_P(\boldsymbol{v})$ est une bijection de V sur E,

(2) $\forall (P, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in E \times V \times V$:
$(P + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = P + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$, on dit que E a une structure d'espace affine relativement au K-espace vectoriel V. (Si V est de dim. finie n, E est dit de dim. n.)

Prop. : (1) $\forall (P, Q) \in E^2\ \exists!\ \boldsymbol{v} \in V / Q = P + \boldsymbol{v}$. *On note* $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$.

(2) $\forall (P, Q, R) \in E^3\ \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (Chasles)

(3) $\overrightarrow{PQ} = \vec{0} \Leftrightarrow P = Q$ (d'où $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$)

(4) *La relation dite d'équipollence entre bipoints (él. de E^2) : (P, Q) équipollent à $(P', Q') \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ est une rel. d'équivalence. Elle s'écrit aussi $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$ (règle du parallélogramme).*

Structure canonique d'esp. affine d'un esp. vectoriel

L'application $V \times V \mapsto V : \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{w}$ confère à V une structure d'esp. affine par rapport à lui-même.

Structure vectorielle d'un esp. affine

Un couple (E, P_0), où $P_0 \in E$, est un esp. affine pointé ; $\forall A \neq \phi, A \subseteq V$, on pose $P_0 + A = \{P_0 + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \in A\}$. On a $E = P_0 + V$ et l'application φ_{P_0} transfère par bijection la structure vectorielle de V à E.

Sous-espace affine d'un esp. affine E

Soit $F \subseteq E, F \neq \phi$. S'il existe un s.e.v. W de V associé à E tel que la loi externe + restreinte à $F \times W$ satisfasse à la condition axiomatique $\forall P \in F$, l'appl. $\varphi_P : \boldsymbol{w} \mapsto P + \boldsymbol{w} = \varphi_P(\boldsymbol{w})$ est une bijection de W sur F, alors F a une structure d'espace affine car la deuxième condition axiomatique est satisfaite dans $E \times V$ donc dans $E \times W$. F est un *sous-espace affine* de E, de *direction* W.

Rem. : (1) La direction dir. F d'un s.e.a. F est parfaitement déterminée : c'est l'esp. vect. engendré par les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $(P, Q) \in F^2$.
(2) Tout s.e.a. peut s'écrire $P_0 + W$ où P_0 est quelconque dans F et W = dir. F. Toute partie de E de ce type est un s.e.a.

Déf. : La *dimension* d'un s.e.a. est celle de sa direction. Un singleton est un s.e.a. de dim. 0. Une *droite affine* est un s.e.a. de dim. 1. Un *plan affine* est un s.e.a. de dim. 2. Un *hyperplan affine* est un s.e.a. de direction un *hyperplan vectoriel*, c'est-à-dire un supplémentaire d'une droite vectorielle. Un hyperplan vectoriel ou affine est donc de dim. $n-1$ si dim. V = dim. $E = n, n \in \mathbb{N}^*$.

Repère affine

Si F est un (sous) espace affine $P_0 + W$ de dim. p, et si $(\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_p)$ est une base de W, tout point P de F s'écrit, de manière unique, $P = P_0 + \sum_{k=1}^{p} x_k \boldsymbol{v}_k$. Les $x_k\ (\in K)$ sont les *coordonnées* de P dans le *repère affine* $(P_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_p)$.

Parallélisme

Le s.e.a. F sera dit parallèle au s.e.a. F' ssi dir. $F \subseteq$ dir. F' (rel. réflexive et transitive). Les s.e.a. F et F' sont dits parallèles ssi dir. F = dir. F' (relation d'équivalence).

Intersection de s.e.a.

Soit F_i, $i \in I$, des s.e.a. Ou bien leur intersection F est vide (ex. deux droites parallèles distinctes), ou bien $\exists P_0 \in F$ et alors $F = P_0 + \bigcap_{i \in I}$ dir. F_i est un s.e.a.

Rem. : Les s.e.a. F et F' sont dits supplémentaires si dir. E = dir. $F \oplus$ dir. F'. Alors $F \cap F'$ est un singleton. Par ex. si la droite D n'est pas parallèle à l'hyperplan H, D et H sont supplémentaires.

Sous-espace affine engendré par A non vide $\subseteq E$

C'est le s.e.a. $F = P_0 + W$ où $P_0 \in A$ et W est le s.e.v. engendré par les vecteurs $\overrightarrow{P_0P}$, $P \in A$ (F est indépendant du choix de P_0). Si W est de dim. finie, on pose rang A = dim. F = dim. W. Si A est formé de $(p + 1)$ points $P_0, P_1, .. P_p$, rang A = rang $(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots \overrightarrow{P_0P_p})$ et ce nombre est indépendant du point origine choisi dans A. $(p + 1)$ points $P_0, \ldots P_p$ sont dits affinement indépendants si rang $(P_0, \ldots P_p) = p$. Ils engendrent un s.e.a. de dim. p ; alors $(P_0, \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots \overrightarrow{P_0P_p})$ est un repère affine du sous-espace engendré par ces $p + 1$ points. Pour définir une droite affine il faut donc deux points distincts, un plan affine trois points non alignés.

Barycentre

Un point massique dans E est un couple (Q, λ) él. de $E \times K$. Soit q points massiques (Q_i, λ_i) tels que $\sigma = \lambda_1 + \ldots + \lambda_q$ = masse totale de la famille des Q_i soit $\neq 0$. Alors $\exists!\ G \in E$ tel que $\lambda_1 \overrightarrow{GQ_1} + \ldots \lambda_q \overrightarrow{GQ_q} = \vec{0}$: c'est la définition intrinsèque du barycentre de la famille des points massiques (Q_i, λ_i). Si E est pointé en O, on détermine G en écrivant

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OQ_i}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \overrightarrow{OQ_i}$$

Rem. : Si $\sigma = 0$, l'application de E dans V :
$P \mapsto \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \overrightarrow{PQ_i}$ est constante. Si celle-ci vaut $\vec{0}$, tout point est barycentre. Sinon il n'y a pas de barycentre.

Prop. du barycentre : (1) *Le barycentre reste le même si on multiple les λ_i par un même coefficient $\neq 0$.*

(2) *Si deux familles de points massiques F' et F'' de masses totales respectives σ' et σ'' possèdent chacune au moins un barycentre G', resp. G'', alors la paire $((G', \sigma'), (G'', \sigma''))$ possède au moins un barycentre G et G est barycentre de la réunion $F' \cup F''$.*

(3) *Si les points Q_i ($i = 1, \ldots q$) sont affinement indépendants, l'ensemble des barycentres des points massiques (Q_i, λ_i) tels que $\lambda_1 + \ldots \lambda_q = 1$ est le sous-espace affine F défini par $Q_1, \ldots, Q_q$. De plus $\forall P \in F$, $\exists!$ q-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ tel que d'une part $\lambda_1 + \ldots, \lambda_q = 1$ et d'autre part P = barycentre des (Q_i, λ_i) ainsi définis : ces λ_i sont les coord. barycentriques de P.*

Applications affines

Soit E et E' deux espaces affines resp. associés aux K-espaces vectoriels V et V'. Une application f de E dans E' est dite affine s'il existe $P_0 \in E$ et $\varphi \in \mathfrak{L}(V, V')$ (p. 89) tels que $\forall Q \in E, f(Q) = f(P_0) + \varphi(\overrightarrow{P_0Q})$. Il est facile de monter alors que $\forall P \in E, f(Q) = f(P) + \varphi(\overrightarrow{PQ})$ et que φ est l'unique appl. vect. que l'on puisse associer ainsi à f. Une application affine est déterminée par l'image d'un point et sa *partie linéaire* φ.

Quels que soient $(P, P') \in E \times E'$ et $\varphi \in \mathfrak{L}(V, V')$ il existe une et une seule application affine f de partie linéaire φ telle que $f(P) = P'$.
Une appl. aff. f est injective, resp. surjective, bijective ssi φ est inj., resp. surj., bij.. Si f est bij. f^{-1} est affine de partie linéaire φ^{-1}.
Si E, E', E'' sont des K-espaces affines, si f et g sont affines resp. de E dans E' et E' dans E'', $g \circ f$ est affine de E dans E''. La partie linéaire de $g \circ f$ est la composée des parties linéaires de g *et* f dans le même ordre.
Si E et E' sont de dim.. finies sur K, de repères respectifs $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_n)$, $(O', \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots \boldsymbol{e}'_m)$, l'écriture d'une application affine de E dans E' se met sous la forme $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ où M, matrice à m lignes et n colonnes, définit φ pour les bases $(\boldsymbol{e}_i)$ de V et $(\boldsymbol{e}'_j)$ de V', les colonnes (x_i) et (y_j) définissant resp. $P \in E$ et $f(P) \in E'$ dans les repères indiqués ; la colonne (α_j) définit $f(O)$.

Th. : *Pour qu'une application du K-espace affine E dans le K-espace affine E' soit affine, il faut et il suffit qu'elle conserve les barycentres* :
f affine $\Leftrightarrow$ (G barycentre de $\{(Q_i, \lambda_i), i = 1, \ldots q\} \Rightarrow f(G)$ barycentre de $\{(f(Q_i), .\lambda_i), i = 1 .. q\}$).

Image d'un (sous-) espace affine par une appl. affine

Si $F = P_0 + W$ est un s.e.a. de E, de direction W, pointé en P_0, et si f est une appl. affine, alors $f(F) = f(P_0) + \varphi(W)$ est un sous-espace affine de direction $\varphi(W)$. On a donc toujours dim. $f(F) \leqslant$ dim. F. Si F est de dim. finie et si f est injective dim. $f(F)$ = dim. F. L'image d'un système de points indépendants de F est alors un système de points ind. de $f(F)$.

Endomorphismes affines

Si f est une appl. aff. de E dans E, f s'appelle un endormophisme affine. L'ensemble des end. affines de E est fermé pour la composition. Le sous-ensemble des bijections affines de E sur E est le groupe affine de E.
Soit $V' \oplus V'' = V$ et $P_0 \in E : \forall P \in E, \overrightarrow{P_0P} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''$, décomposition unique selon V' et V''. $P' = P_0 + \boldsymbol{v}'$ est le projeté de P sur $F' = P_0 + V'$ parallèlement au supplémentaire $F'' = P_0 + V''$. L'appl. $P \to P'$ est un projecteur affine. C'est l'identité si $V'' = \{0\}$. Dans tous les autres cas c'est un endomorphisme non injectif.
On appelle *translation* de vecteur $\boldsymbol{v} \in V$ l'endomorphisme affine $P \to P + \boldsymbol{v}$. Sa partie linéaire est l'identité (prop. caractéristique). L'ensemble des translations constitue un sous-groupe distingué du groupe affine ($\forall\ t$ translation, $\forall f$ bij. affine, $f^{-1} \circ t \circ f$ est une translation). On appelle *homothétie* de centre P_0 et de rapport $\alpha \in K^*$ l'end. affine $P \to P = P_0 + \alpha \overrightarrow{P_0P}$. L'ensemble des translations et des homothéties constitue également un sous-groupe distingué du groupe affine.

Formes affines

K étant un corps commutatif, K est un K-espace aff. de dim. 1. Si E est un K-espace affine, une appl. affine f de E dans K est une *forme affine* :
Si on pointe E en P_0, $P \in E \Leftrightarrow P = P_0 + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \in V$: $f(P) = f(P_0) + \varphi(\boldsymbol{v}) = \alpha + \varphi(\boldsymbol{v})$, $\alpha \in K$, φ = forme linéaire (p. 89). Si f n'est pas constante ($\varphi \neq 0$) l'ensemble des $P \in E$ tels que $f(P) = 0$ est un hyperplan affine, et tout hyperplan affine peut être défini de cette façon.
Un système linéaire (p. 93) définit donc soit ϕ, soit un s.e.a. intersection d'hyperplans affines.

Application à $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ considéré comme espace ponctuel est un $\mathbb{R}$-espace affine de dim $n \geqslant 1$. La géom. dans $\mathbb{R}^n$ généralise celles de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, mais $\mathbb{R}^n$ échappe à une représentation directement perceptible. Il s'agit en fait d'une construction purement algébrique. Tout ce qui vient d'être abordé sur les espaces affines s'applique en particulier à $\mathbb{R}^n$. De plus une structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ permet d'introduire d'autres propriétés.

Produit scalaire canonique dans l'esp. vect. $\mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, .. x_n)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, .. y_n)$ désignant des éléments de $\mathbb{R}^n$, l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est bilinéaire symétrique.
L'expression $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ également notée $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ est le produit scalaire canonique des deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$; $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ est le carré scalaire de $\boldsymbol{x}$. On pose $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$; un vecteur $\boldsymbol{x}$ est dit unitaire si $|\boldsymbol{x}| = 1$.

Th. : *La valeur absolue du produit scalaire de deux vecteurs unitaires est* $\leqslant 1$.

De $(|x_i| - |y_i|)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_i^2 + y_i^2 \geq 2|x_i\ y_i|$ on tire par sommation
$2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) \geq 2 \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \geq 2|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}|$, d'où le résultat.

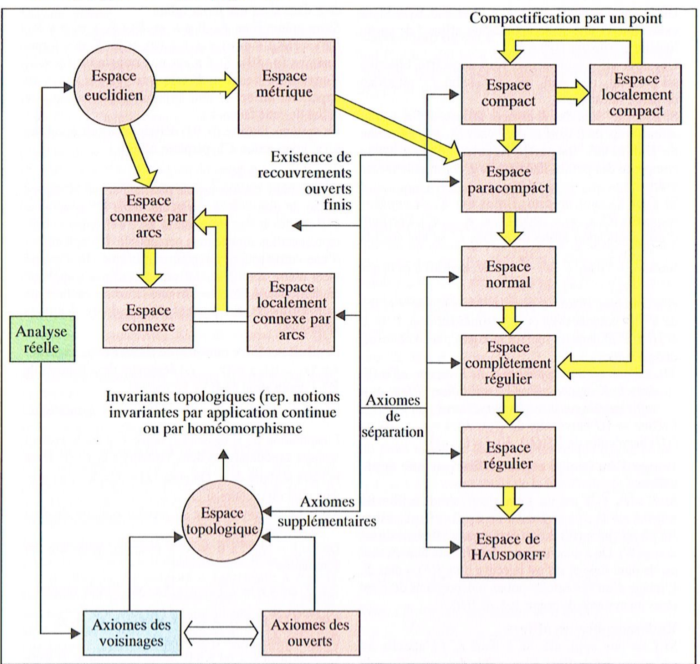
Cor. : $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle}$
(Inégalité de Cauchy-Schwarz).
C'est évident si $\boldsymbol{x}$ ou $\boldsymbol{y} = 0$. Sinon on applique le théorème précédent aux deux vecteurs unitaires $\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ et $\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|}$.

Norme euclidienne canonique

L'application $\boldsymbol{x} \to |\boldsymbol{x}|$ est une norme (euclidienne) sur l'esp. vect. $\mathbb{R}^n$ et l'application $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ est par suite une distance (euclidienne) sur l'espace affine $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n$ est un espace métrique (p. 51).
De $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$ on tire
$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2\, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$ soit
$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^2 \leq (|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|)^2$ d'où l'inégalité triangulaire. Les autres prop. axiomatiques des normes sont faciles à vérifier. On note $\mathbb{S}^{n-1}$ l'ensemble des points P de $\mathbb{R}^n$ tels que $|\overrightarrow{OP}| = 1$.

Mesure des angles, vecteurs orthogonaux

L'inégalité de Cauchy-Schwarz $\frac{|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} \leq 1$ pour $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ non nuls permet de définir un et un seul angle $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos \theta = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}$: θ est par définition l'angle $\sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ des deux vecteurs non nuls $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. La relation $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ signifie donc que, ou bien l'un des deux vecteurs est nul, ou bien $\sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\pi}{2}$ ($\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ orthogonaux). (voir suite p. 206.)



Système orthogonal (Suite de la p. 205)

Une famille de vecteurs ($\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_s$) de $\mathbb{R}^n$ est dite système orthogonal si pour tout (i, j), $i \neq j$, $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = 0$. Un système est dit orthonormé si $\forall i, j$, $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \delta_{ij}$ (symbole de KRONECKER : $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $= 1$ *si* $i = j$). La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée. Tout système orthogonal de vecteurs non nuls est libre. Il contient donc au plus n vecteurs. Si $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_s\}$ est une base d'un sous-esp. vect. de $\mathbb{R}^n$, on peut, par des opérations successives effectuées sur les $\boldsymbol{v}_i$, construire une base orthonormée de ce sous-espace (procédé d'orthonormalisation de SCHMITT).

Isométries dans $\mathbb{R}^n$

Une application f : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie par $\boldsymbol{y} = M\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$, où M est une matrice inversible $n \times n$ et $\boldsymbol{a}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ (en colonne) est une bijection affine de $\mathbb{R}^n$ (en particulier une translation si $M = Id$, une homothétie si $M = \alpha\, Id$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$). On dit que f est une isométrie affine si f conserve la distance euclidienne de deux points, c.-à-d. si, $\forall x, x'$, $< f(x') - f(x), f(x') - f(x) > = < x - x', x - x' >$, équivalent à ${}^tMM - Id = 0$. Les matrices satisfaisant cette relation sont dites orthogonales et forment un groupe multiplicatif, le groupe orthogonal O_n. Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1. Le sous-ensemble des matrices orth. à dét. $+ 1$ constitue le groupe spécial orthogonal $SO_n \subset O_n$. Les vecteurs colonnes (resp. lignes) d'une matrice orthogonale forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (prop. car. d'une matrice orthogonale).

Parallélépipède de dimension n

Si P_0 est un point de $\mathbb{R}^n$ et ($\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$) une base de $\mathbb{R}^n$, alors $P = \{P_0 + \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + .. \lambda_n\boldsymbol{v}_n, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ est un parallélépipède. Il est « déployé » à partir de P selon les arêtes vectorielles $\boldsymbol{v}_i$. Ses sommets sont définis par $\lambda_i = 0$ ou 1. Tout parallélépipède peut être déployé à partir d'un de ses sommets, avec une base ($\pm \boldsymbol{v}_1, \pm \boldsymbol{v}_2, \ldots \pm \boldsymbol{v}_n$) bien choisie ; si elle est orthonormée, on a un cube unitaire. Le « volume » d'un parallélépipède est $|\det(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n)|$ calculé dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Rem. : Une isométrie affine conserve également les angles et les volumes.

La topologie, en tant que discipline mathématique indépendante, est encore relativement jeune. On distingue aujourd'hui la *topologie ensembliste* (pp. 209-235) et la *topologie algébrique* (pp. 237-249). La topologie algébrique emploie des procédés algébriques pour résoudre des problèmes topologiques. La *topologie ensembliste* (topologie en abrégé) a pour origine l'analyse réelle. On remarque, en effet, qu'il est possible de développer la théorie de la convergence uniquement à l'aide de propriétés d'ensembles de points, sans faire appel ni à une structure algébrique ni à une structure ordonnée. Une troisième sorte de structure apparaît alors : la structure topologique. Elle est fondée sur les notions de voisinage, ouvert, fermé, point adhérent, point d'accumulation, convergence, connexité, compacité… Son but est en particulier l'étude et la classification d'ensembles de points à l'aide de telles notions.

La difficulté fut, au début, de dégager un **système axiomatique** simple. En fait, deux points de départ, équivalents d'ailleurs, sont possibles. Comme en géométrie, on distinguera certains ensembles de points par un choix convenable d'axiomes. Par exemple, si on part de l'**axiome des voisinages** (p. 215), on fait correspondre à chaque point d'un ensemble un système de sous-ensembles, le système de ses voisinages. Cette construction d'un espace topologique est due principalement à HAUSDORFF. À l'aide de la notion fondamentale de « voisinage », on construit ensuite le concept d'« ouvert ». Et c'est cette notion d'ouvert qui, reprise axiomatiquement, conduit à l'autre introduction des espaces topologiques, équivalente à celle des voisinages. Elle permet simplement de considérer une topologie sur un ensemble E comme un sous-ensemble de $\mathfrak{P}(E)$ ayant certaines propriétés, indépendantes des points de E : on définit axiomatiquement certaines parties de E comme « ouverts », et les « voisinages » sont ensuite définis à l'aide des ouverts (p. 215). Cette seconde définition d'un espace topologique par ses ouverts est souvent mieux adaptée au déroulement des démonstrations. L'ensemble de tous les ouverts, quelle que soit leur construction, est appelé *topologie*, et l'ensemble E est l'*ensemble sous-jacent de la topologie*.

On peut comparer deux espaces topologiques à l'aide d'une application qui met en relation les ouverts des deux topologies. S'il existe une application bijective entre les ensembles sous-jacents, qui induit une bijection entre les ensembles d'ouverts des deux espaces, on dit alors que les deux espaces topologiques sont *homéomorphes* ; on ne peut pas les distinguer par des moyens topologiques. L'application elle-même est appelée application topologique ou mieux *homéomorphisme* (p. 219).

Les propriétés importantes des espaces topologiques sont celles qui sont invariantes par homéomorphisme. On parle alors (pp. 209-213) d'invariants topologiques (comparer par exemple avec « invariants par déplacements » en géométrie p. 151).

Il existe encore une série de notions topologiques qui sont conservées par une classe d'applications plus étendue, celle des applications continues (p. 219). Tous les homéomorphismes font partie de cette classe, mais toute application continue n'est pas un homéomorphisme : un homéomorphisme est une application continue dont la réciproque existe et est également continue. Comme tout invariant par une application continue est également un invariant topologique, les applications continues en topologie – comme aussi en analyse réelle – seront d'une importance toute particulière. On désigne ainsi la topologie d'un espace euclidien par « géométrie continue » (pp. 209-213).

Tout ensemble possédant au moins deux éléments admet plus d'une topologie (p. 215). Le choix d'une topologie s'effectue en fonction de la théorie à développer. Ainsi, l'espace euclidien, par exemple, sera en général muni de sa **topologie naturelle** (pp. 215-217). Pour la définition des ouverts de cette topologie, on utilise la propriété de distance entre deux points, c.-à-d. le fait que l'espace soit *métrique* (p. 217). La « mesure » de cette distance est décrite par les propriétés d'une application appelée *métrique euclidienne* dans le cas d'un espace euclidien.

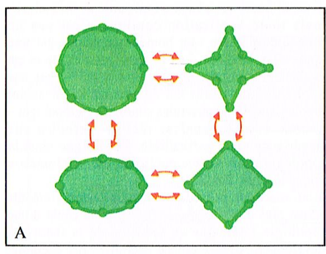
Les **espaces métriques** sont une généralisation des espaces euclidiens (p. 217). Comme les espaces euclidiens, ils admettent une topologie définie par une métrique. La classe des espaces métriques peut être étudiée uniquement à l'aide de ses propriétés topologiques, c.-à-d. sans utiliser la métrique (Mesurabilité, p. 231).

Souvent, une topologie est définie sur un ensemble à l'aide d'une topologie connue définie sur un autre ensemble donné. Une application particulière mettant en relation les deux ensembles permet de « transporter » la topologie de l'un sur l'autre (p. 219). C'est par exemple le cas pour la topologie des sous-ensembles, des ensembles quotients, des produits cartésiens et des espaces sommes (pp. 219-221).

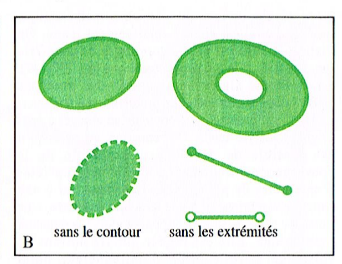
L'un des buts de la topologie est de pouvoir étendre la notion de convergence en analyse classique à la notion de convergence dans un espace topologique. Pour cela, on généralise la notion de suite, et on introduit des bases de filtres (p. 225). Cette théorie n'est cependant satisfaisante que pour des espaces particuliers, comme par ex. les espaces de HAUSDORFF (p. 227).

Les **espaces de HAUSDORFF** sont des représentants d'espaces vérifiant l'**axiome de séparation** (p. 227). Les plus importants de ces espaces sont – en particulier pour le problème de métrisation – les espaces réguliers, complètement réguliers et normaux. Les espaces métriques sont des exemples de tels espaces.

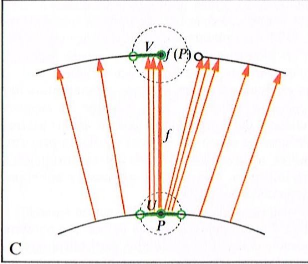
Par la propriété de **recouvrement ouvert**, on définit les espaces *paracompacts et compacts* (p. 231). Les espaces compacts, comme tous les espaces métriques, vérifient l'axiome de séparation ; cependant tout espace métrique n'est pas nécessairement compact. En revanche, tout espace métrique sera *paracompact* (p. 231), notion intermédiaire entre compacité et normalité, très importante pour les problèmes de métrisabilité. La topologie fournit les bases de nombreuses disciplines de l'analyse, par exemple la théorie des fonctions, l'analyse fonctionnelle et la géométrie différentielle.



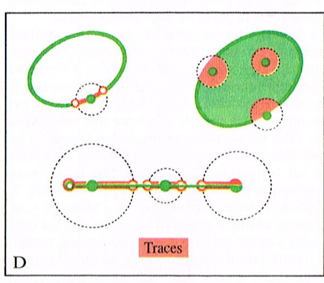
Ensembles de points topologiquement équivalents



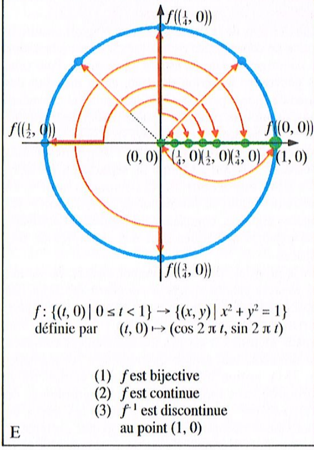
Ensembles de points non équivalents topologiquement



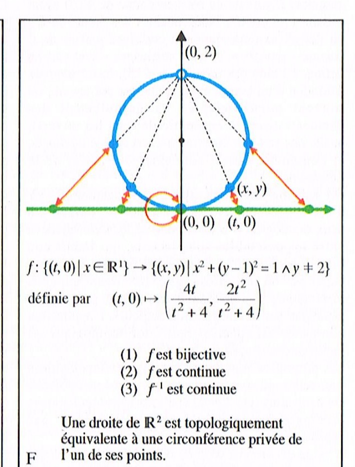
Discontinuité



Topologie induite



Bijection continue, non bicontinue



Homéomorphisme

Déformation élastique

En géométrie euclidienne, par exemple dans $\mathbb{R}^2$, on peut caractériser certains ensembles de points à l'aide de propriétés invariantes par isométrie ou similitude. Ainsi un disque ou une parabole sont définis à une similitude près, tandis qu'une parabole de paramètre donné est définie à une isométrie près.

Cependant, il y a des ensembles de points très simples du plan qui ne peuvent être déduits l'un de l'autre par ce type d'applications, par exemple ceux présentés figure A ; ils ne sont ni congruents ni semblables. Si l'on imagine que ces ensembles de points sont tracés sur un matériau élastique, alors ils peuvent se transformer l'un en l'autre par une transformation réversible (« transformation élastique »). Une telle transformation est une application bijective possédant certaines propriétés supplémentaires qu'il faut essayer de dégager moyennant certaines définitions nouvelles.

Une « transformation élastique » conserve certaines propriétés des ensembles de points. Par exemple, tout « point frontière » reste un « point frontière », toute courbe fermée frontière garde cette double propriété, deux points « voisins » restent « voisins », tout point « intérieur » devient un point « intérieur » …

Par contre, par « transformation élastique », l'image d'une droite n'est pas nécessairement une droite (fig. A). Dans une « géométrie des transformations élastiques », les notions de segments, droites, angles et les concepts qui s'en déduisent jouent un rôle secondaire.

De même que les classes d'ensembles de points congruents, resp. semblables, ont été introduites, de même on peut définir les classes d'ensembles de points images les uns des autres par une « transformation élastique ». On parle d'ensembles *topologiquement équivalents* (ici pour la topologie naturelle de $\mathbb{R}^2$). Ainsi, les ensembles de points de la figure A appartiennent à la même classe, ils sont topologiquement équivalents. Par contre, les ensembles représentés dans l'ill. B ne sont pas deux à deux topologiquement équivalents. Il est clair qu'aucune « transformation élastique » ne peut transformer l'une de ces figures en une autre. Il restera à formuler mathématiquement le procédé de « transformation élastique » (Homéomorphisme, voir ci-dessous).

Exemple de transformation non élastique

La caractéristique d'une « transformation élastique » est que par cette transformation on n'observe que de « petites » déformations à « proximité » d'un point. La transformation décrite à la figure C présente au contraire des transformations « importantes » à « proximité » de $f(P)$. En $f(P)$ apparaît une « déchirure ». Une telle application sera dite non topologique après définition mathématique.

On va maintenant progressivement passer au langage topologique, toujours dans le cadre de $\mathbb{R}^2$, dont la topologie naturelle est celle des voisinages au sens de ce qui suit.

Voisinage

La notion de « proximité » doit être précisée. Si on considère l'espace $\mathbb{R}^2$ dans son ensemble, on peut alors au moyen d'un disque ouvert D (c.-à-d. privé de sa circonférence) de rayon r, centré au point P, décrire quantitativement la « proximité » d'un point $Q \in D$ et de P : « distance » de Q à P inférieur à r. Les disques ouverts de centre P et de rayon quelconque ainsi que leurs sur-ensembles sont les *voisinages de P* dans $\mathbb{R}^2$. Un voisinage de P contient tous les points d'au moins un disque ouvert centré en P.

Si on se limite à un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$, alors les voisinages de P dans E seront les *traces* dans E des voisinages de P dans $\mathbb{R}^2$ (fig. D). De manière précise, un *voisinage de P dans E* est l'intersection de E et d'un voisinage de P dans $\mathbb{R}^2$. On construit ainsi la topologie *induite* par celle de $\mathbb{R}^2$ sur $E \subset \mathbb{R}^2$.

Rem. : Dans la suite seul le terme « voisinage » sera utilisé. Le contexte permettra de savoir s'il s'agit ou non de voisinage obtenu par trace.

Application continue

À l'aide de la notion de voisinage, il est possible de décrire convenablement la « déchirure » de la figure C. Il apparaît clairement que $f(P)$ possède un voisinage V tel qu'aucun voisinage U de P – si « petit » soit-il – n'a d'image entièrement incluse dans V après la transformation. Il y a toujours des points images à l'extérieur de V. On parle alors de *discontinuité* de l'application f au point P et on dit que f est discontinue au point P.

On considère maintenant le contraire de la discontinuité : Pour *tout* voisinage V de $f(P)$, il existe au moins un voisinage de P dont l'image soit entièrement incluse dans V. Dans ce cas, l'application f est dite *continue au point P*. Si l'application est continue en tout point, alors on parle d'application continue.

Homéomorphisme

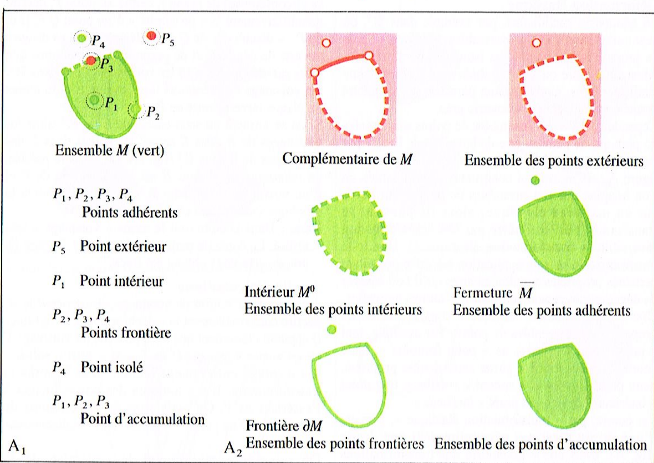
On exige tout d'abord d'un homéomorphisme f qu'il soit bijectif, car les « transformations élastiques » sont réversibles. Ensuite, on exige de plus que f et f^{-1} ne présentent aucune discontinuité. Une application f est donc un homéomorphisme, lorsque f est bijective continue et d'inverse continue. Des ensembles de points images l'un de l'autre par homéomorphisme sont dits topologiquement équivalents.

Rem. : Les figures E et F illustrent resp. une application non topologique et une application topologique (i.e. un homéomorphisme) ; pour l'application non topologique, f^{-1} est discontinue en un point. La donnée d'une application non topologique particulière n'est cependant pas suffisante pour démontrer que les deux ensembles de points ne sont pas topologiquement équivalents.

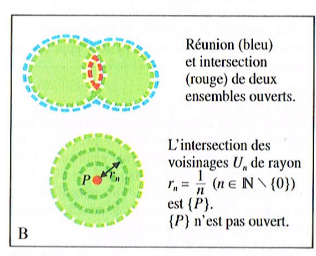
Rem. : La notion d'homéomorphisme est plus générale que le procédé intuitif de « déformation élastique », tout homéomorphisme ne pouvant pas être interprété comme une telle transformation.

But de la topologie

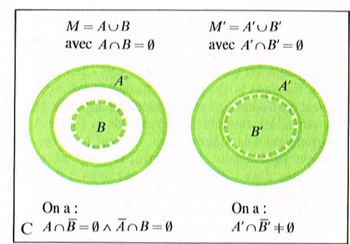
Du point de vue géométrique, le but de la topologie est d'étudier des classes d'ensembles de points topologiquement équivalents et de décrire leurs représentants à l'aide de propriétés qui restent inchangées par homéomorphisme (*invariants topologiques*). Les invariants par application continue (*invariants continus*) ont également leur importance.



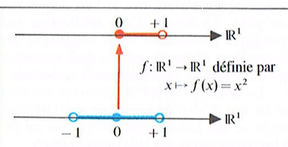
Points particuliers, ensembles particuliers



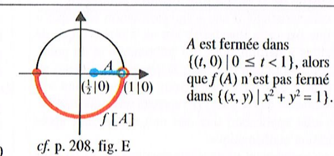
Réunion et intersection d'ensembles ouverts



Connexité



0 est un point intérieur de $]-1, +1[$, mais $f(0) = 0$ est un point de la frontière de $f(]-1, +1[) = [0, 1[$. L'image de l'ensemble ouvert $]-1, +1[$ n'est donc pas ouverte, donc :
« Point intérieur » et « ouvert » ne sont pas des invariants continus, mais seulement des invariants topologiques.



cf. p. 208, fig. E

Par contre, pour tout ensemble M, il vient :
$x \in \overline{M}$ et f continue $\Rightarrow f(x) \in \overline{f(M)}$, donc :
la notion de « point adhérent »
est un invariant continu alors que
« fermé » n'est qu'un invariant topologique.

D

Invariants

Homéomorphismes de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

La définition d'une application continue sur $\mathbb{R}^2$, voire d'un homéomorphisme, à l'aide de la notion de voisinage (p. 209) s'adapte sans difficulté à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^3$, en remplaçant les disques ouverts par les intervalles ouverts, resp. les boules ouvertes (*cf.* p. 50, fig. C) ; pour les applications continues sur des sous-ensembles les voisinages sont ceux de la topologie induite.

Rem. : On retrouvera ces notions en analyse réelle p. 275.

Les concepts qui vont suivre sont essentiellement de nature topologique, c.-à-d. que les images par un homéomorphisme quelconque des points ou ensembles qu'ils définissent sont des points, resp. des ensembles de même nature (on se place sur $\mathbb{R}^p$, ou sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^p$, $p = 1, 2, 3$, muni de la topologie induite).

Point adhérent, point extérieur, point intérieur, point isolé, point d'accumulation, point frontière

Si $E \subset \mathbb{R}^p$ est muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^p$ et si A est une partie de E, la situation topologique d'un point P de E par rapport à A peut être précisée de la façon suivante (ill. A_1, $p = 2$, $E = \mathbb{R}^2$) :

P est dit *adhérent* à A, si tout voisinage de P rencontre A ; en particulier, tout point de A adhère à A, mais il peut y en avoir d'autres (ex. P_3).

Un point P qui n'est pas adhérent à A est dit *extérieur* à A (ex. P_5).

P est dit *intérieur* à A si P possède un voisinage inclus dans A (ex. P_1).

P est dit *point isolé* de A s'il existe un voisinage de P ne rencontrant A qu'en P (ex. P_4).

P est dit *point d'accumulation* de A si tout voisinage de P rencontre A ailleurs qu'en P (ex. P_1, P_2, P_3).

P est dit *point frontière* de A si tout voisinage de P rencontre A et $E \setminus A$ (ex. P_2, P_3).

Ouvert, intérieur, fermé, fermeture, frontière

Un ensemble constitué uniquement de points intérieurs est un *ouvert* (par ex. un disque privé de sa circonférence dans $\mathbb{R}^2$).

L'espace entier est toujours un ouvert ; l'ensemble vide est par définition un ouvert. La réunion d'une famille *quelconque* d'ouverts est un ouvert, l'intersection d'une famille *finie* d'ouverts est un ouvert (fig. B). L'intersection d'une famille quelconque d'ouverts n'est pas en général un ouvert (fig. B).

L'ensemble décrit à la figure A_1 n'est pas un ouvert.

Le plus grand sous-ensemble ouvert $\mathring{A}$ contenu dans un ensemble de points A s'appelle l'intérieur de A. C'est d'une part la réunion de tous les ouverts contenus dans A, d'autre part l'ensemble de tous les points intérieurs à A (fig. A_2).

Un ensemble est dit *fermé* si son complémentaire dans E est un ouvert. Cependant, « fermé » n'est pas équivalent à « non ouvert », car l'ensemble de la figure A_1 n'est ni ouvert ni fermé.

À tout ensemble de points A on peut associer le plus petit fermé $\overline{A}$ le contenant. $\overline{A}$, appelé fermeture de A, est d'une part l'intersection de tous les fermés contenant A, d'autre part l'ensemble de tous les points adhérents à A. $\overline{A}$ est également la réunion de A et de tous ses points d'accumulation (fig. A_2).

L'ensemble des points frontières de A, appelé frontière ∂A de A (fig. A_2), est exactement l'ensemble des points de A qui ne sont ni intérieurs ni extérieurs à A. On a $\partial A = \partial(E \setminus A)$. Une frontière est toujours un fermé.

Ex. : L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels considéré comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$ n'est ni ouvert ni fermé. On a $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Rem. : Si $E \subset \mathbb{R}^p$ est muni de la topologie induite, on peut prouver qu'un ouvert, resp. un fermé de E, s'obtient en prenant l'intersection avec E d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$, resp. d'un fermé de $\mathbb{R}^p$. Toutefois, la nature topologique d'une partie de E dépend en général de la topologie de référence (celle de $\mathbb{R}^p$, ou celle de E).

Les propriétés « fermé », « ouvert », « point intérieur » ne sont pas des invariants continus mais seulement des invariants topologiques, contrairement à la propriété « point adhérent » (fig. D).

Ensembles connexes

Les sous-ensembles M et M' de $\mathbb{R}^2$ proposés en figure C sont tous deux des réunions d'ensembles de points disjoints, où A et A', resp. B et B' sont même topologiquement équivalents. Pourtant, M et M' présentent des différences topologiques essentielles.

Déf. 1 : 1/ Deux parties A et B de $\mathbb{R}^p$ sont dites *séparées* si l'on a simultanément $\overline{A} \cap B = \emptyset$ et $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

2/ Une partie N de $\mathbb{R}^p$ est dite *non connexe* si on peut la mettre sous la forme $N = A \cup B$, où A et B sont des parties non vides séparées.

3/ Une partie C de $\mathbb{R}^p$ est dite *connexe* dans le cas contraire.

(On verra p. 223 une étude générale de ces notions.)

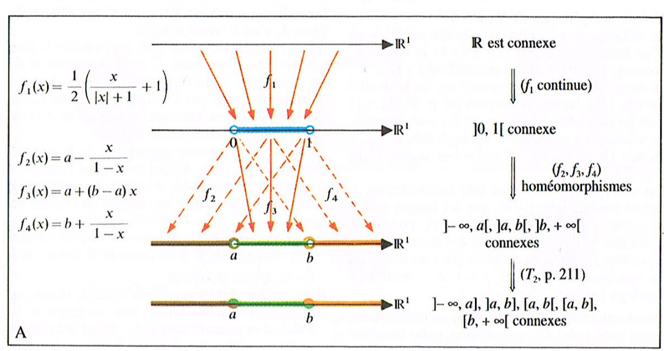
Ici M est non connexe, alors que M', qui est un disque fermé de $\mathbb{R}^2$, est de ce fait connexe (p. 223).

Les ensembles connexes jouent un rôle particulier en topologie, car la connexité n'est pas seulement un invariant topologique : elle est également conservée par les applications continues. La mise en évidence d'une application continue d'un ensemble connexe connu (par ex. dans $\mathbb{R}$) ayant pour image un ensemble à étudier démontre donc la connexité de ce dernier.

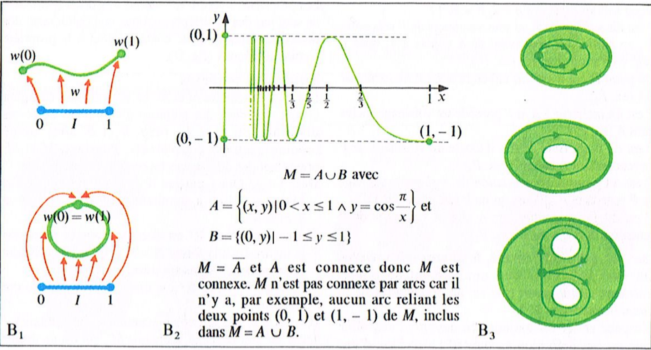
Les théorèmes suivants sont en outre très utiles :

(T_1) Si A et B sont connexes avec $A \cap B = \emptyset$, alors $A \cup B$ est également connexe.

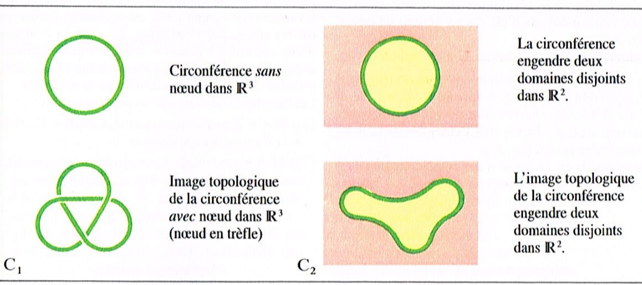
(T_2) Si A est connexe, alors $\overline{A}$, de même que tout ensemble B tel que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, sont connexes.



Connexité dans ℝ



Arcs et connexité par arcs



Propriétés de position

Connexes de ℝ

Les seuls connexes de ℝ sont les intervalles, bornés ou non, et les singletons (fig. A).

Connexes de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Les connexes de ℝ sont également connexes comme sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$. L'image d'un intervalle par une application continue sera encore un ensemble connexe.

Les images par une application continue f de l'intervalle $I := [0, 1]$ sont d'un emploi courant. L'image $f[I]$ constitue une liaison connexe entre les points $f(0)$ et $f(1)$. On parle d'*arc* entre les points $f(0)$ et $f(1)$, d'*arc fermé* si $f(0) = f(1)$ (fig. B_1).

La reconnaissance et la classification des connexes dans $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$ est plus compliquée que dans ℝ. Toutefois, la connexité des ouverts peut être facilement déterminée : un ouvert est connexe si, et seulement si, deux points quelconques peuvent être reliés par une ligne brisée entièrement contenue dans l'ouvert.

Rem. : Les ouverts connexes (*domaines*) jouent un rôle fondamental en analyse.

Une classe remarquable de connexes peut être appréhendée à l'aide du critère suivant : si deux points quelconques d'un ensemble peuvent être reliés par un arc entièrement contenu dans l'ensemble, alors cet ensemble est dit *connexe par arcs* et cela entraîne qu'il est connexe. On remarquera que tout ouvert connexe est connexe par arcs. Il existe cependant des connexes qui ne sont pas connexes par arcs (fig. B_2).

Les connexes par arcs admettent eux aussi une classification. La figure B_3 représente des connexes par arcs qui ne sont pas deux à deux topologiquement équivalents. Intuitivement, ce fait est justifié par l'existence d'arcs fermés « entourant » des points qui n'appartiennent pas au connexe. De tels arcs n'existent pas pour le premier ensemble de la figure B_3 : tout arc fermé peut être « ramené continûment » à un point. Un ensemble possédant cette propriété est dit *simplement connexe*.

Rem. : Une étude plus approfondie conduit au concept d'homotopie (p. 237 *sqq.*).

Ensembles compacts de ℝ

Si on considère l'image par une application continue f d'un segment I, dans ℝ ou plus généralement dans $\mathbb{R}^p$, cette image est non seulement connexe, mais aussi fermée bornée (on dit qu'une partie de $\mathbb{R}^p$ est *bornée* si elle est contenue dans une boule ouverte). La propriété « fermé borné » dans $\mathbb{R}^p$ est un invariant continu. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^p$ à la fois fermés et bornés sont appelés *compacts*. Un compact n'est pas nécessairement connexe, par exemple $[0, 1] \cup [2, 3]$ est compact. On verra p. 229 la définition générale d'un compact contenant le cas très particulier des ens. compacts de $\mathbb{R}^p$. Toute intersection de compacts est compacte. L'adhérence d'une partie bornée de $\mathbb{R}^p$ est compacte. Ainsi, un disque ouvert n'est pas compact, mais si on le complète par sa circonférence, il devient compact (disque fermé).

Propriétés de forme et position

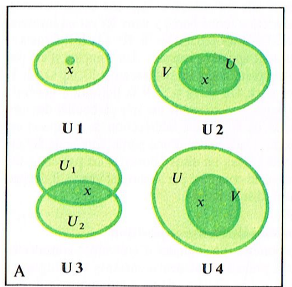
Les propriétés topologiques d'ensembles considérées jusqu'à présent sont des invariants topologiques (parfois même des invariants continus), c.-à-d. que deux ensembles topologiquement équivalents posséderont les mêmes propriétés. Les propriétés d'une classe d'ensembles topologiquement équivalents, sont appelées *propriétés de forme* (ou *propriétés intrinsèques*). Les propriétés intrinsèques sont donc les invariants par les homéomorphismes de sous-ensembles de l'espace, sans considération de l'espace ambiant.

Par ce procédé, on renonce à estimer les « positions » particulières des ensembles topologiquement équivalents relativement à l'espace ambiant. Le « nœud » représenté à la figure C_1 est topologiquement équivalent à la circonférence C, il ne peut toutefois pas avoir pour image C par un homéomorphisme de l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.

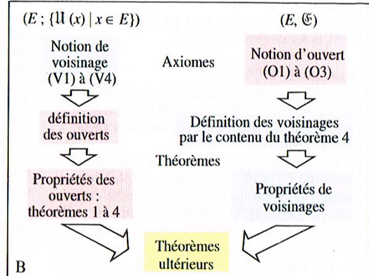
On dit que la circonférence et le nœud possèdent des *propriétés de position* (ou *propriétés externes*) différentes.

De telles propriétés de position sont donc des propriétés qui dépendent de l'espace ambiant et qui restent inchangées par homéomorphisme de l'espace ambiant. Elles dépendent donc du choix de l'espace sous-jacent, car si on plonge le « nœud » dans l'espace $\mathbb{R}^4$, il pourra être « dénoué », c.-à-d. qu'il admet C pour image par un homéomorphisme convenable de $\mathbb{R}^4$. Relativement à $\mathbb{R}^4$, les propriétés de position aussi bien que de forme des deux ensembles seront identiques.

On trouve encore un autre exemple concernant la position à la figure C_2 : la circonférence, resp. son image topologique délimitent dans $\mathbb{R}^2$ exactement deux domaines disjoints. Cette propriété n'est manifestement pas conservée en plongeant cet ensemble dans $\mathbb{R}^3$.



Axiomes des voisinages



Définition axiomatique d'un espace topologique

Définitions

$x \in E$ Point adhérent à A	$:\Leftrightarrow \forall U\,(U \in \mathfrak{U}(x) \Longrightarrow U \cap A \neq \emptyset)$	n'appartient pas nécessairement à A
$x \in E$ Point extérieur à A	$:\Leftrightarrow \exists U\,(U \in \mathfrak{U}(x) \wedge U \cap A = \emptyset)$	n'appartient pas à A
$x \in E$ Point intérieur à A	$:\Leftrightarrow \exists U\,(U \in \mathfrak{U}(x) \wedge U \subseteq A)$	appartient à A
$x \in E$ Point frontière de A	$:\Leftrightarrow \forall U\,(U \in \mathfrak{U}(x) \Longrightarrow U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap (M \setminus A) \neq \emptyset)$	n'appartient pas nécessairement à A
$x \in E$ Point isolé de A	$:\Leftrightarrow \exists U\,(U \in \mathfrak{U}(x) \wedge U \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset)$	appartient à A
$x \in E$ Point d'accumulation de A	$:\Leftrightarrow x$ point adhérent à $A \setminus \{x\}$	n'appartient pas nécessairement à A
A Ensemble ouvert	$:\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Longrightarrow x$ point intérieur à $A)$*	
A Ensemble fermé	$:\Leftrightarrow E \setminus A$ ensemble ouvert	
A Ensemble dense	$:\Leftrightarrow \forall x\,(x \in E \Longrightarrow x$ point adhérent à $A)$	

* Dans la déf. de la topologie par les ouverts, cette déf. devient un th.

Notations

$\bar{A}$	Ensemble des points adhérents à A (fermeture de A)
A^0	Ensemble des points intérieurs à A (intérieur de A)
∂A	Ensemble des points frontière de A (frontière de A)

Propriétés

$A^0 \subseteq A,\ A^{0\,0} = A^0$	$A \subseteq \bar{A},\ \bar{\bar{A}} = \bar{A}$	$\partial A = \bar{A} \setminus A^0$
$A \subseteq B \Rightarrow A^0 \subseteq B^0$	$A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$	$= \bar{A} \cap (E \setminus A^0)$
$(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$= \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$
$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^0 \supseteq \bigcup_{i\in I} A_i^0$	$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i\in I} \bar{A}_i$	$= E \setminus (A^0 \cup (E \setminus A)^0)$
$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^0 \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^0$	$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \bar{A}_i$	$= \partial\,(E \setminus A)$

$E \setminus A^0 = \overline{E \setminus A}$, $E \setminus \bar{A} = (E \setminus A)^0$, $E = A^0 \cup \partial A \cup (E \setminus A)^0$, $E = A^0 \cup \overline{E \setminus A}$, $E = \bar{A} \cup (E \setminus A)^0$

A ouvert $\Leftrightarrow A \subseteq A^0 \Leftrightarrow A = A^0 \Leftrightarrow \partial A \subseteq E \setminus A$ A^0 est ouvert

A fermé $\Leftrightarrow \bar{A} \subseteq A \Leftrightarrow \bar{A} = A \Leftrightarrow \partial A \subseteq A$ $\bar{A}$ est fermé

A ouvert $\wedge$ B fermé $\Longrightarrow A \setminus B$ ouvert $\wedge$ $B \setminus A$ fermé

A ouvert $\wedge\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$, A fermé $\wedge\ A \cup B = E \Longrightarrow A \cup B^0 = E$

A dense $\Leftrightarrow \bar{A} = E$

(A 1) $\emptyset$ et E sont fermés.

(A 2) L'intersection d'un nombre quelconque de fermés est fermée.

C (A 3) La réunion d'un nombre fini de fermés est fermée.

Notions fondamentales de topologie et propriétés

Définition d'un espace topologique par l'axiome des voisinages

La notion fondamentale pour la topologie naturelle dans $\mathbb{R}^p$, $p = 1, 2, 3$, est celle de *voisinage* (pp. 209-213). Pour une généralisation à un espace quelconque, la présentation proposée est toutefois trop particulière car elle fait appel à la notion de « distance », c.-à-d. qu'elle suppose l'existence d'une métrique (p. 51). La notion de voisinage « métrique » pourra donc être étendue à tout « espace métrique » (p. 217) ; si on choisit un espace quelconque, alors il faut, lors de la généralisation, s'appuyer sur des propriétés caractéristiques des voisinages « métriques » qui peuvent être formulées sans avoir recours à la métrique. Hausdorff a montré qu'il fallait exiger des voisinages d'un point $x \in E$ les propriétés suivantes **(axiome des voisinages)** pour aboutir à une théorie constructive de topologie sur E (*cf.* fig. A) :

(V1) x appartient à chacun de ses voisinages.

(V2) Tout sur-ensemble V d'un voisinage U de x est un voisinage de x. E est un voisinage de x.

(V3) L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x.

(V4) Tout voisinage U de x contient un voisinage V de x tel que U soit également un voisinage de chaque point de V.

On définit :

Déf. 1 : Si pour tout point x d'un ensemble E, il existe un sous-ensemble $\mathfrak{U}(x)$ de $\mathfrak{P}(E)$, appelé ensemble des *voisinages* de x (*système de voisinages de x*), satisfaisant les conditions **V1** à **V4**, alors $(E\,;\{\mathfrak{U}(x)\mid x\in E\})$ est appelé *espace topologique*.

Au cours de la théorie, on définit de même qu'à la page 211 les notions topologiques de point adhérent, point intérieur, ouvert, etc. (ill. C) et on démontre entre autres les théorèmes suivants :

Théorème 1 : *$\varnothing$ et E sont des ouverts.*

Théorème 2 : *L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.*

Théorème 3 : *La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.*

Théorème 4 : *Un sous-ensemble U est un voisinage de x si, et seulement si, il existe un ouvert O tel que $x \in O \subseteq U$.*

Définition d'un espace topologique par les ouverts

En considérant les théorèmes 1 à 3 comme axiomes, on obtient une nouvelle définition de l'espace topologique équivalente et qui sera utilisée plus tard :

Déf. 2 : $(E\,;\mathfrak{T})$ est appelé espace topologique si $\mathfrak{T}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{P}(E)$, possédant les propriétés suivantes :

(O1) $\varnothing \in \mathfrak{T}, E \in \mathfrak{T}$,

(O2) $O_1, O_2 \in \mathfrak{T} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{T}$,

(O3) $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcup_{O \in \mathfrak{H}} O \in \mathfrak{T}$

$\mathfrak{T}$ est appelé *topologie* de l'ensemble sous-jacent E. *Les* éléments de $\mathfrak{T}$ sont les *ouverts*, ceux de E des *points*.

Rem. : $(E\,;\mathfrak{T})$ peut être lu « E muni de la topologie $\mathfrak{T}$ ».

Dans l'espace topologique ainsi construit, on définit la notion de voisinage à l'aide du contenu du théorème 4 :

Déf. 3 : *U* est appelé *voisinage* de x si $U \subseteq E$ et s'il existe un $O_{\mathfrak{T}} \in \mathfrak{T}$, avec $x \in O_{\mathfrak{T}} \subseteq U$.

$\mathfrak{U}(x)$ est l'*ensemble de tous les voisinages* de x (système de voisinages de x).

On peut alors démontrer les contenus des axiomes **V1** à **V4** comme théorèmes (*cf.* ill. B). En définitive, les deux constructions sont équivalentes et peuvent être utilisées indifféremment.

Exemples d'espaces topologiques

(1) On dira d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qu'il est ouvert, soit s'il est vide, soit s'il contient, avec chacun de ses points, un intervalle ouvert autour de ce point. Alors, le système $\mathfrak{R}$ de tous les ouverts est la topologie sur $\mathbb{R}$ appelée *topologie naturelle*. L'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ est à la base de l'analyse réelle.

De même, on peut définir une topologie sur $\mathbb{R}^n$, en remplaçant les intervalles ouverts par des boules ouvertes. De manière générale, tout espace métrique (p. 217) admet une topologie de ce type ; cependant, la topologie dépendra de la métrique choisie.

(2) On peut définir une topologie radicalement différente sur $\mathbb{R}$ en posant :

$\mathfrak{F} := \{O \,/\, O = \varnothing \vee (O = \mathbb{R} \setminus E \wedge E\ \textit{fini})\}$

(3) Sur $\mathbb{N}$ peut être définie une topologie $\mathfrak{R}_{\mathbb{N}}$ liée à la topologie naturelle de $\mathbb{R}$ (voir topologie, p. 219) : on choisit $\mathfrak{R}_{\mathbb{N}} = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, c.-à-d. que tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est défini comme ouvert.

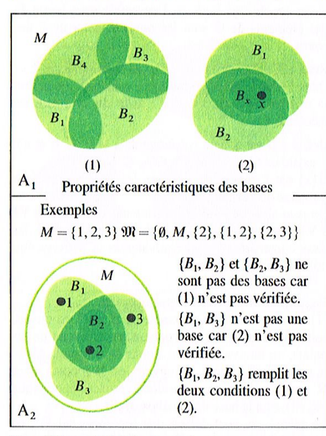
Sur tout ensemble E, $\mathfrak{P}(E)$ définit une topologie appelée *topologie discrète*.

(4) Conformément à la définition 2, $\varnothing$ et E doivent appartenir à toute topologie de E. Cette condition minimale conduit sur tout ensemble E à la topologie $\{\varnothing, E\}$ appelée *topologie triviale*.

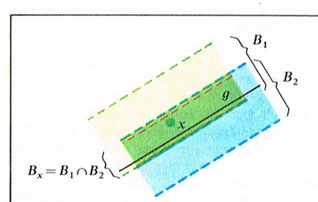
Comparaison des topologies d'un même ensemble sous-jacent

Il est possible de définir des topologies distinctes sur un même ensemble sous-jacent, par ex. $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$, $(\mathbb{R}, \mathfrak{F})$, $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$, $(\mathbb{R}, \{\varnothing, \mathbb{R}\})$. Elles présentent cependant des propriétés très différentes.

Les topologies d'un même ensemble sous-jacent peuvent être éventuellement comparées par la relation d'inclusion « $\subseteq$ », mais ce n'est pas toujours le cas (par ex. $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{R}$ ne sont pas comparables sur $\mathbb{R}$). Si $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, alors on dit que $\mathfrak{M}_2$ est plus fine que $\mathfrak{M}_1$: $\{\varnothing, E\}$ est ainsi la « moins fine » et $\mathfrak{P}(E)$ la « plus fine » de toutes les topologies d'un même ensemble sous-jacent.



Propriétés caractéristiques des bases

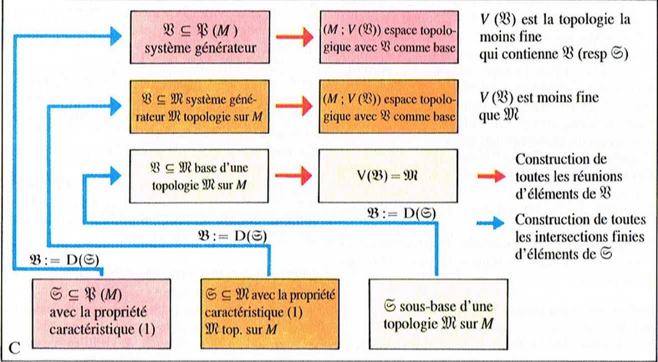


L'ensemble de toutes les bandes ouvertes parallèles à une droite donnée est une partie de $\mathfrak{R}^2$. Il satisfait aux conditions caractéristiques des bases (1) et (2), mais il ne constitue pas une base de $\mathfrak{R}^2$, car un disque ouvert n'est pas une réunion de bandes.

Cet ensemble engendre toutefois une topologie sur $\mathbb{R}^2$, dans laquelle tout ouvert non vide est une réunion quelconque de ces bandes ouvertes. On dit, de façon abrégée, qu'il s'agit de la topologie des bandes dans $\mathbb{R}^2$.

B

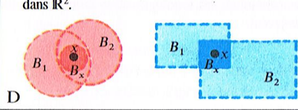
Topologie des bandes dans $\mathbb{R}^2$

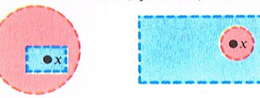


Topologie engendrée

L'ensemble de tous les disques ouverts ainsi que l'ensemble de tous les rectangles ouverts (de côtés parallèles aux axes) sont des systèmes générateurs dans $\mathbb{R}^2$.

Ces deux systèmes générateurs sont équivalents : ils engendrent la même topologie sur $\mathbb{R}^2$. Ce sont, en fait, deux bases (équivalentes) de $\mathfrak{R}^2$.





D

Systèmes générateurs équivalents

Espaces métriques

Les espaces dits métriques constituent une classe importante d'espaces topologiques (voir aussi p. 51).

Déf. 1 : M désignant un ensemble non vide, (M, d) est un *espace métrique* si d est une application de $M \times M$ dans $\mathbb{R}^+$ (appelée *métrique* sur M) vérifiant les propriétés (1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (2) $\forall (x, y)\ d(x, y) = d(y, x)$, (3) $\forall (x, y, z)\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$; $d(x, y)$ s'appelle la distance de x et y.

Ex. : On peut munir $\mathbb{R}^n$ de la distance

$d_E(x, y) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - y_\nu)^2}$ entre deux points

$x = (x_1, \dots x_n)$ et $y = (y_1, \dots y_n)$: d_E est la *métrique enclidienne canonique.* Dans $\mathbb{R}^1$ on retrouve $d_E = |x - y|$. Voici d'autres distances sur $\mathbb{R}^n$:

$d_1(x, y) = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu - y_\nu|$, $d_\infty(x, y) = \sup\{|x_\nu - y_\nu| \mid \nu = 1, \dots, n\}$.

Tout espace métrique devient un espace topologique par une construction analogue à celle qui a été vue p. 215 pour la présentation des topologies naturelles $\mathfrak{R}^1$, $\mathfrak{R}^2$, $\mathfrak{R}^3$ sur $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. On introduit la notion d'ε-voisinage ; elle permet de définir les ouverts de l'espace métrique :

Déf. 2 : Soit (M, d) un espace métrique. Toute partie $U(x, \varepsilon) = \{y \,/\, y \in M \wedge d(x, y) < \varepsilon\}$ s'appelle un *ε-voisinage*, ou encore une *boule ouverte* de centre x et de rayon ε.

Une partie O de M est dite *ouverte*, ou bien si elle est vide, ou bien si $\forall x \in O$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait $U(x, \varepsilon) \subseteq O$.

Rem. : On peut vérifier que les boules ouvertes sont bien des ouverts.

Les ouverts selon cette déf. 2 satisfont aux axiomes des espaces topologiques (p. 215, déf. 2) et forment la *topologie métrique* $\mathfrak{M}_d$ de M (On dit aussi que $\mathfrak{M}_d$ est *la topologie engendrée par d*).

Ex. : Les topologies naturelles $\mathfrak{R}^1$, $\mathfrak{R}^2$, $\mathfrak{R}^3$ sont engendrées par la métrique enclidienne d_E. La topologie engendrée par d_E sur $\mathbb{R}^n$ est désignée de façon générale par $\mathfrak{R}^n$.

Un espace métrique particulièrement important est l'espace de Hilbert de la page 230.

La notion fondamentale en topologie métrique est celle d'ε-voisinage. Cela apparaît clairement dans le

Th. 1 : *Une partie non vide d'un espace métrique est un ouvert si, et seulement si, elle s'identifie à une réunion de boules ouvertes.*

Il est toutefois inutile, en général, de faire usage de tous les ε-voisinages pour une telle interprétation. Il suffit de se limiter à l'ensemble $\left\{U(x, \varepsilon) \mid x \in M \wedge \varepsilon = \frac{1}{p} \wedge p \in \mathbb{N}^*\right\}$. Et même dans certains cas on peut prendre un ensemble dénombrable : par exemple dans $\mathfrak{R}^n$ $\left\{U(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{Q}^n \wedge \varepsilon = \frac{1}{p} \wedge p \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Ainsi tout ouvert non vide de $\mathfrak{R}^1$ est la réunion d'intervalles ouverts dont les extrémités sont rationnelles et dont la longueur est de la forme $\frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}^*$.

Base d'une topologie

Le contenu du théorème 1 justifie la définition suivante :

Déf. 3 : Soit $(M, \mathfrak{M})$ un espace topologique. On appelle *base* toute partie $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ telle que tout ouvert non vide puisse être considéré comme réunion d'éléments de $\mathfrak{B}$. Si $\mathfrak{B}$ est dénombrable, on dit que $\mathfrak{M}$ possède un *base dénombrable.*

Seules les bases qui contiennent substantiellement « moins » d'éléments que $\mathfrak{M}$ présentent un intérêt. C'est par exemple le cas de la topologie métrique vue plus haut : $\mathfrak{R}^n$ possède une base dénombrable. Les ensembles $\{]a, b[\,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$ et $\{]a, b[\,/\, a, b \in \mathbb{Q} \wedge b - a = \frac{1}{p} \wedge p \in \mathbb{N}^*\}$ sont des bases de $\mathfrak{R}^1$.

Propriétés fondamentales des bases

Th. 2 : *Soit $(M, \mathfrak{M})$ un espace topologique et $\mathfrak{B}$ une partie de $\mathfrak{M}$. Si $\mathfrak{B}$ est une base de $\mathfrak{M}$, alors on a* (1) $M = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$, (2) $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_x \in \mathfrak{B}$ tel que $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$ (fig. A_1).

La figure A_2 illustre le fait que si (1) ou (2) n'est pas remplie, $\mathfrak{B}$ ne peut être une base.

Le tableau B illustre le fait que si (1) et (2) sont remplies par une partie $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$ n'est pas forcément une base de $\mathfrak{M}$.

Cependant les propriétés (1) et (2) permettent de construire des topologies :

Th. 3 : *Soit M un ensemble et $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Si $\mathfrak{B}$ satisfait à* (1) *et* (2) *alors l'ensemble de toutes les réunions d'éléments de $\mathfrak{B}$ complété par $\emptyset$,* $V(\mathfrak{B}) = \left\{\bigcup_{B \in \mathfrak{B}'} B \mid \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}\right\} \cup \{\emptyset\}$ *est une topologie sur M dont $\mathfrak{B}$ est une base.*

Déf. 4 : Une partie $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(M)$ vérifiant les propriétés (1) et (2) s'appelle *un système générateur*, et l'on dit que $V(\mathfrak{B})$ est *la topologie engendrée par* $\mathfrak{B}$.

$V(\mathfrak{B})$ est la topologie la moins fine qui contienne $\mathfrak{B}$. Si $\mathfrak{B}$ est une base d'une topologie $\mathfrak{M}$, on a évidemment $V(\mathfrak{B}) = \mathfrak{M}$ (tab. C).

Ex. : Le système générateur du tab. B engendre sur $\mathbb{R}^2$ une topologie différente de $\mathfrak{R}^2$: c'est *la topologie des bandes.*

Systèmes générateurs équivalents

Deux systèmes générateurs $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ sont dits *équivalents* s'ils engendrent la même topologie. Il en est ainsi si, et seulement si, pour tout $B \in \mathfrak{B}_1$, respectivement $B \in \mathfrak{B}_2$, et tout $x \in B$, il existe $B_x \in \mathfrak{B}_2$, respectivement $B_x \in \mathfrak{B}_1$, tel que $x \in B_x \subseteq B$ (voir l'exemple du tab. D).

Sous-base d'une topologie

Si une partie $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ ne remplit que la condition (1) du th. 2, en général $V(\mathfrak{S})$ n'est pas une topologie. Toutefois on a le

Th. 4 : *Soit M un ensemble et $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Si $\mathfrak{S}$ satisfait à la condition* (1) *du théorème* 2, *alors l'ensemble de toutes les intersections finies d'éléments de $\mathfrak{S}$,* $D(\mathfrak{S}) = \{\bigcap_{i=0}^{n} S_i \mid S_i \in \mathfrak{S} \wedge n \in \mathbb{N}\}$ *est un système générateur* (voir le tab. C).

Déf. 5 : Soit $(M, \mathfrak{M})$ un espace topologique et $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. $\mathfrak{S}$ s'appelle une *sous-base* de $\mathfrak{M}$ si $D(\mathfrak{S})$ est une base de $\mathfrak{M}$.

Ainsi tout sous-ensemble $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{P}(M)$ vérifiant la condition (1) est une sous-base de la topologie $V(D(\mathfrak{S}))$ engendrée par $D(\mathfrak{S})$. Cette topologie est la moins fine qui contienne $\mathfrak{S}$. Si $\mathfrak{S}$ ou $D(\mathfrak{S})$ est une base d'une topologie $\mathfrak{M}$, alors $V(D(\mathfrak{S})) = \mathfrak{M}$.

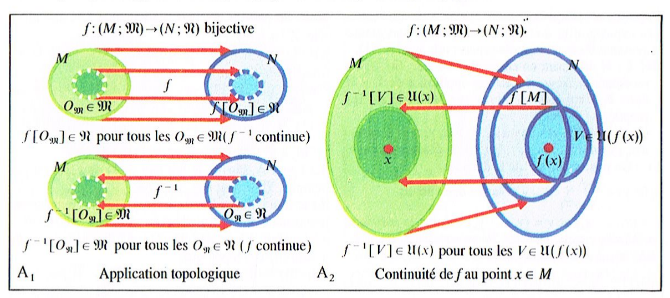
Base de voisinages

Déf. 6 : Une partie $\mathfrak{B}(x)$ de l'ensemble $\mathfrak{U}(x)$ des voisinages d'un point x est dite *base de voisinages* de x si quel que soit $U \in \mathfrak{U}(x)$ il existe $V \in \mathfrak{B}(x)$ tel que $V \subseteq U$.

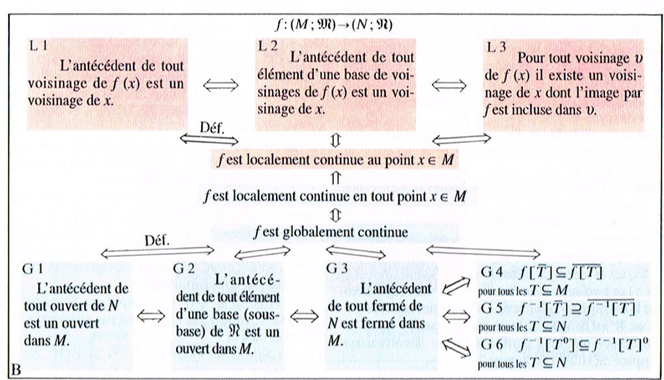
Ex. : L'ensemble des voisinages ouverts de x est bien entendu une base de voisinages de x.

En topologie métrique l'ensemble des ε-voisinages de x est une base de voisinages de x ; on peut même définir pour tout point une base de voisinages dénombrable.

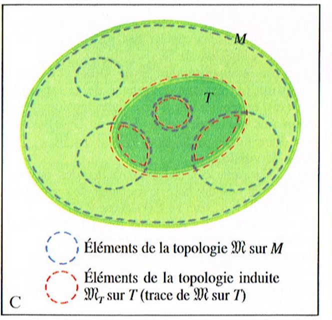
Rem. : Si un esp. top. a une base dénombrable, tout x admet une base de voisinages dénombrable.



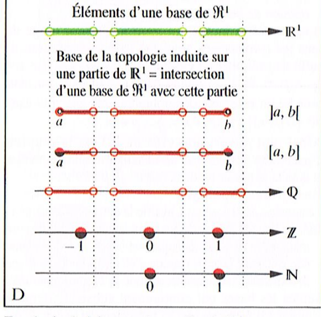
Application topologique, continuité en un point



Continuité locale et continuité globale



Topologie induite



Topologies induites sur des parties de $\mathbb{R}^1$

Correspondance entre deux espaces topologiques

Pour comparer deux espaces topologiques on fait appel à des applications appropriées, c'est-à-dire des applications qui mettent en correspondance les structures topologiques des deux espaces sous-jacents. En premier lieu on définit le cas où deux espaces topologiques sont homéomorphes, c'est-à-dire non discernables sur le plan topologique.

a) **Isomorphisme topologique ou homéomorphisme**

Déf. 1 : $(M, \mathfrak{M})$ et $(N, \mathfrak{N})$ sont dits *homéomorphes* s'il existe une application f, appelée *isomorphisme topologique* ou *homéomorphisme*, de $(M, \mathfrak{M})$ sur $(N, \mathfrak{N})$ telle que : (1) f est bijective ; (2) pour tout ouvert $O_{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}$, respectivement $O_{\mathfrak{N}} \subset \mathfrak{N}$, $f(O_{\mathfrak{M}}) \in \mathfrak{N}$, respectivement $f^{-1}(O_{\mathfrak{N}}) \in \mathfrak{M}$ (figure A_1). Dans un ensemble d'espaces topologiques l'homéomorphie est une relation d'équivalence. Les classes sont constituées d'espaces topologiques homéomorphes (*topologiquement équivalents*). Les propriétés qui restent invariantes sous un homéomorphisme sont des *invariants topologiques*.

b) **Application continue**

Le concept d'application continue est étroitement lié à la notion de morphisme topologique.

Déf. 2 : Soient $(M, \mathfrak{M})$ et $(N, \mathfrak{N})$ deux espaces topologiques et f une application du premier dans le deuxième : f est dite *continue sur* $(M, \mathfrak{M})$, en abrégé *globalement continue* ou même *continue*, si pour tout $O_{\mathfrak{N}} \subset \mathfrak{N}$ on a $f^{-1}(O_{\mathfrak{N}}) \in \mathfrak{M}$ (fig. A_1) ; f est dite continue au point $x \in M$, ou *localement continue* en x, si pour tout $V \in \mathfrak{U}(f(x))$, $f^{1}(V) \in \mathfrak{U}(x)$ (fig. A_2). La liaison entre isomorphisme topologique et application continue est mise en lumière par le

Th. 1 : *f appliquant $(M, \mathfrak{M})$ dans $(N, \mathfrak{N})$ est un homéomorphisme si, et seulement si, f est bijective et si f et f^{-1} sont continues, c'est-à-dire si f est continue et s'il existe g continue de $(N, \mathfrak{N})$ dans $(M, \mathfrak{M})$ avec* $g \circ f = 1_M$, $f \circ g = 1_N$.

La notion d'applications continues est par conséquent essentielle en topologie. Au sens de la théorie des structures de la p. 39, il s'agit des applications compatibles avec la structure topologique. Les invariants sous les applications continues (*invariants continus*) sont également des invariants topologiques.

La notion de continuité locale est une généralisation de la notion de continuité en analyse (voir tab. B. L_3). Il est significatif que l'on puisse se limiter à une base de voisinages pour l'étudier (L_2). Par exemple, pour les espaces métriques, la formulation de la continuité en un point ne fait appel qu'aux ε-voisinages (voir p. 51).

La continuité globale peut être déduite de la continuité locale (tab. B). On peut l'exprimer de différentes façons, toutes équivalentes (G_2 à G_6 tab. B). Celle relative à une base (sous-base) d'une topologie est particulièrement importante (G_2). La composition $g \circ f$ de deux applications continues $f : (M, \mathfrak{M}) \to (N, \mathfrak{N})$ et $g : (N, \mathfrak{N}) \to (O, \mathfrak{O})$ est une application continue. Il lui correspond le cas local : si f est continue en $x \in M$ et si g est continue en $f(x) \in N$, alors $g \circ f$ est continue en $x \in M$.

Rem. : On dit que l'application f est *ouverte*, respectivement *fermée*, si l'image f de tout ouvert est un ouvert, respectivement de tout fermé est un fermé. Une projection (voir p. 221) est une application ouverte. Une application bijective, continue et ouverte est un homéomorphisme.

Topologie engendrée par des applications

Si N est un ensemble et $(M, \mathfrak{M})$ un espace topologique, on peut transférer la structure topologique de M à N par une application. Deux possibilités sont offertes selon que N est l'ensemble d'arrivée ou l'ensemble de départ.

a) **Topologie finale**

Soit f une application de M dans N. Si $(M, \mathfrak{M})$ est un espace topologique, alors $\mathfrak{N}_{fin} = \{T \mid T \subseteq N \wedge f^{-1}(T) \in \mathfrak{M}\}$ est une topologie sur N, dite *topologie finale* engendrée par f et $\mathfrak{M}$. Par construction de $\mathfrak{N}_{fin}$ l'application $f : (M, \mathfrak{M}) \mapsto (N, \mathfrak{N}_{fin})$ est continue. Si $\mathfrak{N}$ est une autre topologie définie sur N, l'application $f : (M, \mathfrak{M}) \mapsto (N, \mathfrak{N})$ est continue si, et seulement si, $\mathfrak{N}_{fin} \supseteq \mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}_{fin}$ est donc la topologie *la plus fine* définie sur l'ensemble d'arrivée pour laquelle l'application génératrice est continue. Pour une application f bijective on a $\mathfrak{N}_{fin} = \{f(O_{\mathfrak{M}}) \mid O_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}\}$, si bien que $f^{-1} : (N, \mathfrak{N}_{fin}) \mapsto (M, \mathfrak{M})$ est continue. $(M, \mathfrak{M})$ et $(N, \mathfrak{N}_{fin})$ sont alors homéomorphes : on remarquera enfin que si $f : (M, \mathfrak{M}) \mapsto (N, \mathfrak{N})$ est une application surjective, continue et ouverte, on a $\mathfrak{N}_{fin} = \mathfrak{N}$.

b) **Topologie initiale**

Soit maintenant $g : N \mapsto M$. Si $(M, \mathfrak{M})$ est un espace topologique, alors $\mathfrak{N}_{ini} = \{g^{-1}(O_{\mathfrak{M}}) \mid O_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}\}$ est une topologie sur N ; c'est la *topologie initiale* engendrée par g et $\mathfrak{M}$.

Par construction de $\mathfrak{N}_{ini}$ l'application $g : (N, \mathfrak{N}_{ini}) \mapsto (M, \mathfrak{M})$ est continue. Si $\mathfrak{N}$ est une autre topologie définie sur N, alors $g : (N, \mathfrak{N}) \mapsto (M, \mathfrak{M})$ est continue si et seulement si $\mathfrak{N}_{ini} \subseteq \mathfrak{N}$. La topologie initiale est donc la moins fine des topologies définies sur l'ensemble de départ pour lesquelles l'application génératrice est continue. Si g est bijective, $(M, \mathfrak{M})$ et $(N, \mathfrak{N}_{ini})$ sont homéomorphes.

Topologie induite, sous-espace topologique

Parmi les différentes topologies que l'on peut définir sur une partie T d'un espace topologique $(M, \mathfrak{M})$, il en est une qui provient directement de $\mathfrak{M}$. On obtient cette topologie en considérant les traces de $\mathfrak{M}$ sur T (figure C).

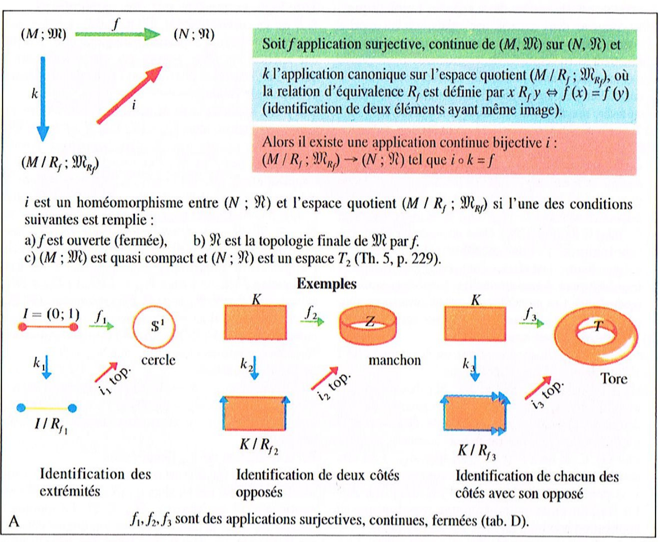
Déf. 3 : Soit $(M, \mathfrak{M})$ un espace topologique et $T \subseteq M$. Alors $\mathfrak{M}_T = \{O_{\mathfrak{M}} \cap T \mid O_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}\}$ est une topologie sur T et s'appelle la *topologie induite* par $(M, \mathfrak{M})$ sur T. $(T, \mathfrak{M}_T)$ est un *sous-espace topologique* de $(M, \mathfrak{M})$.

La topologie induite sur T par $(M, \mathfrak{M})$ est la topologie initiale engendrée par l'injection canonique $i : T \mapsto M$ et la topologie $\mathfrak{M}$. En effet l'injectivité de i donne $i^{-1}(O_{\mathfrak{M}}) = O_{\mathfrak{M}} \cap T$. L'injection canonique est donc continue. De là on tire, entre autres, que la restriction d'une application continue sur $(M, \mathfrak{M})$ à un sous-espace est également continue.

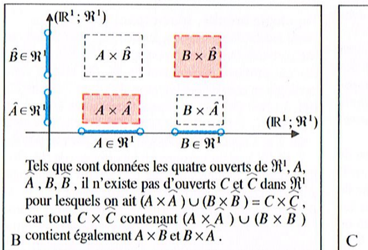
Les fermés, respectivement les ouverts d'un sous-espace T sont les intersections avec T des fermés, respectivement des ouverts du sur-espace. Si $\mathfrak{B}$ est une base de $\mathfrak{M}$, alors $\mathfrak{B}_T = \{B \cap T \mid B \in \mathfrak{B}\}$ est une base de $\mathfrak{M}_T$.

Ex. de sous-espaces topologiques : $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$ et $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ peuvent être considérés comme des sous-espaces topologiques de $(\mathbb{R}^3, \mathfrak{R}^3)$, $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$ comme un sous-espace de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$. La topologique induite sur $]a, b[$, respectivement sur $[a, b]$ que l'on utilise en analyse, ainsi que la topologie induite sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ sont illustrées dans le tab. D.

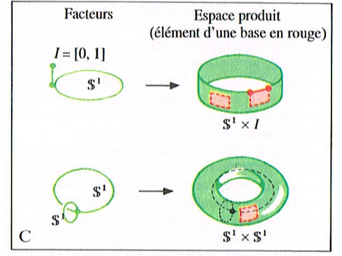
Un sous-espace de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ fréquemment utilisé est la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ (p. 205).



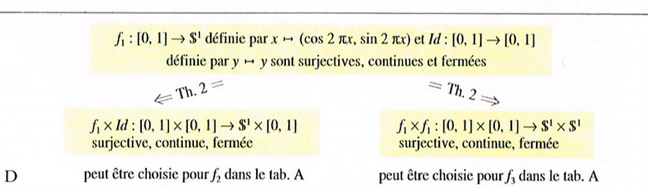
Espace quotient et homéomorphisme



Topologie produit



Manchon et tore considérés comme espaces produits



Application du théorème 2

Topologie quotient, espace quotient

R désignant une relation d'équivalence sur un ensemble M muni d'une topologie $\mathfrak{M}$, la définition d'une topologie sur l'ensemble quotient M / R tient naturellement compte de celle de M. On transfère cette dernière par l'application canonique $k : M \mapsto M / R, x \mapsto [\![x]\!]$.

Déf. 1 : La topologie finale engendrée par $\mathfrak{M}$ et k sur M / R s'appelle *topologie quotient* issue de $(M, \mathfrak{M})$: $\mathfrak{M}_R = \{T \mid T \subseteq M / R \wedge k^{-1}(T) \in \mathfrak{M}\}$ (p. 219). $(M / R, \mathfrak{M}_R)$ est l'*espace quotient* de $(M, \mathfrak{M})$ par R. D'après cette définition, l'application canonique k est continue. La topologie quotient est la topologie la *plus fine* pour laquelle k est continue.

Les espaces quotients jouent un rôle important dans de nombreux cas. Ainsi à un espace topologique $(N, \mathfrak{N})$ exigeant une description trop compliquée, on substitue un espace quotient homéomorphe issu d'un espace topologique connu $(M, \mathfrak{M})$ (tab. A).

Topologie produit, espace produit

Le produit cartésien d'espaces topologiques est un bon exemple de construction de nouveaux espaces à partir de plusieurs espaces topologiques. Soit $(M, \mathfrak{M})$ et $\widehat{M}, \widehat{\mathfrak{M}}$ deux espaces topologiques. Le produit cartésien $M \times \widehat{M}$ des ensembles sous-jacents M et $\widehat{M}$ peut être muni d'une topologie, construite à partir des topologies $\mathfrak{M}$ et $\widehat{\mathfrak{M}}$. L'ensemble $\mathfrak{B}_P = \{O_{\mathfrak{M}} \times O_{\widehat{\mathfrak{M}}} \mid O_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M} \wedge O_{\widehat{\mathfrak{M}}} \in \widehat{\mathfrak{M}}\}$ n'est pas une topologie sur $M \times \widehat{M}$ en général, car la propriété (O3) de la déf. 2, p. 215, n'a pas lieu d'être satisfaite (fig. B). Mais c'est cependant un système générateur d'une topologie sur $M \times \widehat{M}$ (p. 217).

Déf. 2 : La topologie $V(\mathfrak{B}_P)$, ainsi engendrée s'appelle la *topologie produit* de $\mathfrak{M}$ et $\widehat{\mathfrak{M}}$ et $(M \times \widehat{M}, V(\mathfrak{B}_P))$ est *l'espace topologique produit.*

Un ouvert de $(M \times \widehat{M}, V(\mathfrak{B}_P))$ est donc défini comme réunion d'éléments de $\mathfrak{B}_P$. De fait une partie de $\mathfrak{B}_P$ suffira : car si $\mathfrak{B}$ et $\widehat{\mathfrak{B}}$ sont des bases respectivement de $\mathfrak{M}$ et $\widehat{\mathfrak{M}}$, l'ensemble $\{B \times \widehat{B} \mid B \in \mathfrak{B} \wedge \widehat{B} \in \widehat{\mathfrak{M}}\}$ est une base de la topologie produit.

Ex. : L'ensemble des rectangles ouvert $\{]a, b[\times]c, d[\mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ est une base de la topologie produit construite sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ ($\mathbb{R}^1$ muni de $\mathfrak{N}^1$). Cette topologie produit sur $\mathbb{R}^2$ est d'ailleurs équivalente à la topologie naturelle $\mathfrak{N}^2$ (p. 216 tab. D). La figure C illustre les topologies usuelles du manchon et du tore.

Les voisinages de $x = (a, \hat{a}) \in M \times \widehat{M}$ sont les sous-ensembles de $M \times \widehat{M}$ qui contiennent une partie $U \times \widehat{U}$ telle que $U \in \mathfrak{U}(a)$ et $\widehat{U} \in \mathfrak{U}(\hat{a})$. La liaison entre l'espace topologique produit et chacun de ses facteurs est assurée par les projections surjectives $p : M \times \widehat{M} \mapsto M$ définie par $(a, \hat{a}) \mapsto a$ et $\hat{p} : M \times \widehat{M} \mapsto \widehat{M}$ définie par $(a, \hat{a}) \mapsto \hat{a}$. Elles sont continues et ouvertes. La topologie produit est la topologie *la moins fine* définie sur $M \times \widehat{M}$ pour laquelle les deux projections sont continues. On peut aussi dire que la topologie produit est la *topologie initiale engendrée* sur $M \times \widehat{M}$ par $p, \hat{p}, \mathfrak{M}, \widehat{\mathfrak{M}}$.

On peut plonger dans un espace topologique produit l'un quelconque de ses facteurs par homéomorphisme sur une certaine partie. Si on munit $M \times \{\hat{a}\}$ et $\{a\} \times \widehat{M}$ ($a \in M$, $\hat{a} \in \widehat{M}$ choisis arbitrairement) de la topologie induite par celle de l'espace topologique produit, les applications $e : M \mapsto M \times \{\hat{a}\}, x \mapsto (x, \hat{a})$ et $\hat{e} : \widehat{M} \mapsto \{a\} \times \widehat{M}, \hat{x} \mapsto (a, \hat{x})$ sont des homéomorphismes.

Les deux théorèmes suivants trouvent leur utilité dans les propriétés de certaines applications.

Th. 1 : *Une application f d'un espace topologique dans un produit de deux espaces topologiques est continue si et seulement si les deux applications $p \circ f$ et $\hat{p} \circ f$ sont continues.*

Rem. : Se donner une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ équivaut donc à se donner deux applications continues à valeurs dans $\mathbb{R}^1$ (continuité par composantes).

Th. 2 : *Si les applications $f : (M, \mathfrak{M}) \mapsto (N, \mathfrak{N})$ et $g : (\widehat{M}, \widehat{\mathfrak{M}}) \mapsto (\widehat{N}, \widehat{\mathfrak{N}})$ sont continues (ouvertes, fermées, bijectives bicontinues), il en est de même de $(f \times g) : M \times \widehat{M} \mapsto N \times \widehat{N}$, $(a, \hat{a}) \mapsto (f(a), g(\hat{a}))$, pour les topologies produits sur $M \times \widehat{M}$ et $N \times \widehat{N}$.*

Application : comme $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{N}^1)$ et $(]a, b[, \mathfrak{N}^1{}_{]a, b[})$, respectivement $(]c, d[, \mathfrak{N}^1{}_{]c, d[})$ sont homéomorphes, il en est de même de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{N}^2)$ et $(]a, b[\times]c, d[, \mathfrak{N}^2{}_{]a, b[\times]c, d[})$. Voir également le tab. D.

De même qu'on peut définir une topologie produit sur un produit cartésien de deux facteurs, on peut définir une topologie produit sur un *produit cartésien de n facteurs.* Soient $(M_1, \mathfrak{M}_1), \ldots, (M_n, \mathfrak{M}_n)$ n espaces topologiques. Alors $\{O_{\mathfrak{M}_1} \times \ldots \times O_{\mathfrak{M}_n} \mid O_{\mathfrak{M}_i} \in \mathfrak{M}_i \wedge i \in (1, \ldots, n)\}$ est un système générateur de la *topologie produit* sur $M_1 \times \ldots M_n$. Les projections $p_i : M_1 \times \ldots \times M_n \mapsto M_i$ $(i \in (1, \ldots, n))$ sont continues, et les autres propriétés vues plus haut conservent leur validité avec une formulation adaptée.

Rem. : La topologie produit sur $\mathbb{R}^n$ correspond, sans autre indication, à $\mathfrak{N}^n$. Une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est continue si, et seulement si, ses composantes sont continues.

Espace somme

Soit $(M, \mathfrak{M})$ et $(\widehat{M}, \widehat{\mathfrak{M}})$ deux espaces topologiques dont les ensembles sous-jacents sont disjoints. On peut en déduire une topologie $\mathfrak{M}_S$ sur la *réunion disjointe* $M \cup \widehat{M}$. Il est naturel de demander que les topologies induites par $\mathfrak{M}_S$ sur M, resp. $\widehat{M}$, soient $\mathfrak{M}$, resp. $\widehat{\mathfrak{M}}$. Dans ces conditions un ouvert pour la topologie $\mathfrak{M}_S$ doit être la réunion d'un ouvert de $(M, \mathfrak{M})$ et d'un ouvert de $(\widehat{M}, \widehat{\mathfrak{M}})$. On vérifie que ce choix convient effectivement.

Déf. 3 : $(M, \mathfrak{M})$ et $(\widehat{M}, \widehat{\mathfrak{M}})$ étant deux espaces topologiques dont les ensembles sous-jacents sont supposés disjoints, la topologie $\mathfrak{M}_S = \{T \mid T \subseteq M \cup \widehat{M} \wedge T \cap M \in \mathfrak{M} \wedge T \wedge \widehat{M} \in \widehat{\mathfrak{M}}\}$ est dite *topologie somme sur $M \cup \widehat{M}$.* $(M \cup \widehat{M}, \mathfrak{M}_S)$ est *l'espace topologique somme.*

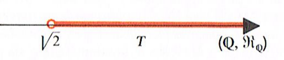
Les plongements $i : (M, \mathfrak{M}) \mapsto (M \cup \widehat{M}, \mathfrak{M}_S)$ et $\hat{\imath} : (\widehat{M}, \widehat{\mathfrak{M}}) \mapsto (M \cup \widehat{M}, \mathfrak{M}_S)$ sont continus et ouverts. $\mathfrak{M}_S$ est la topologie *la plus fine* sur $M \cup \widehat{M}$ telle que i et $\hat{\imath}$ soient continues ; c'est pourquoi l'on dit que $\mathfrak{M}_S$ est *la topologie finale engendrée* sur $M \cup \widehat{M}$ par $i, \hat{\imath}, \mathfrak{M}, \widehat{\mathfrak{M}}$.

Une application f définie sur l'espace topologique somme est continue si, et seulement si, les restrictions f / M et $f / \widehat{M}$, c'est-à-dire $f \circ i$ et $f \circ \hat{\imath}$ sont continues.

Rem. : Un espace topologique somme peut être défini de manière analogue à partir d'un nombre quelconque n d'espaces sous-jacents disjoints deux à deux $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\})$.

Le sous-espace $(\mathbb{Q}, \mathfrak{R}^1_{\mathbb{Q}})$ de $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$ n'est pas connexe.

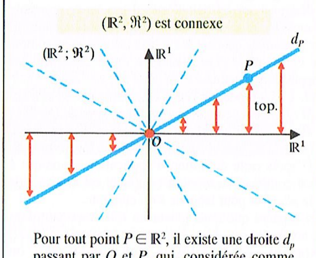
Il existe dans $(\mathbb{Q}, \mathfrak{R}^1_{\mathbb{Q}})$ des ouverts différents de $\emptyset$ et $\mathbb{Q}$ qui sont aussi fermés. Exemple : $T := \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x > \sqrt{2}\}$



Si l'on considère dans $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$ l'ouvert $A := \{x \mid x \in \mathbb{R}^1 \wedge x > \sqrt{2}\}$, on voit que $T := A \cap \mathbb{Q}$ et $T = \overline{A} \cap \mathbb{Q}$. Donc T est à la fois ouvert et fermé dans $(\mathbb{Q}, \mathfrak{R}^1)$.

A

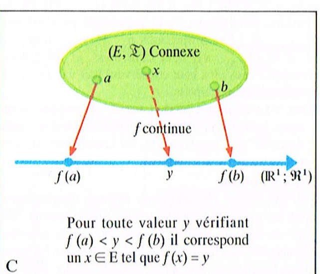
Connexité dans $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$



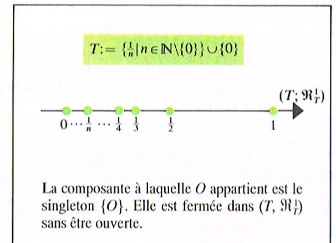
Pour tout point $P \in \mathbb{R}^2$, il existe une droite d_p passant par O et P, qui, considérée comme sous-espace, est isomorphe à $\mathbb{R}$, et donc connexe également.
Comme O appartient à toutes ces droites et que leur réunion est $\mathbb{R}^2$, $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ est connexe d'après le théoréme 3.

B

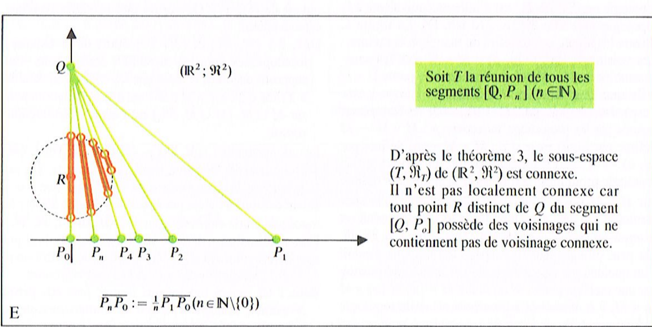
Connexité de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$



Théorème des valeurs intermédiaires



Composantes connexes



Espace non localement connexe

Intuitivement, une partie connexe d'un espace topologique évoque une partie d'un « seul tenant » (*cf.* pp. 211, 213). En fait la définition mathématique d'un espace connexe passe par celle d'un non connexe en faisant intervenir la notion de parties séparées.

Espace connexe

Déf. 1 : Soit $(E, \mathfrak{T})$ un espace topologique. Les parties A et B de E sont dites *séparées* si $\overline{A} \cap B = \emptyset$ et $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Déf. 2 : Un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ est dit *non connexe* s'il est la réunion de deux parties séparées non vides.

Un espace *connexe* est donc un espace qui n'est pas la réunion de deux parties séparées non vides.

Déf. 3 : Un *sous-ensemble* d'un espace topologique est dit *connexe* s'il est connexe pour la topologie induite.

Comme deux parties d'un sous-espace sont séparées si, et seulement si, elles sont séparées dans l'espace entier, on peut parler d'ensembles séparés sans avoir recours à tout l'espace. On peut établir les théorèmes suivants :

Th. 1 : *Un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ est connexe si, et seulement si, il contient exactement deux sous-ensembles qui soient à la fois ouverts et fermés (E et $\emptyset$).*

Th. 2 : *L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe.*

Th. 3 : *Soit T_i $(i \in I)$ des connexes de $(E, \mathfrak{T})$ ayant un point commun, alors leur réunion munie de la topologie somme est connexe.*

Th. 4 : *L'adhérence $\overline{T}$ d'un connexe T est connexe ainsi que tout ensemble A vérifiant $T \subseteq A \subseteq \overline{T}$.*

Ex. : Les connexes non réduits à un singleton de l'espace topologique connexe $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ sont explicités fig. A p. 212 ; l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est un exemple de partie non connexe (fig. A). Comme indiqué à la fig. B, on peut prouver à l'aide des théorèmes 2 et 3 que pour $n > 1$ $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ est connexe. $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ et les ε-voisinages sont des exemples de connexes de $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$.

Rem. : Concernant les applications réelles, le théorème 2 permet de montrer le *théorème des valeurs intermédiaires* (voir Analyse).

Composantes connexes

Pour étudier un espace non connexe, on fait correspondre à chaque point le plus « grand » connexe le contenant (au sens de l'inclusion). Comme le singleton $\{x\}$ est lui-même connexe, l'ensemble des connexes contenant x n'est pas vide. Et, si l'on considère la réunion de tous les connexes contenant x, on obtient précisément le plus grand connexe contenant x. Ce connexe est appelé *composante connexe de x*. Il est fermé en vertu du théorème 4. Tout point (resp. tout sous-ensemble connexe) appartient à (resp. est inclus dans) une et une seule composante connexe. La relation « x et y ont même composante connexe » est une relation d'équivalence. *On peut donc faire une partition de tout espace topologique en ses composantes connexes, qui sont des fermés deux à deux disjoints, donc séparés.*

Un espace topologique est connexe si, et seulement si, il ne possède qu'une seule composante connexe. Il découle de cette propriété le théorème suivant :

Th. 5 : *Un produit d'espaces connexes est connexe.*

Espace localement connexe

Les composantes connexes d'un espace topologique sont fermées, mais ne sont pas ouvertes en général (fig. D). Elles sont nécessairement ouvertes si tout point possède un voisinage connexe : en effet une composante connexe étant le plus grand connexe contenant l'un quelconque de ses points, sera un sur-ensemble du voisinage connexe de ce point, et par suite sera voisinage de ce point, donc ouverte.

Déf. 4 : Un espace topologique est dit *localement connexe* si tout voisinage d'un point quelconque contient un voisinage connexe de ce point.

Ex. : $[1, 2] \cup [3, 4]$ muni de la topologie induite par $\mathfrak{R}$ est localement connexe mais non connexe. La figure E montre un exemple d'espace connexe mais non localement connexe.

Th. 6 : *Un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ est localement connexe si, et seulement si, les connexes au sens de $\mathfrak{T}$ forment une base de $\mathfrak{T}$.*
$(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ est donc également localement connexe car les ε-voisinages sont connexes et forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Rem. : Contrairement aux espaces connexes, l'image d'un espace localement connexe par une application continue n'est pas nécessairement localement connexe. En revanche un produit d'espaces localement connexes est encore localement connexe.

Espace connexe par arcs

Déf. 5 : Une application continue $w : ([0, 1], \mathfrak{R}_{[0, 1]}) \to (E, \mathfrak{T})$ est appelée *arc* ou *chemin* dans E *reliant le point de départ* $w(0)$ *au point d'arrivée* $w(1)$.

Déf. 6 : Un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ est dit *connexe par arcs* quand deux points quelconques de cet espace peuvent être reliés par un arc. Un *sous-ensemble* de E est *connexe par arcs* lorsque le sous-espace topologique associé est connexe par arcs.

Ex. : $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ est connexe par arcs ; les ε-voisinages pour $n \geq 1$ et la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ pour $n \geq 2$ sont des sous-ensembles connexes par arcs.

Th. 7 : (a) *Un connexe par arcs est connexe* ; (b) *l'image d'un espace connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs* ; (c) *un produit d'espaces connexes par arcs est connexe par arcs.*

Rem. : La réciproque de (a) est fausse (p. 212, fig. B_2).

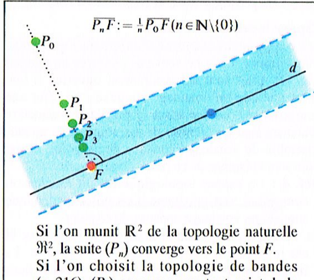
Composantes connexes par arcs

Tout espace topologique peut se décomposer en parties connexes par arcs les plus grandes possibles, appelées *composantes connexes par arcs*. Toute composante connexe par arcs est incluse dans une composante connexe.

Espace localement connexe par arcs

Un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ est *localement connexe par arcs* si tout voisinage d'un point contient un voisinage connexe par arcs de ce point. Un espace localement connexe par arcs est localement connexe. Un espace à la fois connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

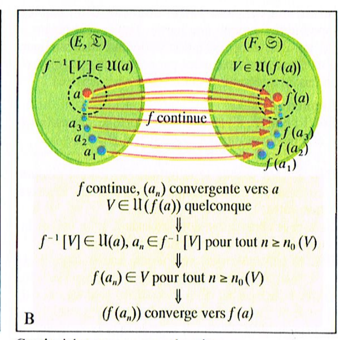
Rem : Tout ouvert connexe de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ est localement connexe par arcs, donc connexe par arcs.



Si l'on munit $\mathbb{R}^2$ de la topologie naturelle $\mathfrak{R}^2$, la suite (P_n) converge vers le point F.
Si l'on choisit la topologie de bandes (p. 216), (P_n) converge vers tout point de la droite d.

A

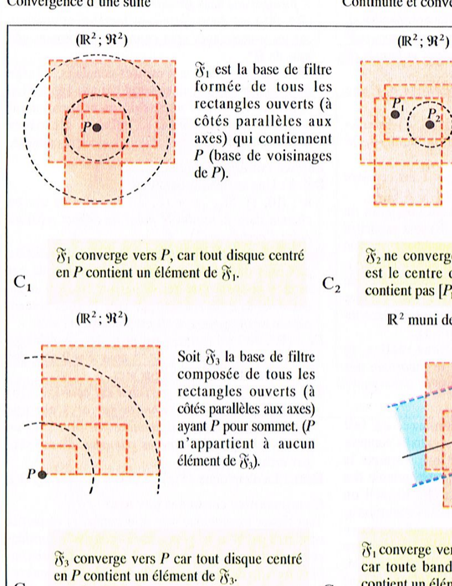
Convergence d'une suite



f continue, (a_n) convergente vers a
$V \in \mathfrak{U}(f(a))$ quelconque
$\Downarrow$
$f^{-1}[V] \in \mathfrak{U}(a)$, $a_n \in f^{-1}[V]$ pour tout $n \geq n_0(V)$
$\Downarrow$
$f(a_n) \in V$ pour tout $n \geq n_0(V)$
$\Downarrow$
$(f(a_n))$ converge vers $f(a)$

B

Continuité et convergence de suites



$(\mathbb{R}^2 ; \mathfrak{R}^2)$

$\mathfrak{F}_1$ est la base de filtre formée de tous les rectangles ouverts (à côtés parallèles aux axes) qui contiennent P (base de voisinages de P).

$\mathfrak{F}_1$ converge vers P, car tout disque centré en P contient un élément de $\mathfrak{F}_1$.

C_1

$(\mathbb{R}^2 ; \mathfrak{R}^2)$

Soit $\mathfrak{F}_2$ la base de filtre composée de tous les rectangles ouverts (à côtés parallèles aux axes) qui contiennent P_1 et P_2. Tous ces rectangles contiennent le segment $P_1 P_2$.

$\mathfrak{F}_2$ ne converge pas car tout point de $\mathbb{R}^2$ est le centre d'un disque ouvert qui ne contient pas $[P_1, P_2]$.

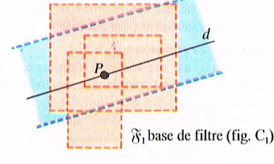
C_2

Soit $\mathfrak{F}_3$ la base de filtre composée de tous les rectangles ouverts (à côtés parallèles aux axes) ayant P pour sommet. (P n'appartient à aucun élément de $\mathfrak{F}_3$).

$\mathfrak{F}_3$ converge vers P car tout disque centré en P contient un élément de $\mathfrak{F}_3$.

C_3

$\mathbb{R}^2$ muni de la topologie de bandes



$\mathfrak{F}_1$ base de filtre (fig. C_1)

$\mathfrak{F}_1$ converge vers tout point de la droite d, car toute bande autour d'un point de d contient un élément de $\mathfrak{F}_1$.

C_4

Bases de filtre, convergence d'une base de filtre

Convergence d'une suite

Dans tout espace topologique, on peut définir la convergence d'une suite.

Déf. 1 : Soit $(E, \mathfrak{T})$ un espace topologique et (a_n) une suite de E. On dit que (a_n) *converge* vers $a \in E$ si pour tout voisinage $V \in \mathfrak{U}(a)$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $a_n \in V$.

Contrairement à l'analyse réelle la notion de convergence de suite n'est *plus univoque* en général, c.-à-d. qu'il n'y a plus nécessairement unicité de la limite (fig. A). La topologie choisie joue donc un rôle essentiel. L'unicité de la limite n'est assurée que dans des espaces topologiques particuliers, comme les espaces de HAUSDORFF (p. 227), qui comprennent par exemple les espaces métriques.

Continuité et convergence d'une suite

Comme en analyse réelle on a le résultat suivant : une application continue f d'un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ dans un espace topologique $(F, \mathfrak{S})$ conserve la convergence des suites, c.-à-d. que si (a_n) est une suite dans E qui converge vers a, alors la suite image correspondante $(f(a_n))$ converge vers $f(a)$ dans F (fig. B). Mais réciproquement, pour des espaces topologiques quelconques, f n'est *pas nécessairement* continue si pour toute suite (a_n) convergeant vers a, $(f(a_n))$ converge vers $f(a)$. Cette réciproque est néanmoins possible dans certains cas particuliers.

Th. 1 : *Soit $(E, \mathfrak{T})$ et $(F, \mathfrak{S})$ des espaces topologiques, et $a \in E$ possédant une base de voisinages dénombrable. Alors $f : (E, \mathfrak{T}) \to (F, \mathfrak{S})$ est continue en a si, et seulement si, pour toute suite (a_n) convergeant vers a, la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(a)$.*

Par suite, la continuité d'une fonction définie sur un espace métrique à valeurs dans un espace topologique quelconque peut être caractérisée à l'aide des suites. Pour un espace de départ quelconque on ne peut a priori utiliser les suites. C'est pourquoi on est amené à introduire d'autres notions.

Bases de filtre, convergence de bases de filtre

Si l'on introduit pour une suite (a_n) la famille $\mathfrak{E}$ de tous les ensembles $E_k := \{a_n \mid n \geq k\}$, il résulte de la définition 1 :

(a_n) converge vers a si, et seulement si, tout élément de $\mathfrak{U}(a)$ contient un élément de $\mathfrak{E}$.

On peut de même caractériser la continuité d'une application f en a en introduisant l'ensemble de parties $f[\mathfrak{U}(a)] := \{f[U] \mid U \in \mathfrak{U}(a)\}$ et en utilisant la propriété L3, p. 218, fig. B.

f est continue en a si, et seulement si, tout élément de $\mathfrak{U}(f(a))$ contient un élément de $f[\mathfrak{U}(a)]$.

Si l'on compare $\mathfrak{E}$ et $f[\mathfrak{U}(a)]$, des propriétés communes se dégagent qui suggèrent la définition suivante :

Déf. 2 : Une partie B non vide de $\mathfrak{P}(E)$ est dite *base de filtre* sur E si $\emptyset \notin B$ et si l'intersection de deux éléments de B contient un élément de B.

Ex. : $\mathfrak{E}$, $f[\mathfrak{U}(a)]$ sont des bases de filtre, ainsi que $\mathfrak{U}(a)$ et toute base de voisinages. L'image d'une base de filtre par une application quelconque est une base de filtre. La fig. C contient d'autres exemples.

Une base de filtre telle que $\mathfrak{E}$ est appelée base de filtre élémentaire.

Rem. : Si dans la définition on pose comme condition supplémentaire que tout sur-ensemble d'un élément de B appartient à B, on obtient ce qu'on appelle un *filtre*. On entend par là un sous-ensemble non vide $B \subseteq \mathfrak{P}(E)$ qui ne contient pas l'ensemble vide mais contient l'intersection de deux quelconques de ses éléments et tout sur-ensemble de n'importe lequel de ses éléments. Tout filtre est donc une base de filtre.

On peut maintenant définir la convergence d'une base de filtre, qui dans le cas particulier d'une base de filtre élémentaire rejoint la définition 1.

Déf. 3 : Soit $(E, \mathfrak{T})$ un espace topologique. Une *base de filtre B* sur E est dite *convergente* vers $a \in E$ si tout élément de $\mathfrak{U}(a)$ contient un élément de B.

Ex. : La base de filtre élémentaire d'une suite convergeant vers a converge vers a (et réciproquement : une suite converge vers a si sa base de filtre élémentaire converge vers a). Toute base de voisinages de a ainsi que l'ensemble des voisinages de a convergent vers a. La figure C apporte d'autres exemples.

On a le résultat suivant concernant l'unicité de la limite :

Th. 2 : *Une base de filtre admet au plus une limite si, et seulement si, l'espace est de* HAUSDORFF (p. 227).

On obtient à l'aide de la définition 3 le théorème suivant relatif à la continuité.

Th. 3 : *$f : (E, \mathfrak{T}) \to (F, \mathfrak{S})$ est continue en $a \in E$ si, et seulement si, $f[\mathfrak{U}(a)]$ converge vers $f(a)$.*

Comparaison de bases de filtre

On montre en analyse que toute sous-suite d'une suite convergente vers a converge également vers a. On transpose la notion de sous-suite aux bases de filtre à l'aide de la propriété suivante : tout élément de la base de filtre élémentaire d'une suite contient toujours un élément de celle d'une sous-suite (on dit que la base de filtre élémentaire d'une sous-suite est « plus fine » que celle de la suite). On peut généraliser avec la définition suivante :

Déf. 4 : La base de filtre B_1 est plus fine que la base de filtre B_2 si tout élément de B_2 contient un élément de B_1.

On démontre aisément le théorème 4.

Th. 4 : *Si une base de filtre B_1 est plus fine qu'une base de filtre B_2 et si B_2 converge vers a, alors B_1 converge aussi vers a.*

Appliqué aux suites convergentes, le théorème 4 implique la convergence de leurs sous-suites.

Suites généralisées

Déf. 5 : Un ensemble non vide A est dit *filtrant supérieurement* si A est ordonné et si $\forall (x, y) \in A^2$, $\exists z \in A$ tel que $z \geq x$ et $z \geq y$. Toute application de A dans un ensemble E est appelée *suite généralisée*. Si E est muni d'une topologie $\mathfrak{T}$, une telle suite $x \to u_x$ est dite convergente vers l, si pour tout voisinage $v(l)$ il existe $x_v \in A$ tel que $\forall x \geq x_v$ on ait $u_x \in v(l)$.

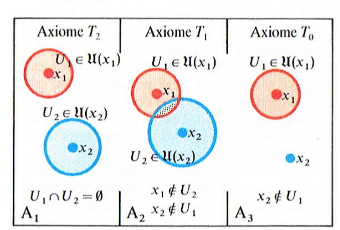
Les résultats sont analogues pour un ensemble filtrant inférieurement. Ces notions contiennent celles de suite et de limite de suite.

Toute base de filtre B est un ensemble filtrant inférieurement pour la relation d'inclusion :
$\forall (x, y) \in B^2$, il existe $z \in B$ tel que $z \subset x \cap y$. Une suite généralisée *indexée par B* est une « suite » de la forme (u_x), avec $x \in B$, $u_x \in x$.

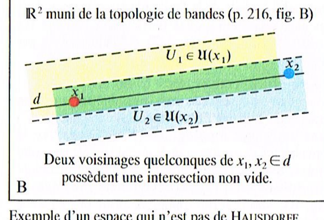
Th. 5 : *Pour qu'une base de filtre B converge vers un élément a, il faut et il suffit que toute suite généralisée indexée par B converge vers a.*

Soit alors f appliquant $(E, \mathfrak{T})$ dans $(F, \mathfrak{S})$. Si B est une base de voisinages de $a \in E$, B est une base de filtre sur E et $f(B)$ une base de filtre B' sur F. B' tend vers $f(a)$ si toute suite généralisée indexée par B' tend vers $f(a)$. On a alors :

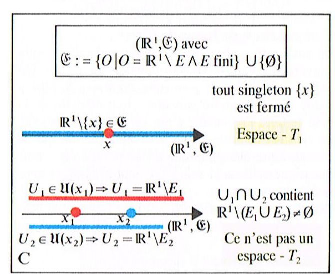
Th. 6 : *f est continue en a si, et seulement si, l'image par f de toute suite généralisée indexée par B, base de voisinages de a, converge vers $f(a)$.*



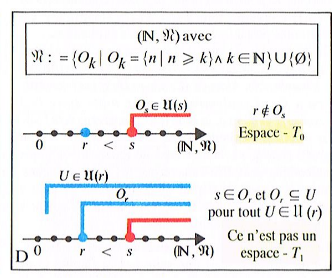
Axiomes de séparation T_2, T_1, T_0



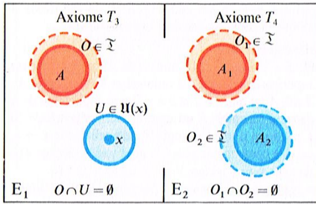
Exemple d'un espace qui n'est pas de HAUSDORFF



Espace -T_1, sans l'axiome T_2



Espace -T_0 sans l'axiome T_1



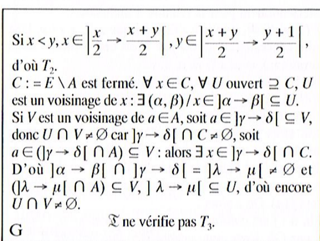
Axiomes de séparation T_3, T_4

$(E, \mathfrak{T})$ avec
$E :=]0, 1[\cap \mathbb{Q}$, $\mathfrak{T}$ engendrée par les $]\alpha, \beta[\cap \mathbb{Q}$, $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$, et
$A := \{k \cdot 2^{-n}\} \cap E, (k, n) \in \mathbb{N}^2$.

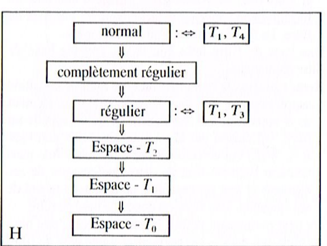
On pose $]\alpha \to \beta[:=]\alpha, \beta[\cap \mathbb{Q}$. $\mathfrak{T}$ admet comme base l'ensemble des parties non vides
$\{\forall (\alpha < \beta) \quad]\alpha \to \beta[,]\alpha \to \beta[\cap A\}$.

F (Suite en G)

Espace - T_2 sans l'axiome T_3


Si $x < y$, $x \in \left]\frac{x}{2} \to \frac{x+y}{2}\right[$, $y \in \left]\frac{x+y}{2} \to \frac{y+1}{2}\right[$, d'où T_2.
$C := E \setminus A$ est fermé. $\forall x \in C$, $\forall U$ ouvert $\supseteq C$, U est un voisinage de x : $\exists (\alpha, \beta) / x \in]\alpha \to \beta[\subseteq U$.
Si V est un voisinage de $a \in A$, soit $a \in]\gamma \to \delta[\subseteq V$, donc $U \cap V \neq \emptyset$ car $]\gamma \to \delta[\cap C \neq \emptyset$, soit $a \in (]\gamma \to \delta[\cap A) \subseteq V$: alors $\exists x \in]\gamma \to \delta[\cap C$.
D'où $]\alpha \to \beta[\cap]\gamma \to \delta[=]\lambda \to \mu[\neq \emptyset$ et $(]\lambda \to \mu[\cap A) \subseteq V$, $]\lambda \to \mu[\subseteq U$, d'où encore $U \cap V \neq \emptyset$.
$\mathfrak{T}$ ne vérifie pas T_3.
G

(Suite de F)



Résumé

Sans condition supplémentaire sur les ensembles ouverts, la structure des espaces topologiques est encore trop générale pour que l'on puisse en tirer une théorie « utilisable » (*cf.* unicité de la limite p. 223). À l'aide de nouveaux axiomes (axiomes de séparation), on arrive à des espaces topologiques particuliers dont la structure met en évidence des relations avec celle des espaces métriques.

Espaces de HAUSDORFF, axiomes T_0, T_1, T_2

Les espaces de HAUSDORFF sont des espaces dans lesquels les bases de filtre (resp. les suites) admettent au plus une limite.

Déf. 1 : Un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ est dit *de* HAUSDORFF (*espace de* HAUSDORFF *ou espace-T_2*) s'il existe pour tous $x_1, x_2 \in E$ distincts deux voisinages $U_1 \in \mathfrak{U}(x_1)$ et $U_2 \in \mathfrak{U}(x_2)$ tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

La propriété qui définit les espaces de HAUSDORFF est aussi appelée *axiome T_2* (fig. A_1) ou *axiome de séparation de* HAUSDORFF.

Ex. : Tout espace métrique muni de la topologie métrique est de HAUSDORFF, donc en particulier $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$; en revanche $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie de bandes n'est pas de HAUSDORFF (fig. B).

Th. 1 : *soit $(E, \mathfrak{T})$ un espace topologique. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(a) $(E, \mathfrak{T})$ est de HAUSDORFF.
(b) toute base de filtre admet au plus une limite.
(c) pour tout $x \in E$, l'intersection de tous les voisinages fermés de x est le singleton $\{x\}$.
(d) la diagonale définie par $D := \{(x, x) \mid x \in E\}$ est un fermé dans l'espace produit $E \times E$.

Application : Si f et g sont des applications continues de $(E, \mathfrak{T})$ dans un espace de HAUSDORFF et si f et g coïncident sur un sous-ensemble dense dans E (p. 214, tab. C), alors $f = g$. Si l'on considère une application continue $f : (\mathbb{R}, \mathfrak{R}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{R})$, il suffit de la définir sur $\mathbb{Q}$ pour la connaître entièrement, car $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

De (c) on tire que dans un espace de HAUSDORFF tous les singletons et par suite tous les ensembles finis sont fermés (propriétés (A2) et (A3) p. 214, fig. C). Mais réciproquement un espace topologique dans lequel tous les singletons $\{x\}$ sont fermés n'est pas nécessairement un espace de HAUSDORFF (fig. C). Un espace de ce type est caractérisé par la propriété suivante : *si deux points sont distincts, chacun d'eux possède un voisinage qui ne contient pas l'autre* (*axiome T_1*, fig. A_2). Il est appelé *espace-T_1*. Un espace-T_2 est toujours un espace-T_1, mais la réciproque est fausse (fig. C). De l'axiome T_1 s'ensuit l'*axiome T_0 : de deux points distincts quelconques, l'un au moins possède un voisinage qui ne contient pas l'autre* (fig. A_3). Il existe des espaces-T_0 qui ne satisfont pas à l'axiome T_1 (fig. D).

Rem. : $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie de bandes ne satisfait à aucun de ces axiomes de séparation.

Espace régulier, axiome T_3

Alors qu'avec les axiomes T_0, T_1, T_2 ce sont deux points distincts qui sont séparés, avec l'*axiome T_3* on exige la séparation entre tout fermé et ses points extérieurs (fig. E_1) :

Pour tout fermé F et pour tout point x extérieur à F, il existe un ouvert contenant F et un voisinage de x ne rencontrant pas cet ouvert.

L'axiome T_3 pris seul n'est pas une version plus fine de l'axiome T_2. En revanche, associé à l'axiome T_1, il entraîne l'axiome T_2.

Déf. 2 : Un espace topologique est *régulier* s'il satisfait aux axiomes T_1 et T_3.

Ex : Tout espace métrique est régulier. Tout espace régulier est de HAUSDORFF. La réciproque est fausse car il existe des espaces de HAUSDORFF non réguliers (tab. F).

Th. 2 : *(a) un espace-T_1 est régulier si, et seulement si, en tout point x les voisinages fermés de x forment une base de voisinages de x.*
(b) un espace-T_1 est régulier si, et seulement si, pour tout voisinage U d'un point x quelconque, il existe un voisinage ouvert V de x tel que $\overline{V} \subseteq U$.

Espace normal, axiome T_4

On pose comme *axiome T_4* :

Quels que soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints, il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 les contenant respectivement (fig. E_2).

Cet axiome assure donc la séparation de fermés disjoints. Par ailleurs la régularité est également une conséquence des axiomes T_1 et T_4.

Déf. 3 : Un espace topologique est dit *normal* s'il satisfait aux axiomes T_1 et T_4.

Ex. : Tout espace métrique est normal, de même que tout espace compact (p. 229). Tout espace normal est régulier. La réciproque est fausse, il existe des espaces réguliers non normaux.

La caractérisation suivante des espaces normaux à l'aide des applications réelles continues est importante :

Th. 3 (URYSOHN) : *un espace-T_1 $(E, \mathfrak{T})$ est normal si, et seulement si, quels que soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints, il existe une application continue $f : (E, \mathfrak{T}) \to ([0, 1], \mathfrak{R}_{[0, 1]})$ telle que pour tout $x \in F_1$, $f(x) = 0$ et pour tout $x \in F_2$, $f(x) = 1$.*

Espace complètement régulier

Si dans un espace normal $(E, \mathfrak{T})$, on choisit $x \in E$ et un voisinage $U \in \mathfrak{U}(x)$, alors il existe un $O_{\mathfrak{T}} \in \mathfrak{T}$ avec $x \in O_{\mathfrak{T}} \subseteq U$ et l'on peut appliquer le théorème 3 aux fermés $\{x\}$ et $E \setminus O_{\mathfrak{T}}$. Comme $E \setminus U \subseteq E \setminus O_{\mathfrak{T}}$ on obtient le résultat suivant :

(ECR) : *Pour tout $x \in E$ et tout voisinage $U \in \mathfrak{U}(x)$, il existe une application continue $f : (E, \mathfrak{T}) \to ([0, 1], \mathfrak{R}_{[0, 1]})$ telle que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$ pour tout $y \in E \setminus U$.*

Déf. 4 : Un espace topologique possédant la propriété (ECR) est dit *complètement régulier.*

Un espace normal est donc complètement régulier. Il est facile de vérifier qu'un espace complètement régulier est régulier. Par suite, tout espace normal est régulier.

Résumé

L'arbre du tableau H précise les relations entre les diverses notions introduites. On peut encore ajouter que les sous-espaces ou espaces produits d'espaces-T_0-T_1-T_2, réguliers ou complètement réguliers sont des espaces du même type. Les sous-espaces d'espaces normaux ne sont pas normaux en général. Si dans un espace normal tout sous-espace est normal, alors cet espace est dit *complètement normal* (par ex. les espaces métriques). La propriété d'être un espace-T_i (i = 0, 1, 2, 3, 4) est un invariant topologique.

$(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$ n'est pas quasi compact

$\mathfrak{D}_1 := \{\,]-n, n[\;|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$.
La réunion d'un nombre fini d'éléments de $\mathfrak{D}_1$ reste dans un intervalle strictement inclus dans $\mathbb{R}$.

$(]0, 1[, \mathfrak{R}^1_{]0,1[})$ n'est pas quasi compact

$\mathfrak{D}_2 := \left\{\left]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right[\;|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}\right\}$ est un recouvrement ouvert de $]0, 1[$ qui ne contient pas de recouvrement fini de $]0, 1[$.

$\mathfrak{D}_1$ … $-n$ … -3 -2 -1 0 1 2 3 … n $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$

$\mathfrak{D}_2$ 0 … $\frac{1}{n}$ … $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ … $1-\frac{1}{n}$ … 1 $(]0, 1[, \mathfrak{R}^1_{]0,1[})$

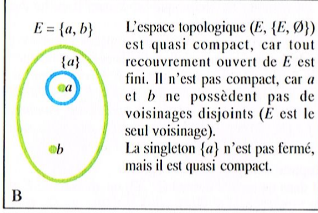
A_1

$\mathbb{R}^1$ $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ top. $\mathbb{R}^1$
parties non quasi compactes (th. 2, th. 1)
A_2

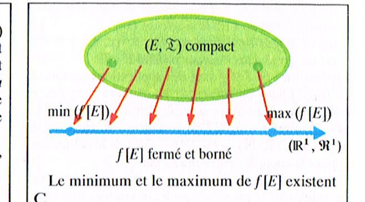
$\mathbb{R}^1$ $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ top. $\mathbb{R}^1$
parties compactes (th.2, th.1)
A_3

$\mathbb{R}^1$ $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ d top. $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$
parties fermées, non quasi compactes (th.1)
A_4

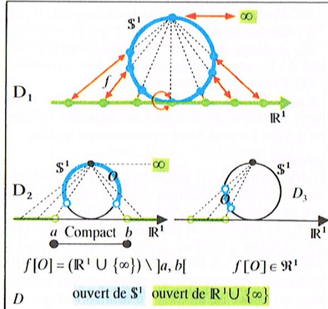
Quasi compacité dans $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$ et $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$



Espace quasi compact non compact



Théorème du maximum et du minimum



ouvert de $\mathbb{S}^1$ ouvert de $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$

$\mathbb{S}^1$ est compacte car fermée bornée (munie de la topologie induite $\mathfrak{R}^2_{\mathbb{S}^1}$)

$f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ est bijective (fig. D_1)

L'application f bijective de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ réalise un homéomorphisme entre le compact $(\mathbb{S}^1, \mathfrak{R}^2_{\mathbb{S}^1})$ et l'espace $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ muni de la topologie finale (p. 219), lequel est donc un compact. Les figures D_2 et D_3 illustrent de façon simple le fait que la topologie de $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ est constituée des ouverts de $\mathfrak{R}^1$ et des complémentaires des compacts de $\mathbb{R}^1$ dans $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$. La restriction à $\mathbb{R}^1$ de cette topologie s'identifie à $\mathfrak{R}^1$, si bien que $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$ est sous-espace topologique du plan dit achevé.

Compactification avec un point de $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$

On peut imposer d'autres conditions aux espaces topologiques que les axiomes de séparation, par exemple des propriétés de *recouvrement*. On obtient ainsi des espaces normaux particuliers : les espaces *compacts* et *localement compacts*. On définit initialement ces concepts dans des espaces topologiques quelconques qui possèdent en analyse réelle cette propriété importante : tout fermé borné de $\mathbb{R}$ (et plus généralement de $\mathbb{R}^n$) peut être mis en évidence à l'aide de recouvrements.

Espace quasi compact, espace compact

Déf. 1 : soit E un ensemble et $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{P}(E)$. $\mathfrak{D}$ est un *recouvrement* de E si, et seulement si, $E = \bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D$.

$\mathfrak{D}$ s'appelle un recouvrement *fini* (resp. dénombrable) si $\mathfrak{D}$ est fini (resp. dénombrable). $\mathfrak{D}$ est un recouvrement *ouvert* (resp. fermé) de l'espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ si tous les éléments de $\mathfrak{D}$ sont ouverts (resp. fermés).

Déf. 2 : Un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ est dit *quasi compact* si tout recouvrement ouvert de E contient un recouvrement fini de E. On appelle compact un espace-T_2 quasi compact.

Par conséquent, $(E, \mathfrak{T})$ n'est pas quasi compact si l'on peut trouver un recouvrement ouvert de E dont on ne puisse pas extraire de recouvrement fini de E.

Ex. : fig. A_1.

Il existe des quasi compacts non compacts (fig. B).

Déf. 3 : Dans un espace topologique, une *partie* est dite *quasi compacte* (resp. *compacte*) si, munie de la topologie induite, elle est quasi compacte (resp. compacte).

Un quasi compact d'un espace-T_2 est compact car tout sous-espace d'un espace-T_2 est un espace-T_2 (p. 227). Ceci est vrai notamment pour les sous-ensembles de l'espace-T_2 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$.

La quasi compacité possède les deux propriétés remarquables suivantes :

Th. 1 : *L'image d'un quasi compact par une application continue est un quasi compact.*

Th. 2 (th. de Tychonoff) : *Un espace produit est quasi compact (compact) si, et seulement si, les facteurs sont quasi compacts (compacts).*

Ex. : Comme $]0, 1[$ et $]a, b[$ sont des sous-espaces de $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ isomorphes (p. 212, fig. A), aucun intervalle ouvert n'est quasi compact puisque $]0, 1[$ ne l'est pas (ill. A_1). En revanche, tous les segments $[a, b]$ sont des compacts, de même que tous les ensembles finis. On déduit du théorème 2 que $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ n'est pas quasi compact. La figure A développe des cas pris dans $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$; ils se généralisent à $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$.

On ne trouve dans les exemples aucun quasi compact *ouvert*. En fait, dans $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$, seuls les fermés peuvent être compacts, car $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ est un espace-T_2. On a d'une manière générale :

Th. 3 : *Dans un espace-T_2, tout compact est fermé.*

Cependant, dans un espace-T_2, tout fermé n'est pas pour autant compact (fig A_4). C'est le cas néanmoins dans des espaces compacts car on a :

Th. 4 : *Dans un espace compact, un sous-ensemble est compact si, et seulement si, il est fermé.*

Rem. : Il existe des espaces quasi compacts non compacts qui possèdent des quasi compacts non fermés (fig. B).

Dans un espace compact, les termes « fermé » et « compact » sont donc équivalents, d'où les théorèmes suivants.

Th. 5 : *Lorsqu'il existe une application continue, bijective, d'un espace quasi compact sur un espace-T_2, alors cette application est un homéomorphisme, et les deux espaces sont compacts.*

Rem. : Le théorème sert par exemple pour l'étude des espaces quotients (p. 221) et la théorie des courbes (p. 235).

Th. 6 : *Un espace compact est normal.*

Rem. : Tout espace normal n'est pas forcément compact, par exemple $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$.

Compacts de $\mathbb{R}^n$

Dans l'espace non quasi compact $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$, la fermeture n'est pas suffisante pour caractériser les compacts. Les sous-ensembles doivent posséder une propriété supplémentaire : ils doivent être bornés.

Déf. 4 : Une partie de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ est dite bornée si elle est contenue dans un pavé *fermé*
$[a, b]^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in [a, b], (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On peut énoncer (*cf.* fig. D) :

Th. 7 : *Une partie de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ est un compact si, et seulement si, elle est fermée bornée.*

Rem. : 1) Si f est une application continue d'un compact K dans $\mathbb{R}$, $f(K)$ est un compact, donc f est bornée et atteint ses bornes (fig. C). C'est le th. du maximum et du minimum (voir Analyse).
2) D'une manière générale, tout compact métrique est fermé borné, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Propriété de Bolzano-Weierstrass

On dit qu'un espace topologique possède la *propriété de* Bolzano-Weierstrass si
(BW) Toute partie infinie possède au moins un point d'accumulation.

Th. 8 : (a) *Un quasi compact possède la propriété (BW).*
(b) *Dans un espace métrique, une partie est compacte si, et seulement si, elle possède la propriété (BW).*

Rem. : Il existe des espaces non quasi compacts qui possèdent la propriété (*BW*).

Espace localement compact

L'espace-T_2 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ n'est pas compact, mais tout point est contenu dans un voisinage compact (un pavé par exemple).

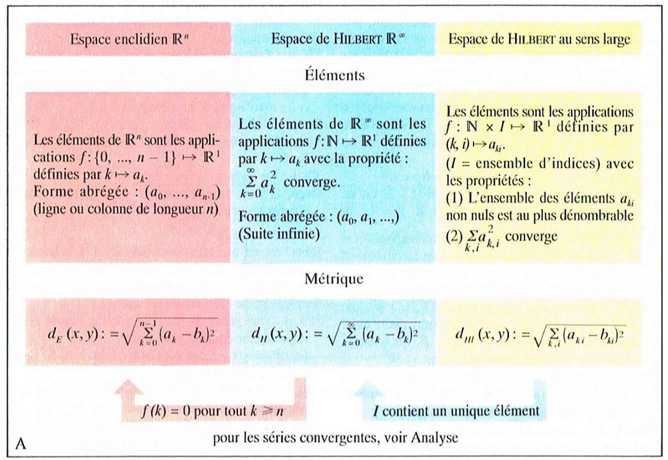
Déf. 5 : Un espace-T_2 est dit *localement compact* si tout point possède un voisinage compact.

Tout compact est localement compact, mais la réciproque est fausse, comme pour $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ par ex. Tout espace localement compact est régulier, mais n'est pas en général normal.

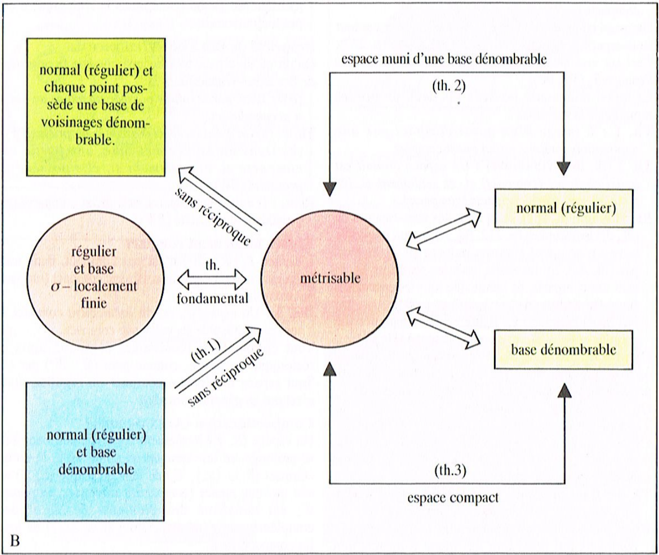
Compactification (Alexandroff)

Un espace $(E, \mathfrak{T})$ localement compact, non compact, se prolonge, en lui rajoutant un point $x_\infty \notin E$, en un compact $(E \cup \{x_\infty\}, \mathfrak{T}_c)$ de telle sorte que $(E, \mathfrak{T})$ en soit un sous-espace (*compactification avec un point*). $\mathfrak{T}_c$ est constitué des éléments de $\mathfrak{T}$ et des complémentaires (relativement à $E \cup \{x_\infty\}$) de tous les compacts de E.

Ex. : fig. D.



Espace de Hilbert



Théorèmes de métrisation

Position du problème

Dans un espace métrique (E, d), la topologie métrique $\mathfrak{T}_d$ est construite à partir de la distance d (p. 217). Sur tout ensemble non vide, il existe au moins une distance : celle-ci permet donc de définir une topologie métrique ; par exemple la distance $d(x, y) := 0$ pour $x = y$ et $d(x, y) := 1$ pour $x \neq y$ définit la topologie discrète (p. 215). Des distances différentes peuvent définir la même topologie.

La question se pose de savoir si toute topologie peut être définie à partir d'une distance (*problème de métrisation*).

Déf. 1 : Un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ est dit *métrisable* s'il existe une distance d sur E, telle que la topologie $\mathfrak{T}_d$ définie par d coïncide avec $\mathfrak{T}$.

Un espace métrisable possède par conséquent les propriétés communes à tous les espaces métriques, en particulier c'est un espace-T_2. Tout espace topologique n'est donc pas métrisable. Ainsi $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie de bandes (p. 216, fig. B), n'est pas métrisable, car ce n'est pas un espace-T_2.

Poser le problème de la métrisation revient donc à trouver des conditions de métrisabilité. Le problème est complètement résolu au moyen du théorème fondamental (voir ci-dessous). Il y a des théorèmes auxiliaires pour la métrisabilité d'espaces topologiques particuliers.

Théorèmes de métrisation

Dans ce contexte, les propriétés les plus importantes des espaces topologiques sont

(I) la normalité (p. 227),

(II) tout point possède une base de voisinages dénombrable (p. 217).

Un espace métrisable doit dans tous les cas remplir les conditions (I) et (II). Il existe néanmoins des espaces qui satisfont à (I) et (II) mais qui ne sont pas métrisables. Les conditions ne sont donc pas encore assez spécifiques.

La condition suivante est plus spécifique que (II) :

(II′) la topologie possède une base dénombrable.

Si (II′) est remplie, (II) l'est aussi.

Si un espace topologique satisfait à (I) et (II′), il est métrisable, soit :

Th. 1 (Urysohn) : *Un espace topologique normal muni d'une base dénombrable est métrisable.*

Lors de la démonstration du théorème, on montre qu'un espace normal muni d'une base dénombrable est homéomorphe à un sous-espace de l'espace de Hilbert $\mathbb{R}^\infty$ (tab. A). L'espace de Hilbert est métrique, et avec lui tous ses sous-espaces, de telle sorte que tout espace homéomorphe à un de ses sous-espaces est également métrique.

On déduit du théorème 1 et de la propriété (I) le théorème suivant :

Th. 2 : *Un espace topologique muni d'une base dénombrable est métrisable si, et seulement si, il est normal.*

Rem. : Dans un espace muni d'une base dénombrable, les notions de métrisabilité et de normalité sont donc équivalentes. La régularité et la normalité sont également équivalentes ; on peut donc remplacer « normal » par « régulier » dans les théorèmes 1 et 2.

Comme tout espace compact est normal (th. 8 p. 229), d'après le théorème 1 précédent, s'il possède une base dénombrable, il est métrisable. À l'aide du théorème 8, p. 229, on montre en outre qu'un espace compact et métrisable possède une base dénombrable ; il s'ensuit :

Th. 3 (Urysohn) : *Un espace topologique compact est métrisable si, et seulement si, il possède une base dénombrable.*

Rem. : La métrisabilité et la propriété de posséder une base dénombrable sont donc équivalentes dans les espaces compacts.

Le théorème 1 ne résout pas le problème de métrisation de manière satisfaisante car il contient des conditions *suffisantes* mais qui ne sont *pas nécessaires* (il existe des espaces métriques qui ne satisfont pas à (II′)). On pourra considérer le problème de métrisation comme résolu une fois qu'on aura trouvé des conditions à la fois nécessaires et suffisantes, qui soient donc équivalentes aux conditions de métrisabilité de la définition 1. De telles conditions se situent par conséquent « entre » celles du théorème 1 et les propriétés (I) et (II).

Déf. 2 : Une famille de parties d'un espace topologique est dite *localement finie* si tout point de l'espace topologique admet un voisinage ayant une intersection non vide avec au plus un nombre fini d'éléments de la famille.

Une base d'un espace topologique est dite *σ-localement finie* si elle est une réunion au plus dénombrable de familles localement finies d'ouverts.

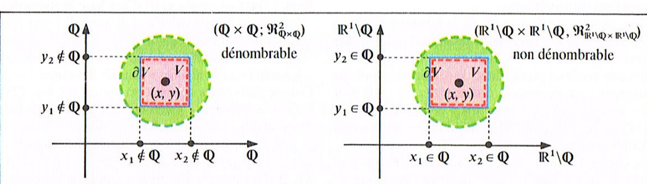
Théorème fondamental (Smirnow-Nagata-Bing) :

Un espace topologique est métrisable si, et seulement si, il est régulier et possède une base σ-localement finie.

Déf. 3 : Un espace-T_2 est dit *paracompact* si pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{D}$, il existe un recouvrement ouvert localement fini $\mathfrak{D}'$ dont chaque élément est inclus dans un élément de $\mathfrak{D}$.

Rem. : La notion de paracompacité se situe «entre» la compacité et la normalité, car tout espace compact est paracompact et tout espace paracompact est normal. Il existe des espaces paracompacts non métrisables. La paracompacité et la métrisabilité sont des notions équivalentes dans une certaine classe d'espaces topologiques. Il s'agit des *espaces localement métrisables*, espaces dans lesquels tout point possède un voisinage ouvert, qui est métrisable pour la topologie induite.

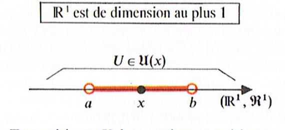
Rem. : La figure B montre une vue d'ensemble des théorèmes de métrisation.



Tout voisinage U de (x, y) contient un disque ouvert centré en (x, y), sur-ensemble lui-même d'un rectangle V contenant (x, y), dont les sommets ont des coordonnées irrationnelles, resp. rationnelles si bien que ∂V est vide.

A

Sous-espaces de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ de dimension O

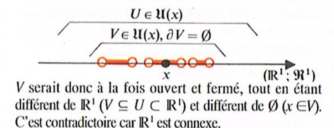


Tout voisinage U de x contient un voisinage ouvert de x, de sorte que U contient aussi un intervalle ouvert $]a,b[$ contenant x, intervalle dont la frontière est le sous-espace $\{a, b\}$ de dimension 0.

$\mathbb{R}^1$ n'est pas de dimension 0

Démonstration par l'absurde

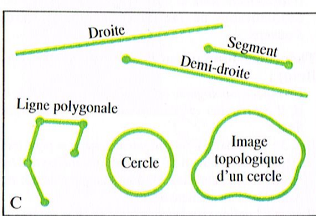
Si $\mathbb{R}^1$ était de dimension 0, en considérant un point x dans $\mathbb{R}^1$ et un voisinage U de x, différent de $\mathbb{R}^1$, on pourrait trouver dans U un voisinage V de x de frontière ∂V vide.



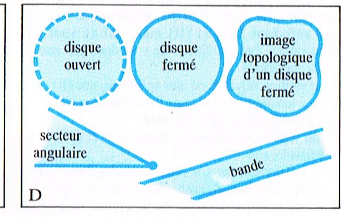
V serait donc à la fois ouvert et fermé, tout en étant différent de $\mathbb{R}^1$ ($V \subseteq U \subset \mathbb{R}^1$) et différent de $\emptyset$ ($x \in V$). C'est contradictoire car $\mathbb{R}^1$ est connexe.

B

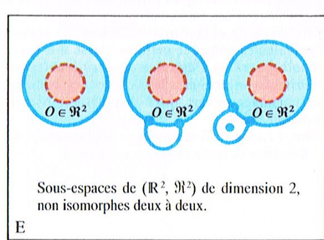
Dimension de $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$



Sous-espaces de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ de dimension 1



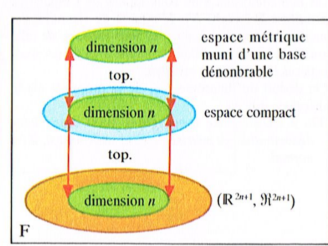
Sous-espaces de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ de dimension 2



Sous-espaces de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ de dimension 2, non isomorphes deux à deux.

E

Application du théorème 5



Théorème d'immersion

Dimension algébrique et topologie

Un des problèmes difficiles de la topologie a été de savoir si les espaces topologiques $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ et $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{R}^m)$ étaient ou n'étaient pas homéomorphes pour $n \neq m$, par exemple $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ et $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$. BROUWER fut le premier à montrer que (*cf.* p. 249) :

Th. 1 : $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ *et* $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{R}^m)$ *sont homéomorphes si, et seulement si,* $n = m$.

En algèbre, on associe à tout espace vectoriel muni d'une base finie sa dimension qui est le nombre d'éléments de cette base et qui est le même pour toutes ses bases (p. 89). D'après cette notion de *dimension algébrique,* $\mathbb{R}^n$ est un espace de dimension n.

Le th. 1 met en évidence le caractère essentiel de la dimension pour caractériser l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$. On peut alors se demander s'il est possible, par des moyens topologiques, d'attribuer à tout espace topologique (en particulier à un sous-espace topologique de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ un entier naturel qui soit sa dimension, de telle sorte que celle-ci coïncide avec la dimension algébrique dans le cas de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$. Dans cette optique, il est naturel au vu du th. 1 d'exiger que des espaces homéomorphes aient même dimension.

La théorie de la dimension des espaces topologiques se fixe donc comme objectif d'introduire la notion de dimension comme un *invariant topologique*.

Dimension des espaces métriques munis d'une base dénombrable

Il y a eu diverses tentatives pour rendre la notion de dimension aussi générale que possible. Celle qui est exposée ici est due à MENGER et URYSOHN et se limite aux espaces métriques munis d'une base (d'ouverts) dénombrable, dont $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ fait partie. La déf. fonctionne par récurrence et utilise la propriété énonçant qu'un sous-espace d'un espace métrique muni d'une base dénombrable possède lui-même une base dénombrable.

Déf. 1 : Un espace métrique muni d'une base dénombrable est dit

de dimension 0 si tout voisinage U d'un point quelconque contient un voisinage V dont la frontière ∂V est vide,

au plus de dimension n ($n \geq 1$) si tout voisinage U d'un point quelconque contient un voisinage ouvert V dont la frontière est au plus de dimension $(n-1)$,

de dimension n s'il est au plus de dimension n et s'il n'est pas au plus de dimension $(n-1)$,

de dimension ∞ si pour aucun $n \in \mathbb{N}$ il n'est au plus de dimension n.

Par récurrence, on montre que pour un espace, la propriété d'être de dimension n (au plus de dimension n) est un invariant topologique, c.-à-d. :

Th. 2 : *Des espaces topologiques homéomorphes possèdent la même dimension.*

La réciproque du th. 2 est fausse (fig. E). De la même manière on démontre par récurrence que :

Th. 3 : *Des sous-espaces sont au plus de la dimension de l'espace.*

Rem. : La dimension n'est pas un invariant continu (*cf.* p. 234, fig. D).

Exemples d'espaces de dimension 0

Tout sous-espace non vide au plus dénombrable d'un espace métrique muni d'une base dénombrable est de dimension 0, par exemple tout sous-espace fini non vide de $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$ ou les sous-espaces non vides de $(\mathbb{N}, \mathfrak{R}^1_{\mathbb{N}})$, $(\mathbb{Q}, \mathfrak{R}^1_{\mathbb{Q}})$. Il existe aussi des espaces de dimension 0 non dénombrables, par exemple le sous-espace topologique de $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$ construit sur $\mathbb{R}^1 \setminus \mathbb{Q}$. Tout sous-espace de $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$ qui ne contient pas d'intervalle est de dimension 0 (*cf.* th. 5). La fig. A propose des sous-espaces de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ de dimension 0. Dans $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$, les sous-espaces $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$ et $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \notin \mathbb{Q}\}$ sont de dimension 0. Tout sous-espace non vide d'un espace de dimension 0 est également de dimension 0. Les composantes connexes d'un espace de dimension 0 contiennent un point et un seul.

Rem. : $\partial V = \emptyset$ signifie que V est à la fois ouvert et fermé (*cf.* p. 214, fig. C).

Exemples d'espaces de dimension n ($n \geq 1$)

L'espace topologique $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$ est de dimension 1 (fig. B). Tout intervalle ouvert $]a, b[$ est également de dimension 1 d'après le th. 2. Un intervalle fermé $[a, b]$, resp. un intervalle semi-ouvert $]a, b]$, est au plus de dimension 1 (th. 3) puisque sous-espace de $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{R}^1)$, et n'est pas de dimension 0, car sinon $]a, b[$ devrait aussi être de dimension 0 (th. 3). Il est de dimension 1.

La fig. C propose des exemples de sous-espaces de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ de dimension 1 ; $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ lui-même est un espace de dimension 2. La fig. D propose des exemples de sous-espaces de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ de dimension 2. Démontrer que $(\mathbb{R}^3, \mathfrak{R}^3)$ est de dimension 3 est déjà plus difficile. On a cependant le résultat général suivant.

Th. 4 : *L'espace topologique* $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ *est de dimension* n.

Par récurrence, on montre encore assez facilement que $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ est au plus de dimension n. Pour prouver qu'il n'est pas au plus de dimension $(n-1)$, on utilise des méthodes de topologie algébrique.

Le th. suivant est très utile pour caractériser les sous-espaces de dimension n de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$.

Th. 5 : *Un sous-espace de* $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ *est de dimension* n *si, et seulement si, il contient un élément non vide de* $\mathfrak{R}^n$.

Application : fig. E.

La sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ est un sous-espace de dimension $(n-1)$ important de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$.

Exemples d'espaces de dimension ∞

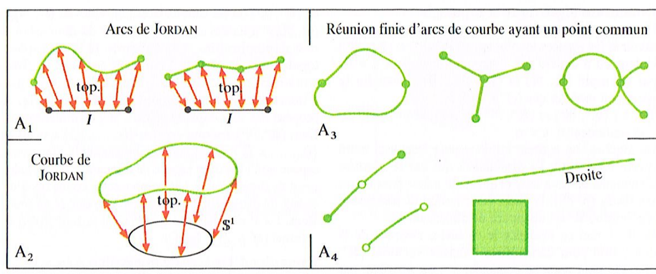
Dans l'espace de HILBERT $\mathbb{R}^\infty$ (p. 230, fig. A), l'ensemble des suites dont l'ensemble des termes non nuls est fini constitue un sous-espace de dimension ∞. L'espace de HILBERT lui-même est bien entendu de dimension ∞.

Théorème d'immersion

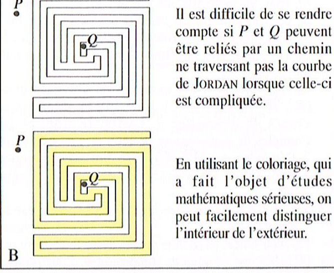
Un des résultats importants de la théorie de la dimension est que les espaces métriques de dimension au plus n munis d'une base dénombrable sont déterminés par homéomorphie avec des sous-espaces d'espaces euclidiens.

Th. 6 (th. d'immersion) : *Tout espace de dimension au plus* n *muni d'une base dénombrable est homéomorphe à un sous-espace de* $(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathfrak{R}^{2n+1})$.

Lors de la démonstration, on commence par justifier le plongement dans un espace compact (fig. F), puis le plongement d'un espace compact de dimension n dans $(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathfrak{R}^{2n+1})$.



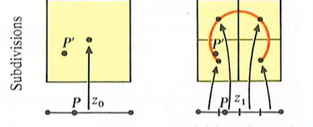
Notion de courbe

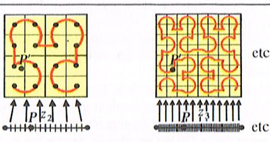


Intérieur et extérieur d'une courbe de Jordan

$\mathbb{R}^3$
Cercle C
C'
$\mathbb{R}^2$
Courbe de Jordan
C

Application du théorème des courbes de Jordan





On construit une suite de subdivisions du carré et du segment, de telle sorte qu'à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$), il apparaisse 4^n petits carrés de longueur de côté 2^{-n} et 4^n sous-segments de longueur 4^{-n}. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit une application z_n qui à chaque sous-segment d'ordre n associe un carré d'ordre n (une fois z_0 et z_1 représentées, z_2 et z_3 s'obtiennent de façon analogue, en suivant la ligne rouge).
Soit maintenant un point P du segment ; il détermine une suite de sous-segments emboîtés d'ordre 0, 1, 2... qui le contiennent. Par l'intermédiaire des applications z_n, il correspond à ces sous-segments des carrés 0, 1, 2 ... qui forment de même une suite de sous-carrés emboîtés dont l'intersection est un singleton constitué par un point P' du carré. Au point P du segment on associe donc le point P' du carré. On obtient ainsi une application du segment sur le carré. Cette application est continue et surjective, mais non injective.
D

Application continue, surjective, non injective, d'un segment sur un carré

Il n'y a pas de définition précise unique pour le mot courbe. Ce terme englobe plusieurs notions qu'il convient d'aborder séparément. L'accent étant mis ici sur des propriétés de topologie (dans les espaces $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{R}^p)$, $p \geq 1$), c'est essentiellement cet aspect qui est étudié dans ce chapitre.

Arc de courbe simple

On dit également *arc de Jordan*. Il s'agit de l'image par une application continue injective $t \to f(t)$ du segment $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) : f réalise un homéomorphisme entre $[0, 1]$ et $f([0, 1])$ pour les topologies induites resp. par $\mathfrak{R}^1$ et $\mathfrak{R}^n$ (fig. A_1). Un arc de Jordan est donc un compact connexe puisque $[0, 1]$ possède ces deux propriétés. On vérifie facilement qu'on peut substituer à $[0, 1]$ un segment quelconque de $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $a < b$, en posant $t = \dfrac{\lambda - a}{b - a}$, $\lambda \in [a, b]$, et que tout segment joignant deux points quelconques distincts dans $\mathbb{R}^n$ est un arc de Jordan porté par la droite joignant ces deux points. $[a, b] \subset \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^n$ est donc un cas particulier d'arc de Jordan : c'est le seul type d'arc de Jordan dans $\mathbb{R}^1$. Tous les arcs de Jordan sont homéomorphes.

L'image d'un arc de Jordan par une injection continue g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est encore un arc de Jordan.

Rem. : On a vu p. 213 qu'un chemin était une application continue $t \to l(t)$ de $[0, 1]$ dans un espace topologique E ($l(0)$ et $l(1)$ sont resp. l'*origine* et l'*extrémité* du chemin). Si $E = (\mathbb{R}^p, \mathfrak{R}^p)$, $p \geq 1$, l'image d'un chemin injectif est un arc de Jordan. Un chemin se note $([0, 1], l)$ ou plus généralement $([a, b], l)$ si l'on substitue $[a, b]$ à $[0, 1]$ (*cf.* supra). Il en sera donc de même pour un arc de Jordan, en précisant que l est injective.

Courbe de Jordan

On dit aussi plus précisément *courbe fermée de Jordan*. Il s'agit de l'image de $\mathbb{S}^1$ (cercle unitaire dans $\mathbb{R}^2$) par une application continue injective dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (fig. A_2). Une courbe de Jordan est également un compact connexe. Il ne faut pas confondre arc de Jordan et courbe de Jordan. Le premier est homéomorphe à un segment, la deuxième est homéomorphe à un cercle et l'on peut facilement prouver qu'un segment et un cercle ne sont pas homéomorphes (un segment privé d'un point intérieur a deux composantes connexes, un cercle privé d'un point quelconque n'a qu'une composante connexe).

Pour définir une courbe de Jordan, il suffit de se donner une fonction continue T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que sa restriction à un intervalle $[a, a + T[$, $a \in \mathbb{R}$, soit injective. Le chemin $([a, a + T], f)$ a pour origine et extrémité $f(a) = f(a + T)$. Il est injectif sur tout segment $[a', b'] \subset [a, a + T[$. Toutes les courbes de Jordan sont homéomorphes. L'image d'une courbe de Jordan par une application continue injective g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (n et $p>1$) est encore une courbe de Jordan. Les courbes de Jordan de $\mathbb{R}^2$ ont des propriétés particulières (th. de Jordan).

Rem. : Un chemin $([a, b], l)$ tel que $l(a) = l(b)$ s'appelle un *lacet*. Une courbe de Jordan est un lacet mais la réciproque est évidemment fausse.

Th. de Jordan : *Le complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ d'une courbe de Jordan $J \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert qui a deux composantes connexes, de frontière commune J. L'une des composantes est bornée : on l'appelle l'intérieur de J. L'autre, non bornée, s'appelle l'extérieur de J* (fig. B).

Si cette propriété importante est facile à justifier pour un cercle C, elle est difficile à établir pour une courbe de Jordan J plane quelconque, car l'homéomorphisme entre C et J ne signifie pas restriction à C d'un homémorphisme h de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ tel que $h(C) = J$.

Une conséquence, très simple à démontrer, de ce théorème est le résultat suivant : si un chemin k joint un point intérieur à J à un point extérieur à J, alors son image a au moins un point commun avec J.

Le th. de Jordan permet également de prouver que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) ne sont pas homéomorphes (cas particulier du th. de Brouwer). Voici une démonstration pour $n = 3$:

S'il existait un homéomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$, l'image d'un cercle $C \subset \mathbb{R}^3$ serait une courbe de Jordan C' dans $\mathbb{R}^2$. L'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus C$ qui est de manière évidente connexe par arcs (fig. C) est donc connexe (th. 7 p. 223). Son image par h, qui est $\mathbb{R}^2 \setminus C'$, devrait être connexe. Ce n'est pas le cas d'après le th. de Jordan. Donc $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. On généralise facilement pour $n > 3$.

Rem. : Le th. de Schoenflis, postérieur à celui de Jordan, établit que pour toute courbe de Jordan J de $\mathbb{R}^2$, d'intérieur D, il existe un homéomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ tel que d'une part $h(J)$ soit le cercle unité et d'autre part $h(D)$ soit le disque unité.

Courbes

La figure A_3 propose des réunions finies d'arcs de Jordan ayant un point en commun. La figure A_4 propose d'une part des arcs de Jordan privés d'un sous-ensemble fini de points, d'autre part des réunions infinies d'arcs de Jordan (une droite ; un carré, surface et frontière comprise). Ces figures sont destinées à montrer la difficulté qu'il y a à cerner tout ce que l'on peut entendre par courbe. Ainsi le carré, selon le procédé du tableau D, est l'image d'un certain chemin $([0, 1], l)$, proposé par Peano et Hilbert. Ce même carré est également une réunion infinie d'arcs de Jordan, par exemple deux côtés opposés et les segments perpendiculaires communs.

Déf. : Deux arcs de Jordan (formant un couple) définis respectivement par $([a, b], f)$ et $([c, d], g)$ sont dits consécutifs si $f(b) = g(c)$.

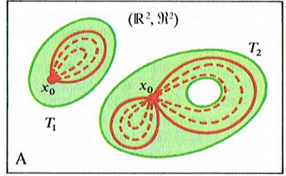
On peut par changement affine de paramètre faire en sorte que le deuxième arc soit défini par $([b, e], h)$. Si les deux arcs n'ont pas d'autre point commun que $f(b) = h(b)$, leur réunion est un arc de Jordan défini par $([a, e], k)$, avec $k_{[a, b]} = f$ et $k_{[b, e]} = h$.

Plus généralement on peut réunir des arcs de Jordan J_i, déf. par $([a_i, a_{i+1}], f_i)$ tels que $f_i(a_{i+1}) = f_{i+1}(a_{i+1})$, l'indice i parcourant soit un segment de $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{N}$ ou même $\mathbb{Z}$. Si l'application f définie sur l'intervalle $\bigcup_i [a_i, a_{i+1}]$ par $f_{[a_i, a_i + 1]} = f_i$ est inj., la réunion $\bigcup_i j_i$ est un arc de Jordan si l'ensemble des indices est fini. S'il est infini, on dit que l'on a affaire à une courbe simple : par ex. une droite, une branche d'hyperbole. Ces courbes perdent la propriété de compacité mais gardent celle de connexité (par arcs).

Toute application continue injective d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ définit un arc de Jordan si I est un segment et une courbe simple dans le cas contraire. L'image d'une courbe simple par un homéomorphisme est une courbe simple.

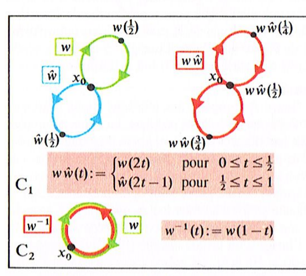
Enfin le mot courbe peut également désigner toute réunion au plus dénombrable d'arcs de Jordan. Certains points peuvent alors être multiples (ex. p. 306). Le graphe de la fonction $x \mapsto \tan x$ est une réunion dénombrable de ses composantes connexes, qui sont des courbes simples. On peut donc parler de la courbe $y = \tan x$. Dans les figures A_3 et A_4 seul le carré n'est pas une courbe.

Ces quelques lignes ne sont pas exhaustives. On peut trouver d'autres renseignements par ex. pp. 307, 403.



Sous-espaces de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$

Homotopie de chemins

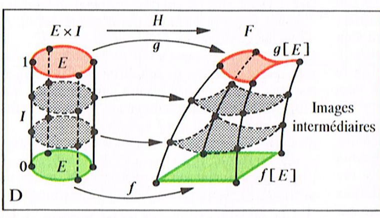


On peut définir une loi de composition (C_1) pour l'ensemble des lacets de point-base x_0. On vérifie que cette loi peut se transporter aux classes d'homotopie de ceux-ci :

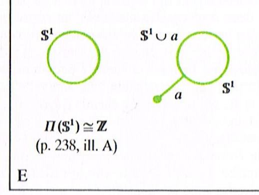
$$[\![w]\!] \cdot [\![\hat{w}]\!] := [\![w\hat{w}]\!].$$

La loi ainsi définie sur l'espace-quotient est associative. Elle admet pour élément neutre $[\![w_0]\!]$ et toute classe admet une inverse : $[\![w]\!]^{-1} = [\![w^{-1}]\!]$ (C_2).

Groupe d'homotopie (Π (E, x_0), $\cdot$)



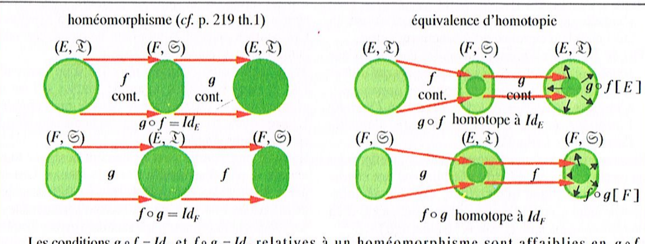
Homotopie d'applications continues



Espaces homéotopes mais non homéomorphes

homéomorphisme (*cf.* p. 219 th.1)

équivalence d'homotopie



Les conditions $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ relatives à un homéomorphisme sont affaiblies en $g \circ f$ homotope à Id_E et $f \circ g$ homotope à Id_F pour l'équivalence d'homotopie.

F

Interprétation de la définition d'une équivalence d'homotopie

La topologie dite algébrique permet d'étudier certaines situations purement topologiques à l'aide de concepts algébriques tels que modules, groupes, etc. En particulier le problème de l'homéomorphisme entre deux espaces topologiques, ou de l'équivalence de deux topologies sur un même ensemble sous-jacent peut être abordé de façon constructive en introduisant des groupes dits d'homotopie, resp. d'homologie.

Les sous-espaces T_1 et T_2 de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ proposés en figure A ne sont pas homéomorphes. Intuitivement on peut déformer de façon continue dans T_1 un lacet (p. 235) de *point-base* (origine et extrémité) x_0 afin de le « réduire » au lacet constant d'image $\{x_0\}$, alors que ce n'est pas toujours possible dans T_2. Ces différences de comportement font que T_1 et T_2 ne peuvent être homéomorphes. Pour étayer convenablement une telle méthode de raisonnement il faut introduire plusieurs notions nouvelles, tant topologiques qu'algébriques.

Homotopie de chemins

Déf. 1 : Étant donné deux chemins L_0 ([0, 1], l_0) et L_1 ([0, 1], l_1) d'un même espace topologique $(E, \mathfrak{T})$, on dit qu'ils sont *homotopes* s'il existe une application continue $(t, s) \mapsto \varphi(t, s)$ de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans $(E, \mathfrak{T})$ telle que $\varphi(t, 0) = l_0(t)$ et $\varphi(t, 1) = l_1(t)$.

φ est appelée *fonction d'homotopie*, ou même *homotopie* (fig. B). Pour tout $s \in]0, 1[$, $([0, 1], \varphi(\bullet, s))$ est un chemin intermédiaire : il permet de passer « continûment » de L_0 à L_1. On peut prouver que la relation – L_0 ([0, 1], l_0) homotope à L_1 ([0, 1], l_1) – est une relation d'équivalence dans l'ensemble des chemins de $(E, \mathfrak{T})$.

Déf. 2 : Si on suppose que $(E, \mathfrak{T})$ est connexe par arcs, on peut associer à chaque couple $(x_0, x_1) \in E^2$ un ensemble de classes C d'homotopie au sens d'une relation d'équivalence plus restrictive : deux chemins de même origine x_0 et même extrémité x_1 ([0, 1], l_0) et ([0, 1], l_1) sont dits homotopes s'il existe une application continue $(t, s) \mapsto \psi(t, s)$ de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans $(E, \mathfrak{T})$ telle que

$$\begin{cases} \forall s \begin{cases} \psi(0, s) = x_0 \\ \psi(1, s) = x_1 \end{cases} \\ \forall t \begin{cases} \psi(t, 0) = l_0(t) \\ \psi(t, 1) = l_1(t) \end{cases} \end{cases}.$$

On impose donc aux chemins intermédiaires d'avoir même origine x_0 et même extrémité x_1 (la condition générale d'homotopie ne le demandait pas). À tout couple de points $(x_0, x_1) \in E^2$ on peut associer *au moins une classe C* (dite d'origine x_0 et d'extrémité x_1) par suite de la connexité par arcs. Si $x_0 = x_1 = x$ le chemin devient un lacet et l'une des classes est $[\![x]\!]$, associée au chemin constant d'image $\{x\}$.

Les trois paragraphes qui suivent sous-entendent cette homotopie restrictive.

Opération sur les classes C

On peut composer deux classes C_1 et C_2 prises dans cet ordre si l'extrémité de C_1 coïncide avec l'origine de C_2. Si $C_1 = [\![([0, 1], l_1)]\!]$ et $C_2 = [\![([0, 1], l_2)]\!]$ on définit l par $l(t) = l_1(2t)$ pour $t = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $l(t) = l_2(2t - 1)$ pour $t \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$: l est bien continue car $l_1(1) = l_2(0)$.

Le chemin ([0, 1], l) appartient à une classe qui est indépendante des représentants de C_1 et C_2. C'est la composée $C_1 \circ C_2$. Son origine est $l_1(0)$, son extrémité $l_2(1)$. Cette loi $\circ$ est associative. Si une classe C a pour origine x et pour extrémité y, on a $[\![x]\!] \circ C = C$ et $C \circ [\![y]\!] = C$. Si $C = [\![([0, 1], l)]\!]$ et si l'on pose $l'(t) = l(1 - t)$, $C' = [\![([0, 1], l')]\!]$, alors on a $C \circ C' = [\![x]\!]$, $C' \circ C = [\![y]\!]$. Le chemin ([0, 1], l') est le chemin inverse de ([0, 1], l).

Groupes d'homotopie, groupe fondamental

Si on a $x = y$ dans le paragraphe précédent, on constate que l'ensemble des classes relatives aux lacets de point-base x muni de la loi de composition $\circ$ constitue un groupe d'élément neutre $[\![x]\!]$, l'inverse d'une classe C étant la classe C'. Ce groupe est noté $\Pi(E, x)$. C'est le *groupe d'homotopie de E en x* (ill. C_1,C_2). On peut comparer deux groupes d'homotopie $\Pi(E, x)$ et $\Pi(E, y)$. En introduisant la classe Γ d'un chemin d'origine y et d'extrémité x, on définit l'application de $\Pi(E, x)$ dans $\Pi(E, y)$: $C \mapsto \Gamma \circ C \circ \Gamma'$. Cette application est un homomorphisme de groupes car

$$(\Gamma \circ C_1 \circ \Gamma') \circ (\Gamma \circ C_2 \circ \Gamma') = \Gamma \circ C_1 \circ [\![x]\!] \circ C_2 \circ \Gamma' = \Gamma \circ (C_1 \circ C_2) \circ \Gamma'.$$

Cet homomorphisme est bijectif car il admet pour inverse l'homomorphisme $G \mapsto \Gamma' \circ G \circ \Gamma$ de $\Pi(E, y)$ dans $\Pi(E, x)$. Il s'agit donc d'un isomorphisme. Tous les groupes d'homotopie dans un espace connexe par arcs sont isomorphes. Toutefois ces isomorphismes ne sont pas canoniques en général (non unicité de Γ). À un isomorphisme près, le groupe $\Pi(E, x)$ ne dépend pas du point-base x choisi. Aussi parle-t-on de $\Pi(E)$ sans préciser x : $\Pi(E)$ est le *groupe fondamental.*

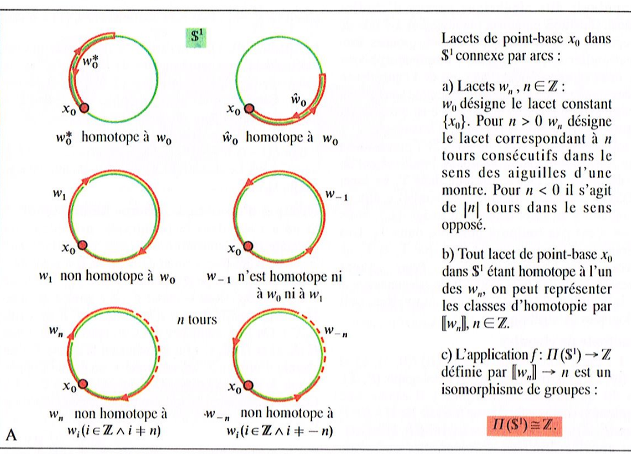
Rem. : Si un espace topologique n'est pas connexe par arcs, on peut en faire une partition en ses composantes connexes par arcs. On peut appliquer tout ce qui vient d'être étudié à chacune de ces composantes munie de la topologie induite.

Invariance topologique

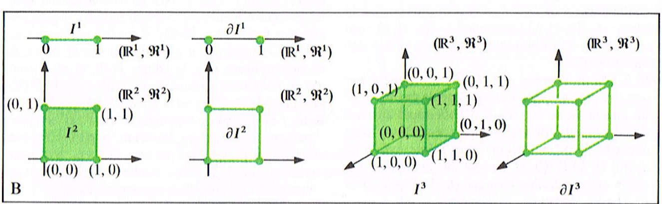
Soit f un homéomorphisme de $(E, \mathfrak{T})$ sur $(F, \mathfrak{S})$, tous deux connexes par arcs. On vérifie facilement que f réalise une bijection entre l'ensemble des chemins de E et l'ensemble de ceux de F. D'autre part si φ est une application continue de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans E, resp. dans F, $f \circ \varphi$ est une application continue de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans F, resp. $f^{-1} \circ \varphi$ est une application continue de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans E. f transporte donc les relations d'homotopie de E dans F et f^{-1} de F dans E. Enfin on vérifie aisément que si C_1 et C_2 sont deux classes relatives à E que l'on peut composer, il en est de même de $f(C_1)$ et $f(C_2)$ pour F. On a de plus $f(C_1 \circ C_2) = f(C_1) \circ f(C_2)$ (idem dans l'autre sens). Finalement on peut énoncer le

Th. 1 : *Si f est un homéomorphisme de $(E, \mathfrak{T})$ sur $(F, \mathfrak{S})$, tous deux connexes par arcs, f induit un isomorphisme entre $\Pi(E)$ et $\Pi(F)$.*

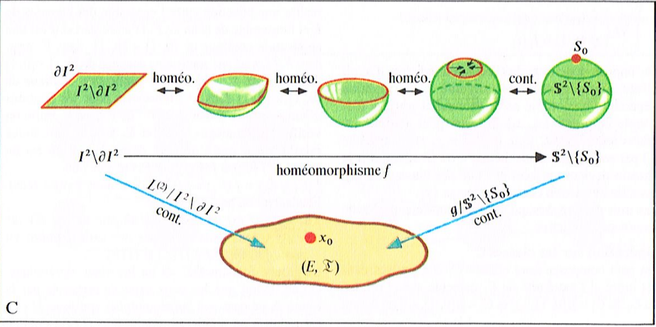
Le groupe fondamental est un invariant topologique. On en déduit que les deux espaces proposés par la figure A ne sont pas homéomorphes, puisque $\Pi(T_1)$ est réduit à un singleton, tandis que $\Pi(T_2)$ compte plus d'un élément. En revanche, si réciproquement



Groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$



Pavé unitaire



Interprétation du groupe d'homotopie 2-dimensionnel

$\Pi(E)$ est isomorphe à $\Pi(F)$, on ne peut pas conclure que $(E, \mathfrak{T})$ et $(E, \mathfrak{S})$ sont homéomorphes.

Homotopie d'applications continues

Il s'agit ici de généraliser (fig. D) la notion d'homotopie illustrée en fig. B (p. 236).

Déf. 3 : Étant donné deux espaces topologiques $(E, \mathfrak{T})$ et $(F, \mathfrak{S})$, on dit que deux applications continues f et g de E dans F sont *homotopes* s'il existe une application continue H de $E \times [0, 1]$ dans F telle que pour tout x de E on ait $H((x, 0)) = f(x)$ et $H((x, 1)) = g(x)$ (H est dite *fonction d'homotopie*).

Cette relation d'homotopie est également une relation d'équivalence dans l'ensemble des applications continues de $(E, \mathfrak{T})$ dans $(E, \mathfrak{S})$. En particulier :

Déf. 4 : Une application continue $f : (E, \mathfrak{T}) \to (F, \mathfrak{S})$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application continue $g : (F, \mathfrak{S}) \to (E, \mathfrak{T})$ telle que $g \circ f$ soit homotope à Id_E et $f \circ g$ homotope à Id_F (ill. F p. 236).

Si une telle application f peut être construite, les espaces topologiques $(E, \mathfrak{T})$ et $(F, \mathfrak{S})$ sont dits *homotopiquement équivalents*.

Si l'on a affaire à des espaces connexes par arcs, on peut, une fois encore, imposer des conditions plus restrictives que celles énoncées en déf. 3 et 4.

Déf. 5 : Si (E, a) et (F, b) désignent deux espaces connexes par arcs à points-base respectifs a et b, on dit que deux applications continues f et $g : (E, a) \to (F, b)$ sont *basiquement homotopes* s'il existe H continue de $E \times [0, 1]$ dans F telle que :
$H((a, s)) = b$ pour tout $s \in [0, 1]$, $H((x, 0)) = f(x)$ et $H((x, 1)) = g(x)$ pour tout $x \in E$.

Déf. 6 : Une application continue $f : (E, a) \to (F, b)$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : (E, a) \to (F, b)$ continue telle $g \circ f$ et $f \circ g$ soient basiquement homotopes resp. à Id_E et Id_F. On dit alors que (E, a) et (F, b) sont *homéotopes*.

Th. 2 : *Deux espaces homéotopes* (E, a) *et* (F, b) *ont des groupes fondamentaux isomorphes.*

Rem. : Deux espaces connexes par arcs homéomorphes sont toujours homéotopes, car tout homéomorphisme f est une équivalence d'homotopie ($g = f^{-1}$). La réciproque est fausse (fig. E p. 236).

Espaces simplement connexes

Un espace topologique dont l'ensemble sous-jacent est un singleton $\{x_0\}$ possède comme groupe fondamental un groupe à un élément, la classe du chemin constant x_0, c.-à-d. l'élément neutre. Les groupes fondamentaux des sphères $\mathbb{S}^n$ sont également réduits à l'élément neutre pour $n \geq 2$ (en clair tout lacet est homotope à un point). En revanche $\Pi(\mathbb{S}^1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (ill. A), si bien que $\mathbb{S}^n$, pour $n \geq 2$, n'est pas homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ d'après le théorème 1. Le groupe fondamental $\Pi(\mathbb{R}^n)$ est également réduit à l'élément neutre pour $n \geq 1$.

Déf. 7 : On dit qu'un espace $(E, \mathfrak{T})$ connexe par arcs est *simplement connexe* si $\Pi(E)$ est réduit à l'élément neutre.

Espaces contractiles

La propriété de simple connexité peut être confrontée aux propriétés d'homéotopie. Alors que $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ est homéotope à un singleton pour tout $n \geq 1$, il n'en est pas de même par ex. pour les sphères (*cf.* infra).

Déf. 8 : Un espace topologique connexe par arcs est dit *contractile* s'il est homéotope à un de ses sous-espaces réduit à un point.

Tout espace contractile est simplement connexe, mais la réciproque est fausse (par ex. $\mathbb{S}^n$ pour $n \geq 2$ est simplement connexe mais n'est pas contractile).

Rétraction

La méthode générale pour établir qu'un espace topologique connexe par arcs $(E, \mathfrak{T})$ pointé en x_0 est contractile en $\{x_0\}$ consiste à prouver que si f est l'application constante de (E, x_0) sur $\{x_0\}$ (donc continue) et i la fonction d'inclusion $\{x_0\} \to E$ (donc continue), les deux applications $i \circ f$ et $f \circ i$ sont basiquement homotopes resp. à Id_E et $Id_{\{x_0\}}$ (*cf.* déf. 6 *supra*). En passant alors à la déf. 5, on voit que (E, x_0) est homéotope à $\{x_0\}$ s'il existe φ continue de $E \times [0, 1]$ dans E telle que

$$\forall s \in [0, 1], \varphi(x_0, s) = x_0, \forall x \in E, \begin{cases} \varphi(x, 0) = x_0 \\ \varphi(x, 1) = x \end{cases}.$$

La contractilité entre dans le cadre plus vaste suivant :

Déf. 9 : Un sous-espace topologique $(T, \mathfrak{T}_T)$ connexe par arcs d'un espace connexe par arcs $(T, \mathfrak{T})$ est un *rétract* de E, ou encore un sous-espace *déformé par rétraction* de E, s'il existe une application continue r, appelée précisément *rétraction*, de E sur T, telle que $r|_T = Id_T$ et que $i \circ r$ soit homotope à Id_E (i = fonction d'inclusion de T dans E).

Si on pointe E et T en $x_0 \in T \subseteq E$, (E, x_0) et (T, x_0) deviennent alors homéotopes, et leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.

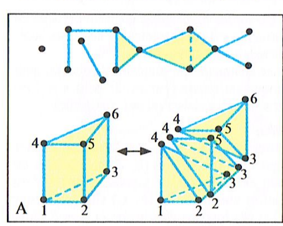
Groupes d'homotopie *n*-dimensionnels

Bien que les groupes fondamentaux de $\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{S}^m$ coïncident pour n et $m \geq 2$, on ne peut pas en conclure que ces sphères sont homéomorphes (on verra que pour $n \neq m$ elles ne sont pas homéomorphes). Le groupe fondamental ne suffit pas comme invariant topologique dans l'étude de « non-homéomorphismes ». On peut construire d'autres invariants. En passant par une généralisation de la notion de chemin on aboutit aux groupes d'homotopie n-dimensionnels, qui se présentent, à l'instar du groupe fondamental, comme des invariants topologiques.

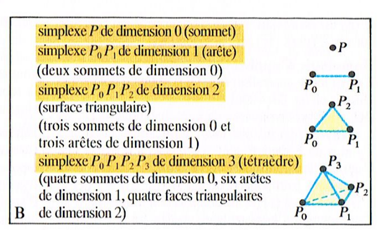
Déf. 10 : Si l'on désigne par I le segment $[0, 1]$, l'ensemble
$I^n := \{(x_1, x_2 \ldots, x_n) / x_i \in I\}$ est par convention le *pavé fermé unitaire n-dimensionnel* de $\mathbb{R}^n$ (fig. B). Une application continue $L^{(n)} : I^n \to (E, \mathfrak{T})$ est un chemin n-dimensionnel dans E. On parle d'un chemin n-dimensionnel fermé relativement au point $x_0 \in E$, si la frontière ∂I^n de I^n (fig. B) a pour image $\{x_0\}$ dans E.

Les chemins fermés 1-dimensionnels relativement au point x_0 sont les lacets de point-base x_0. Pour définir l'équivalence de chemins fermés n-dimensionnels, on généralise le concept d'homotopie entre applications continues.

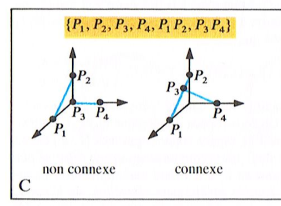
Déf. 11 : Soit f et g deux applications continues de $(E, \mathfrak{T})$ dans $(F, \mathfrak{S})$. Soit T une partie de E telle que $f|_T = g|_T$. S'il existe une homotopie H entre f et g ayant la propriété supplémentaire $H(x, s) = f(x) = g(x)$ pour tout $x \in T$ et tout $s \in [0, 1]$, alors on dit que f et g sont homotopes relativement à T.



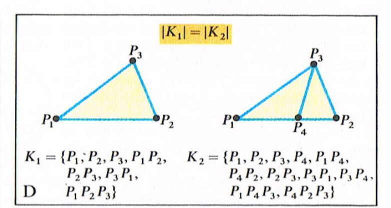
Polyèdres



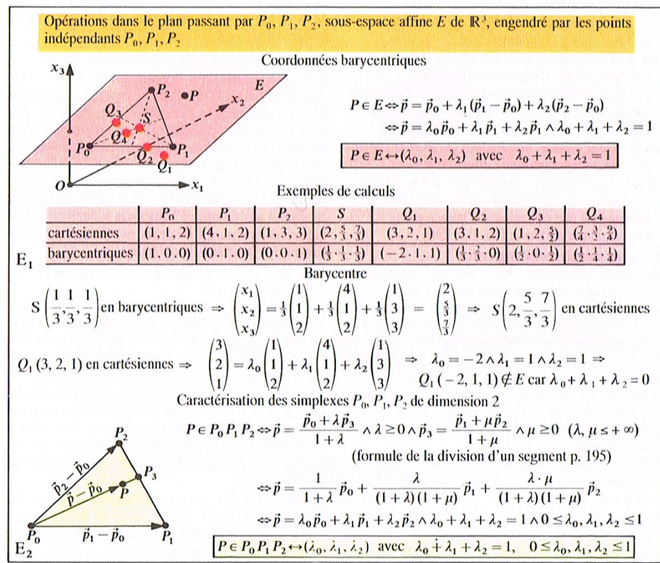
Simplexes



Réalisations d'un ensemble simplicial



Différentes triangulations d'un polyèdre



	P_0	P_1	P_2	S	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
cartésiennes	(1, 1, 2)	(4, 1, 2)	(1, 3, 3)	$(2, \frac{5}{3}, \frac{7}{3})$	(3, 2, 1)	(3, 1, 2)	$(1, 2, \frac{5}{2})$	$(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4})$
barycentriques	(1, 0, 0)	(0, 1, 0)	(0, 0, 1)	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	(−2, 1, 1)	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

Coordonnées barycentriques d'un plan

Si dans cette définition on fait $T = \varnothing$, on retrouve la déf. 3. Si on fait $T = \{a\}$, les espaces étant supposés connexes par arcs, on retrouve la déf. 5 pour les points-base $a \in E$ et $b = f(a) = g(a) \in F$.

Dans toute la suite les espaces sont supposés connexes par arcs.

Si deux lacets d'un même espace sont équivalents, ils ont nécessairement même point-base. Ils sont donc en fait homotopes relativement à $\partial I = \{0, 1\}$. On peut étendre cette propriété d'équivalence à des chemins fermés n-dimensionnels quelconques lorsqu'ils sont homotopes relativement à la frontière ∂I^n. Il s'agit bien d'une relation à laquelle on peut associer des classes d'équivalence de chemins fermés n-dimensionnels de même point-base x_0, $\{x_0\}$ = image de ∂I^n. L'espace quotient est désigné par $\Pi_n (E, x_0)$. On peut définir une opération interne dans $\Pi_n (E, x_0)$ par $[\![L^{(n)}]\!] \cdot [\![\hat{L}^{(n)}]\!] := [\![L^{(n)} \hat{L}^{(n)}]\!]$ (indépendant des représentants), où le produit $L^{(n)}\hat{L}^{(n)}$ est défini de la façon suivante :

$$L^{(n)}\hat{L}^{(n)} ((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \begin{cases} L^{(n)} ((2x_1, x_2, \ldots, x_n)) \text{ pour } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \hat{L}^{(n)} ((2x_1 - 1, x_2, \ldots, x_n)) \text{ pour } \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

(cette règle ne singularise pas x_1 par rapport aux autres coordonnées : on pourrait substituer x_i à x_1, $i = 2, \ldots, n$ ou même proposer d'autres procédés sans changement aucun des résultats).

$\Pi_n (E, x_0)$ muni de cette loi de composition est un groupe, le groupe d'homotopie n-dimensionnel de E relativement à x_0. Pour $n = 1$ on retrouve $\Pi (E, x_0)$. Contrairement à ce dernier, $\Pi_n (E, x_0)$ est commutatif pour $n > 1$.

Interprétation des groupes d'homotopie

Un chemin fermé 2-dimensionnel $L^{(2)}$ applique, selon la déf. 10, le carré I^2 dans $(E, \mathfrak{T})$ de façon que sa frontière ∂I^2 ait pour image un singleton $\{x_0\}$, $x_0 \in E$. On peut en particulier appliquer I^2 sur la sphère $\mathbb{S}^2$, en identifiant la frontière ∂I^2 avec un point $s_0 \in \mathbb{S}^2$, de telle sorte que $I^2 \setminus \partial I^2$ et $\mathbb{S}^2 \setminus \{s_0\}$ soient homéomorphes. On peut alors substituer aux chemins 2-dimensionnels à valeurs dans $(E, \mathfrak{T})$ les applications continues de $\mathbb{S}^2$ dans $(E, \mathfrak{T})$ qui à s_0 associent le point $x_0 \in E$. L'ensemble de leurs classes d'homotopie muni de la loi interne induite par l'homéomorphisme est un groupe isomorphe à $\Pi_2 (E, x_0)$. On peut généraliser ce résultat à $\Pi_n (E, x_0)$, $n \geq 1$, en passant par la sphère $\mathbb{S}^n$. Les groupes $\Pi_n (E, x_0)$ et $\Pi_n (E, x_1)$ sont isomorphes pour E connexe par arcs comme dans le cas $n = 1$. Aussi parle-t-on de la même façon de $\Pi_n (E)$. On peut alors énoncer le résultat important :

Th. 3 : *Si les espaces connexes par arcs (E, a) et (E, b) sont homéotopes, alors Π_n (E) et Π_n (F) sont isomorphes pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Appl. : Pour les groupes d'homotopie des sphères $\mathbb{S}^n$ on a les résultats suivants :
$\Pi_n (\mathbb{S}^n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ pour $n \geq 1$, $\Pi_n (\mathbb{S}^m)$ est réduit à un élément si $1 \leq n < m$. Il apparaît donc que $\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{S}^m$ ne sont homéomorphes que si $n = m$ (en ce qui concerne les groupes $\Pi_n (\mathbb{S}^m)$ pour $n > m \geq 1$ on n'a actuellement que des résultats partiels).

Topologie algébrique / Polyèdres I

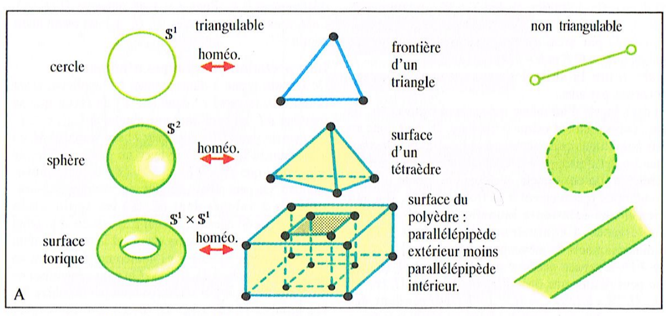
Le fait qu'un certain nombre de problèmes topologiques de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$, liés généralement à l'homéomorphie, puisse être restreint aux sous-espaces topologiques que l'on appelle polyèdres, confère à ceux-ci une importance particulière. Leur contribution passe en général par le groupe fondamental d'homotopie, relativement facile à préciser dans le cas des polyèdres connexes par arcs. On aborde ici l'aspect dit combinatoire de la topologie algébrique.

Simplexes dans $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{R}^p)$, $p \leq 3$

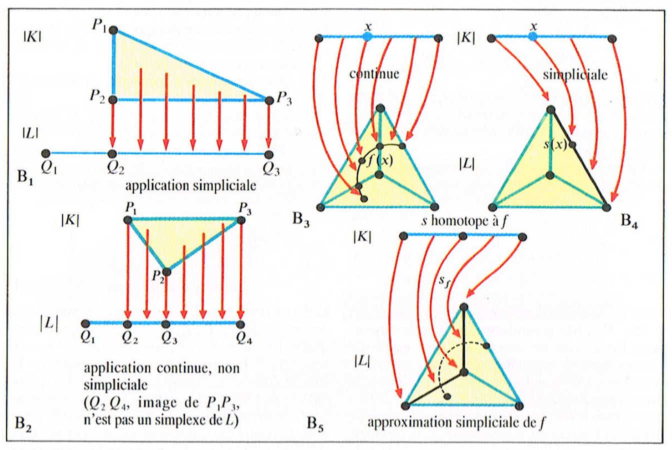
Un singleton, un segment, un triangle, un tétraèdre (fig. B) sont, par définition, des polyèdres particuliers appelés *simplexes*. Un singleton est défini par un point P : il est de dimension 0. Un segment, ou *arête*, est défini par ses deux extrémités, appelées également *sommets*, P_0 et P_1, qui sont deux points distincts : l'arête $P_0 P_1$ est l'ensemble des points de la droite (P_0, P_1) situés au sens large entre P_0 et P_1. Une arête est de dimension 1. Un triangle est défini par trois points supposés non alignés P_0, P_1 et P_2, qu'on appelle ses sommets. La réunion des arêtes $P_0 P_1$, $P_0 P_2$, $P_2 P_1$, dites côtés du triangle, est une courbe de Jordan dans le plan défini par les trois sommets. Le triangle $P_0 P_1 P_2$ est la réunion de cette courbe et de son intérieur. Un triangle est de dimension 2.

Enfin un tétraèdre est défini par quatre points non coplanaires P_0, P_1, P_2, P_3 qui sont ses sommets ; les quatre triangles $P_i P_j P_k$ sont ses *faces* ; les six segments $P_i P_j$ sont ses arêtes. Le tétraèdre est la réunion de la surface fermée constituée par ses quatre faces et de l'intérieur de celle-ci. Il est de dimension 3. On remarque que : a) la frontière dans $(\mathbb{R}^3, \mathfrak{R}^3)$ d'un tétraèdre est constituée de ses quatre faces (triangulaires) qui se rencontrent deux à deux selon une arête, deux arêtes du tétraèdre se rencontrant en un sommet, ou ne se rencontrant pas ; b) la frontière dans $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ d'un triangle est constituée de ses trois côtés, deux côtés se rencontrant en un sommet ; c) la frontière dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ d'un segment est constituée de ses deux extrémités, qui sont distinctes.

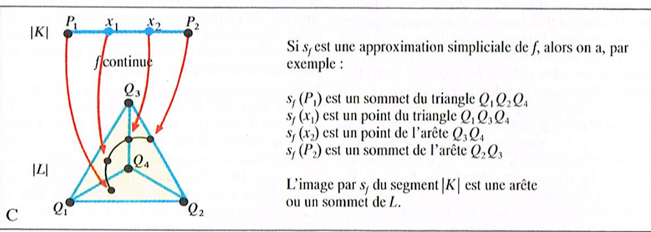
En définitive la frontière d'un simplexe S de dim. p ($p \leq 3$) dans $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{R}^p)$ est une réunion de $(p + 1)$ simplexes de dim. $(p - 1)$ se rencontrant deux à deux selon un simplexe de dim. $(p - 2)$ ($= \varnothing$ si $p = 1$). Tous les simplexes de dimension décroissante $d \leq p$ que l'on peut ainsi fabriquer par des opérations frontalières à partir d'un simplexe S de dim. p s'appellent des *faces de S de dim. d*, ou plus simplement des *d*-faces. Ainsi la 3-face d'un tétraèdre s'identifie à celui-ci tandis qu'une 1-face est une arête



Espaces triangulables et non triangulables



Applications simpliciales et approximation simpliciale dans $\mathbb{R}^2$



Conditions pour une approximation simpliciale

de ce tétraèdre. Cette convention trouvera pleinement son intérêt dans la déf. générale d'un simplexe, resp. d'un polyèdre en dim. finie quelconque.

Polyèdres dans $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{R}^p)$, $p \leq 3$

Déf. 1 : *En dim. $p \leq 3$, un polyèdre est par définition la réunion d'un ensemble fini K de simplexes S_i de dim. $q_i \leq p$ tel que* a) *$\forall\, S_i \in K$, chacune des d-faces de S_i ($d \leq q_i$) est un élément de K,*
b) *$\forall i, j, i \neq j$, $S_i \cap S_j$ est ou vide, ou une d-face commune à S_i et S_j.*

Un simplexe est bien un polyèdre, car il est la réunion de ses d-faces (conditions a) et b) respectées). La figure A (p. 240) donne deux exemples de polyèdres dans le sens général.

Déf. 2 : Un ensemble fini de simplexes est dit *complexe simplicial* s'il satisfait aux conditions précédentes. Tout complexe simplicial K engendre donc un polyèdre $|K|$. Réciproquement tout polyèdre est engendré par *au moins un* complexe simplicial : un tel complexe simplicial est appelé *triangulation* du polyèdre.

La figure D (p. 240) montre deux triangulations différentes d'un triangle.

Une réunion quelconque de simplexes ne peut être un polyèdre que si elle peut s'identifier à celle d'un complexe simplicial. Ainsi l'ensemble de simplexes proposé en tête de la figure C (p. 240) engendre bien un polyèdre pour le schéma de gauche, comme pour le schéma de droite. Mais s'il est bien une triangulation du premier, il ne l'est plus pour le second. Pour ce dernier il suffit de substituer à $P_1 P_2$ la paire $\{P_1 P_3, P_2 P_3\}$ pour obtenir une triangulation.

Rem. : La théorie des graphes (p. 251 *sqq.*) traite des polyèdres dont les triangulations sont constituées de simplexes de dim. 0 et 1.

Convexité et simplexes dans $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{R}^p)$

On se sert ici de la structure affine de $\mathbb{R}^n$ (voir p. 204).

Déf. 3 : On dit qu'une partie C non vide de $\mathbb{R}^n$ est convexe si, pour toute paire de points distincts M et N de C, le segment MN est inclus dans C.

Ex. : Un segment, une droite, un triangle, un disque, un plan, un tétraèdre sont des convexes, mais un tore n'est pas un convexe.

Un convexe est connexe par arcs. L'intersection de deux convexes est convexe si elle n'est pas vide. L'adhérence d'un convexe de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ est convexe.

Déf. 4 : L'enveloppe convexe $\mathfrak{C}(F)$ d'une partie F non vide de $\mathbb{R}^n$ est le plus petit convexe contenant F. C'est l'intersection de tous les convexes contenant F.

On peut construire une enveloppe convexe en utilisant la notion de barycentre :

q points massiques (Q_i, μ_i) tels que $\mu_1 + \ldots + \mu_q > 0$ et $\forall i$, $\mu_i \geq 0$, ont un barycentre bien déterminé. Par abus de langage on dit que ce barycentre est positif (car les masses sont positives). On peut démontrer facilement que l'enveloppe convexe de l'ensemble des q points Q_i est constituée par l'ensemble de tous les barycentres positifs que l'on peut associer à ces q points. L'enveloppe convexe d'une partie F est l'ensemble de tous les barycentres positifs que l'on peut associer à tous les sous-ensembles finis de F.

Déf. 5 : Étant donné $(p + 1)$ points indépendants $P_0, P_1, \ldots, P_p$ dans $\mathbb{R}^n$ (donc $p \leq n$), on appelle simplexe de sommets $P_0, P_1, \ldots, P_p$ l'enveloppe convexe S de l'ensemble de ces $(p + 1)$ points. S est de dim. p :

$$S = \{M \mid \lambda_0 \overrightarrow{MP_0} + \ldots + \lambda_p \overrightarrow{MP_p} = \vec{0} \wedge (\forall i, \lambda_i \geq 0) \wedge \lambda_0 + \ldots + \lambda_p = 1\}$$

Rem. : a) On peut écrire

$$\overrightarrow{P_0M} = \lambda_0 \overrightarrow{P_0P_0} + \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + \lambda_p \overrightarrow{P_0P_p} = \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + \lambda_p \overrightarrow{P_0P_p},$$

$\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p \leq 1$. Sous cette forme on dit que S est *déployé* à partir de son sommet P_0.

b) Pour p = 1, 2, 3 on retrouve les segments, les triangles et les tétraèdres (les tableaux E_1 et E_2 (p. 240) proposent quelques calculs concernant un triangle).

Déf. 6 : Les d-faces du simplexe $P_0 P_1 \ldots P_p$ sont les simplexes de dim. d dont les sommets sont $(d + 1)$ points pris parmi les $(p + 1)$ points indépendants $P_0, P_1, \ldots, P_p$. Il y a donc C_{p+1}^{d+1} d-faces.

La frontière d'un simplexe de dim. n, $P_0 P_1 \ldots P_n$, dans $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$, est constituée de $(n + 1)$ faces de dim. $(n - 1)$. Si on a $p < n$ la frontière du simplexe de dim. p, $P_0 P_1 \ldots P_p$, dans $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$, est ce simplexe lui-même. En revanche sa frontière dans le sous-espace affine engendré par $P_0, P_1, \ldots, P_p$ est constituée de $(p + 1)$ faces de dim. $(p - 1)$. De même l'intérieur d'un simplexe de dim. n dans $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ est non vide. Si on a $p < n$ l'intérieur d'un simplexe de dim. p est vide dans $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$; il devient non vide dans le sous-espace affine engendré par ses $(p + 1)$ sommets pour la topologie induite. Dans ce qui suit l'intérieur d'un simplexe de dim. p sera, sauf avis contraire, pris par rapport au sous-espace affine engendré par ses sommets (topologie induite). On notera qu'un simplexe de dim. 0, c.-à-d. un singleton, est à la fois sa frontière et son intérieur lorsque l'on fait cette convention.

Complexes simpliciaux dans $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$

La définition 2 ci-dessus s'étend alors sans difficulté à $\mathbb{R}^n$:

Déf. 7 : Un ensemble fini K de simplexes dans $\mathbb{R}^n$ est un *complexe simplicial* s'il satisfait aux deux conditions
(1) Quel que soit le simplexe S de K, toutes les d-faces de S appartiennent à K.
(2) Si S_1 et S_2 sont deux simplexes distincts éléments de K, ou bien $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, ou bien $S_1 \cap S_2$ est une d-face commune à S_1 et S_2.

Si s est la dimension maximale des simplexes d'un complexe simplicial K, on dit que K est de dimension s (ou s-dimensionnel). K' est un sous-complexe simplicial de K si $K' \subseteq K$ et si (1) est satisfaite dans K' (on remarquera que (2) est satisfaite dans tout sous-ensemble de K). L'ensemble des d-faces d'un simplexe appartenant à K est par ex. un sous-complexe simplicial de K.

L'ensemble des simplexes de dimension $\leq r$ contenus dans un complexe simplicial K de dimension s ($r \leq s$) est un sous-complexe simplicial : on l'appelle le *squelette r-dimensionnel* $K^{(r)}$ de K.

Polyèdres dans $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$

La réunion $|K|$ des simplexes éléments d'un complexe

simplicial K est par déf. un polyèdre. On dit que ce polyèdre admet K comme triangulation, mais il n'y a pas unicité de celle-ci en général.

Toutes les triangulations d'un même polyèdre ont même dimension.

Rem. : a) Tout polyèdre $|K|$ peut être muni de la topologie induite par $\mathfrak{R}^n$. Dans ces conditions les polyèdres apparaissent comme des fermés bornés de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ (*cf.* p. 229), c.-à-d. des sous-espaces compacts. Les composantes connexes d'un polyèdre sont des polyèdres connexes par arcs et leur ensemble est fini. Un polyèdre connexe par arcs n'est pas nécessairement convexe (ill. A p. 242/1).

b) Pour tout point M d'un complexe simplicial K, il existe un et un seul simplexe S élément de K tel que $M \in \mathring{S}$. Un polyèdre est donc la réunion des intérieurs, tous disjoints, des simplexes éléments d'une de ses triangulations.

Espaces triangulables

On peut par homéomorphie transformer certains (sous-)espaces topologiques en polyèdres. L'ill. A en donne quelques exemples.

Déf. 8 : Un espace topologique homéomorphe à un polyèdre est dit *triangulable*.

Il existe des espaces topologiques non triangulables, par ex. ceux qui ne sont pas compacts (ex. ill. A). Les surfaces closes sont triangulables. On peut les classer en faisant intervenir des polyèdres (*cf.* pp. 245, 247).

Applications simpliciales

On définit dans ce paragraphe des applications continues (condition (1), topologie oblige), respectant d'une part la structure affine de $\mathbb{R}^n$ (condition (2), simplexes), d'autre part celle de complexe simplicial (condition (3)). En fait la condition de continuité (1) sera une conséquence des deux autres.

Déf. 9 : $|K|$ et $|L|$ étant deux polyèdres, une application $s : |K| \to |L|$ est dite *simpliciale* relativement aux triangulations respectives K et L si :

(a) L'image de tout simplexe de K est un simplexe de L.

(b) La restriction de s à tout simplexe de K est affine.

Th. 1 : *Une application simpliciale est affine par morceaux et continue.*

Rem. : De la déf. 9 on déduit que l'intérieur d'un simplexe de K s'applique sur l'intérieur du simplexe image dans L. *Ex.* : fig. B_1 et B_2 p. 242/1.

Une application affine l de partie linéaire φ, définie sur le sous-espace affine engendré par le simplexe $P_0, P_1, \dots, P_p$, peut être repérée par $l(P_0)$ et les images $\varphi(\overrightarrow{P_0P_i})$, $i = 1, 2, \dots, p$, des p vecteurs indépendants $\overrightarrow{P_0P_i}$. Cela revient en définitive à se donner les $(p+1)$ points $l(P_j)$, $j = 0, 1, \dots, p$. Par suite, dès qu'on connaît, pour une application simpliciale s, les images des sommets des simplexes de K (respectant la condition (a)), la restriction de s à un simplexe de K (donc à toutes ses faces) est parfaitement déterminée.

On notera que ces propriétés montrent que la composition de deux applications simpliciales est une application simpliciale.

Approximation simpliciale

Une application continue d'un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ dans un espace topologique $(F, \mathfrak{S})$ applique chaque composante connexe de $(E, \mathfrak{T})$ dans une composante connexe de $(F, \mathfrak{S})$, puisque l'image continue d'un connexe est un connexe. La connexité pour un polyèdre est équivalente à la connexité par arcs et les composantes connexes d'un polyèdre sont des polyèdres connexes par arcs. L'étude d'une application continue d'un polyèdre P dans un polyèdre Q se ramène donc au cas où P et Q sont connexes par arcs. Cette simplification facilite en particulier l'étude de problèmes d'homomorphie ou d'homotopie entre polyèdres. Tous les polyèdres qui interviennent dans ce paragraphe sont donc supposés connexes par arcs. Si $|K|$ est connexe par arcs, il en est de même de $|K^{(d)}|$, $d <$ dim. K.

Th. 2 : *Pour toute application continue de $|K|$ dans $|L|$, il existe au moins une application simpliciale de $|K|$ dans $|L|$ relative à K et L qui lui soit homotope* (fig. B_3, B_4 p. 242/1).

Ce théorème d'existence n'apporte pas de renseignement sur l'application simpliciale.

Déf. 10 : Soit f une application continue de $|K|$ dans $|L|$. Une application simpliciale s_f de $|K|$ dans $|L|$ relative à K et L est une *approximation simpliciale* de f si l'image $s_f(x)$ d'un élément quelconque x de $|K|$ appartient au simplexe dont l'intérieur contient $f(x)$.

Th. 3 : *Si s_f est une approximation simpliciale de f, alors s_f et f sont homotopes. Deux approximations simpliciales de f sont homotopes. Une application simpliciale est toujours une approximation simpliciale d'elle-même.*

Sous réserve que toute application continue d'un polyèdre dans un polyèdre possède une approximation simpliciale, on pourra construire et représenter les classes d'homotopie uniquement à l'aide d'applications simpliciales. A priori si on choisit arbitrairement des triangulations quelconques pour définir le polyèdre objet et le polyèdre image, il n'est pas vrai qu'une application continue possède une approximation simpliciale par ces triangulations (*cf.* ill. C p. 242/1). On peut démontrer le théorème suivant qui résout la question.

Th. 4 : *Si f est une application continue de $|K|$ dans $|L|$, il est toujours possible de construire une triangulation K' de $|K|$ telle que f admette une approximation simpliciale relative à K' et L.*

On dit qu'on a « affiné » K en K' pour construire l'approximation simpliciale. Un exemple d'« affinage » d'un complexe simplicial K consiste à commencer d'abord par introduire un sommet supplémentaire $A \in K$, différent des sommets proprement dits de K : A sera donc à l'intérieur d'un simplexe S (unique) $\in K$, de sommets $P_0, \dots, P_d$ (d = dim. S). A associé à d de ces sommets définira un nouveau simplexe de dimension d et il y aura $(d+1)$ nouveaux simplexes de ce type qui, associés à leurs faces, remplaceront S et ses faces. S'il existe dans K un simplexe S' de dim. $d' > d$ dont S est une face, S' devra être modifié à son tour, cette modification se répercutant elle-même sur tout

simplexe S'' de dim. $d'' > d'$ dont S' serait une face, etc. Le nombre d'opérations, toutefois, n'augmente pas indéfiniment puisque K est un ensemble fini de simplexes de dimensions inférieures à n = dim $\mathbb{R}^n$. (Par ex. si K est un complexe simplicial engendré par deux tétraèdres situés de part et d'autre du plan d'une face commune, et si A est à l'intérieur de celle-ci, K devient K' engendré par six tétraèdres. De K comptant 5 sommets, 9 côtés, 7 faces triangulaires, 2 tétraèdres, on passe à K' comptant 6 sommets, 14 côtés, 15 faces triangulaires, 6 tétraèdres.)

Conséquence : Pour des espaces connexes par arcs, on sait qu'on peut parler d'applications continues basiquement homotopes, notion plus restrictive que celle d'homotopie (*cf.* p. 239). Si f applique continûment $P = |K|$ dans $Q = |L|$, P étant pointé par a et Q par $b = f(a)$, on a donc intérêt à utiliser des triangulations de P et Q admettant a, resp. b comme sommet. La construction précédente montre que c'est possible. Dans ces conditions la recherche d'une approximation simpliciale s_f basiquement homotope à f est permise puisque $s_f(a) = b$ satisfera la condition de la déf. 10.

On montre dans ce chapitre comment on peut étudier le groupe d'homotopie $\Pi(|K|, P_0)$ (p. 237) en un point P_0 d'un polyèdre $|K|$ connexe (donc connexe par arcs) en passant à l'une de ses triangulations. On rappelle que le choix de P_0 importe peu, tous les groupes obtenus en faisant varier P_0 dans $|K|$ étant isomorphes (groupe fondamental p. 237). On peut donc choisir pour P_0 un sommet de K. On rappelle également qu'il s'agit d'étudier le groupe des classes d'équivalence des lacets tracés sur $|K|$, de point-base P_0, la relation d'équivalence étant celle de la déf. 2 de la p. 237.

Chaînes polygonales

Déf. 1 : Une suite finie $\alpha := (P_0, \dots, P_r)$ de sommets d'un complexe simplicial K s'appelle *chaîne polygonale* d'origine P_0 et d'extrémité P_r, si pour tout couple de points consécutifs distincts P_i, P_{i+1} le segment $[P_i, P_{i+1}]$ est une arête de K ; α est une chaîne polygonale *fermée* si $P_0 = P_r$ (fig. A_1 p. 244). Elle définit alors un lacet sur $|K|$ de point-base P_0.

Rem. : Les sommets d'une chaîne polygonale peuvent se retrouver plusieurs fois dans α. La suite $\alpha_0 = (P_0)$ est dite *constante*. Elle définit le chemin constant d'image $\{P_0\}$ sur $|K|$ (p. 237).

Homotopie de chaînes polygonales, groupe polygonal

Deux chaînes polygonales fermées sont dites homotopes au sens combinatoire si on peut ramener l'une à l'autre en un nombre fini d'opérations (réalisables dans les deux sens) appartenant à l'un des deux types :

(1) $(\dots, P, P, \dots) \leftrightarrow (\dots, P, \dots)$

(2) $(\dots, P, Q, R, \dots) \leftrightarrow (\dots, P, R, \dots)$ si P, Q, R définissent un simplexe (ill. A_2 p. 244).

Cette propriété est une relation d'équivalence entre chaînes polygonales fermées de même point-base P_0. L'espace quotient est désigné par $\Pi(K, P_0)$. On peut définir sur celui-ci une opération interne par

$[\![\alpha]\!] \cdot [\![\hat{\alpha}]\!] = [\![\alpha\hat{\alpha}]\!]$ (ind. des rep.), où $\alpha\hat{\alpha}$ est la suite obtenue en prolongeant la suite $\alpha = (P_0, \dots, P_i, \dots, P_0)$ par la suite $\hat{\alpha} = (P_0, \dots, Q_j, \dots, P_0)$:

$\alpha\hat{\alpha} = (P_0, \dots, P_i, \dots, P_0, P_0, \dots, Q_j, \dots, P_0)$

$(\Pi(K, P_0) ; \cdot)$ est un groupe, le *groupe polygonal* de K relativement au point P_0 : $[\![\alpha_0]\!] = [\![(P_0)]\!]$ est l'élément neutre et $[\![\alpha]\!]^{-1} = [\![\alpha^{-1}]\!]$ est l'inverse de $[\![\alpha]\!]$: si $\alpha = (P_0, P_1, \dots, P_r, P_0)$, $\alpha^{-1} = (P_0, P_r, \dots, P_1, P_0)$. *Ex.* : ill. B p. 244.

En faisant intervenir la notion d'approximation simpliciale (p. 242/2) on démontre le théorème fondamental :

Th. 1 : *Le groupe d'homotopie $\Pi(|K|, P_0)$ d'un polyèdre $|K|$ est isomorphe au groupe polygonal $\Pi(K, P_0)$.*

Comme le groupe $\Pi(|K|, P_0)$ est isomorphe au groupe fondamental $\Pi(|K|)$, on peut en déduire que $\Pi(K, P_0)$ est, à un isomorphisme près, indépendant de P_0, d'où la notation $\Pi(K)$ et : $\Pi(|K|) \cong \Pi(K)$ (Deux triangulations distinctes d'un même polyèdre ont des groupes isomorphes).

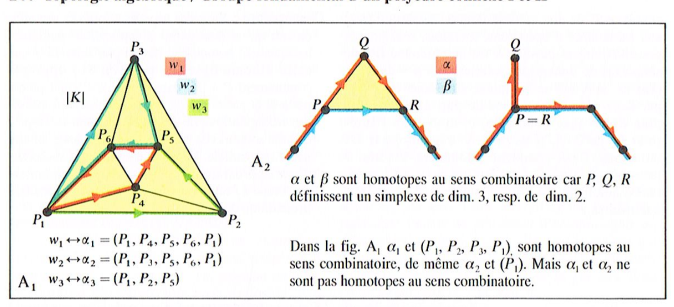
Rem. : Dans la démonstration du th. 1, on n'a besoin en fait que du squelette $K^{(2)}$ (p. 242/2), ensemble des simplexes éléments de K, de dim. 0, 1 ou 2 : $\Pi(K, P_0) = \Pi(K^{(2)}, P_0)$ (Si $|K|$ est connexe, il en est de même des polyèdres $|K^{(d)}|$).

On va voir maintenant comment l'introduction de groupes libres permet d'énoncer des résultats remarquables.

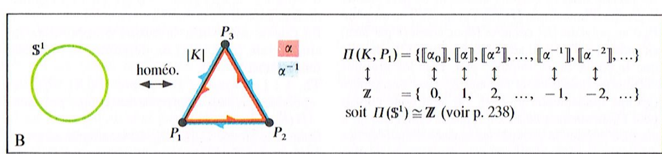
Groupe libre de type fini

Soit $(a_1, \dots, a_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ un ensemble fini de *symboles* ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Toute suite ω finie de ces symboles (répétition autorisée) s'appelle un *mot* : par ex. $\omega_1 = a_1 a_4 \bar{a}_5 \bar{a}_1 a_2$. Le mot vide ω_0 est celui qui ne contient aucun symbole. Si l'on juxtapose le mot $\hat{\omega}$ à droite du mot ω, on dit qu'on construit le mot $\omega\hat{\omega}$ appelé produit de ω par $\hat{\omega}$. Enfin, pour tout i, a_i et $\bar{a}_i$ sont dits conjugués. Deux mots sont dits *équivalents* si l'un d'entre eux peut se ramener à l'autre par suppression ou insertion de tout mot de la forme $\bar{a}_i a_i$ ou $a_i \bar{a}_i$ dans son écriture. Par ex. $a_5 a_1 \bar{a}_2 a_2 \bar{a}_1$ est équivalent à a_5. Il s'agit d'une relation d'équivalence qui permet de partager l'ensemble des mots en classes $[\![\omega]\!]$. Dans l'espace quotient F_n on peut définir une opération interne par $[\![\omega]\!] \cdot [\![\hat{\omega}]\!] = [\![\omega\hat{\omega}]\!]$, car le résultat ne dépend pas des représentants des deux classes facteurs du produit. $(F_n ; \cdot)$ est un groupe d'élément neutre $[\![\omega_0]\!]$, l'inverse $[\![\omega]\!]^{-1}$ de la classe $[\![\omega]\!]$ étant la classe $[\![\omega^{-1}]\!]$ où ω^{-1} est défini de la façon suivante : a) si $\omega = a_i$, resp. $\bar{a}_i$, $\omega^{-1} = \bar{a}_i$, resp. a_i ; b) si ω est formé de p symboles, ω^{-1} est formé des p symboles conjugués écrits en sens inverse.

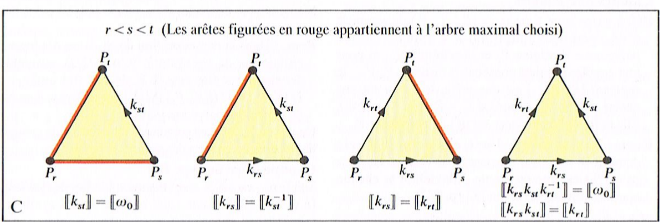
Il est d'usage de poser $\bar{a}_i = a_i^{-1}$ et d'une manière générale $a_i^n = a_i a_i \dots a_i$ (n fois pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), $= \omega_0$



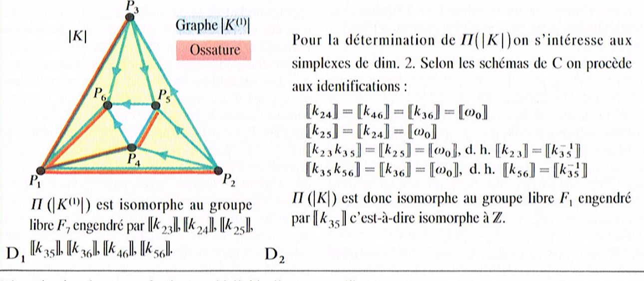
Chaînes polygonales et homotopie combinatoire



Groupe polygonal



Identification



Détermination du groupe fondamental à l'aide d'un groupe libre

pour $n = 0$, $= (\overline{a_i})^{-n}$ pour $-n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dans ces conditions, $\forall n \in \mathbb{Z}, [\![a_i]\!]^n = [\![a_i^{\,n}]\!]$.
La partie $E_n = \{[\![a_1]\!], \ldots, [\![a_n]\!]\}$ de F_n est un système générateur (p. 77). On dit que F_n est un groupe libre de type fini ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) engendré par E_n.
Ex. : Le groupe libre F_1 engendré par $\{[\![a]\!]\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Construction du groupe fondamental à l'aide d'un groupe libre de type fini

a) Si le polyèdre est un polyèdre connexe par arcs de dim. 1, il s'identifie à un graphe connexe (p. 253) : celui-ci possède n_s sommets P_i ($i = 1, 2, \ldots, n_s$) et n_a arêtes. On peut extraire de ce graphe un *arbre maximal* ou *ossature* (p. 253), c.-à-d. un arbre connectant tous les sommets. Cet arbre aura $(n_s - 1)$ arêtes. Il reste donc $(n_a + 1 - n_s)$ arêtes ne faisant pas partie de l'arbre. On oriente et on note ces arêtes $P_i P_j$ dans le sens dit des indices croissants (si $i < j$, sommet origine $= P_i$, sommet extrémité $= P_j$: notation a_{ij} ; si $i > j$, sommet origine $= P_j$, sommet extrémité $= P_i$: notation a_{ji}). Alors :

Th. 2 : *Le groupe fondamental d'un graphe connexe est isomorphe au groupe libre de type fini F_n ($n = n_a + 1 - n_s$) d'ensemble générateur E_n $\{[\![a_{pq}]\!]\}$.*

b) Pour un polyèdre connexe par arcs quelconque $|K|$, on peut, en tenant compte de la remarque faite après l'énoncé du th. 1, remplacer K par $K^{(2)}$.
Comme $K^{(1)} \subset K^{(2)}$ on peut considérer le graphe associé à $K^{(1)}$ et construire un groupe F_n selon a). L'existence de simplexes 2-dimensionnels dans $K^{(2)}$ conduit alors simplement à opérer des identifications entre éléments de F_n, comme l'indique la figure C. On obtient par ce procédé un groupe quotient. Celui-ci est isomorphe au groupe fondamental de $|K|$.

Th. 3 : *Le groupe fondamental d'un polyèdre connexe par arcs est isomorphe à un groupe quotient d'un groupe libre de type fini.*

Ex. : ill. D₁, D₂.

Surfaces closes, surfaces à bord

Le mot surface contient plusieurs interprétations possibles (*cf.* p. 407). La définition exploitée ici, dans le cadre de la topologie algébrique, est celle qui permet de construire un homéomorphisme de la surface sur un polyèdre de dim. 2 simplifié au maximum, c.-à-d. connexe, avec une triangulation dont toutes les faces sont incluses dans des surfaces triangulaires. Une surface sera donc un compact de dim. 2, cette double dimension devant être perceptible au voisinage de tout point (par ex. la figure centrale de l'ill. E p. 232 doit être écartée, puisque l'homéomorphie demandée ne peut être réalisée).

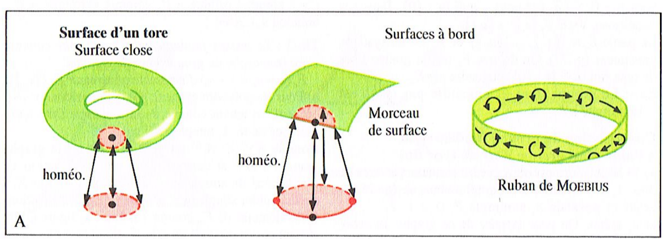
Déf. : Une partie connexe compacte de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ s'appelle une *surface close* (ou *surface fermée*) si tout point de celle-ci possède pour la topologie induite un voisinage ouvert homéomorphe à un disque ouvert ; elle s'appelle une *surface à bord* si elle possède d'une part des points ayant un voisinage ouvert homéomorphe à un disque ouvert, d'autre part des points appelés *points bordants* : un point bordant est un point qui, pour la topologie induite, possède un voisinage ouvert homéomorphe à la réunion d'un disque ouvert et d'un arc de JORDAN privé de ses extrémités inclus dans sa circonférence, l'image homéomorphe du point bordant étant à l'intérieur de l'arc (ill. A p. 246).

Rem. : Les surfaces closes sont des variétés 2-dimensionnelles particulières (voir p. 421). Le *bord* d'une surface à bord est l'ensemble de ses points bordants. Le bord peut par ex. être constitué d'une courbe de JORDAN (ex : disque fermé ; *ruban de* MŒBIUS, ill. A p. 246), voire de deux courbes de JORDAN (ex. : portion de cylindre de révolution comprise entre deux plans distincts, perpendiculaires à son axe), etc.

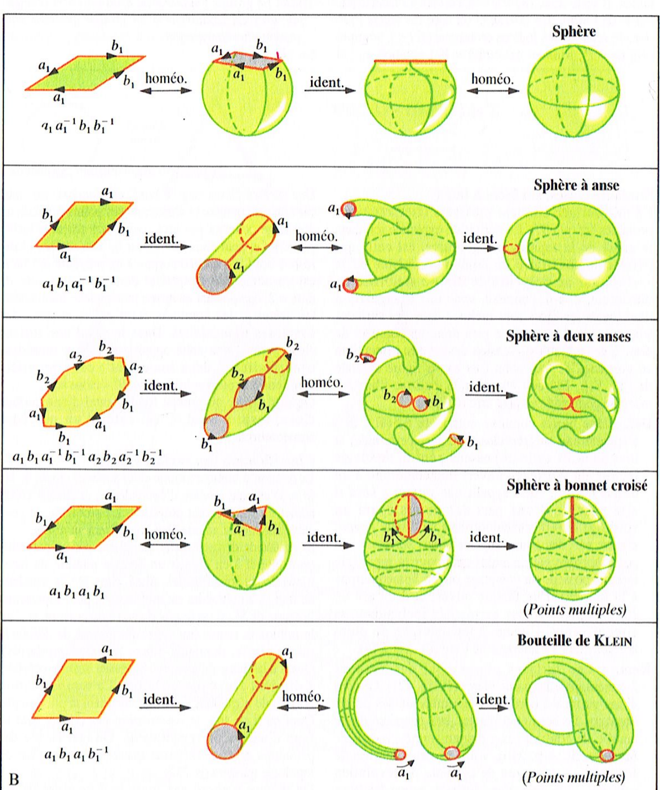
Une surface close, resp. à bord, est connexe par arcs, car elle est connexe et chacun de ses points possède un voisinage connexe par arcs (connexité par arcs locale p. 233). On peut alors démontrer qu'une surface close, resp. à bord, est homéomorphe à un polyèdre $|K|$ où K est un complexe simplicial dont les faces sont de dim. ≤ 2, comprenant au moins un simplexe triangulaire, les arêtes et les sommets étant celles et ceux des simplexes triangulaires. Dans le cas d'une surface close ($n \geq 3$) une arête appartient à deux simplexes triangulaires et deux seulement : cette propriété contribue à expliquer le qualificatif « close ».
On peut parler du groupe fondamental d'une surface close, resp. à bord. C'est celui d'un polyèdre homéomorphe.

Classification des surfaces closes

La relation d'homéomorphie entre surfaces closes de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) est une relation d'équivalence, et chaque classe admet un représentant polyédral. Le problème de cette classification est aujourd'hui complètement résolu.
Si on décide de représenter une classe par un polyèdre, on a intérêt à en choisir un dont le nombre de faces triangulaires soit minimal. Ainsi, dans $\mathbb{R}^3$, le squelette de dim. 2 du tétraèdre est tout indiqué pour représenter la classe de $\mathbb{S}^2$: il est le seul à avoir quatre faces, et c'est le minimum requis (un cube, qui permet de définir la même classe, demande douze faces triangulaires). Quant à la classe du tore, elle nécessite déjà un polyèdre à dix-huit faces triangulaires. La représentation polyédrale n'est donc pas nécessairement la plus simple. Quoi qu'il en soit, la construction des classes peut se faire d'une façon remarquable. On met en jeu des procédés d'identification associés à la notion de topologie quotient (p. 231).
On montre d'abord que toute surface close de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) est homéomorphe à un espace topologique



Surfaces closes, surfaces à bord



Classification des surfaces closes

obtenu à partir d'un polygone convexe de $\mathbb{R}^2$ à $2p$ côtés ($p \geq 2$), en identifiant convenablement ceux-ci par paires (ill. B). Si on repère par la même lettre deux côtés qui doivent être identifiés et si on flèche chacun d'eux, de façon à indiquer le sens de leur superposition, on peut représenter la succession des segments orientés rencontrés en faisant un tour complet de la frontière par une suite de la forme $a \ldots b^{-1} \ldots c \ldots a \ldots c^{-1} \ldots b^{-1} \ldots$, les exposants -1 signifiant que le segment correspondant a été parcouru à contre-sens (une telle suite doit évidemment être compatible avec les sommets : ainsi la suite $abb^{-1}a$ n'est pas possible, comme on le voit immédiatement en faisant un dessin).

On a pu prouver que les surfaces closes de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) peuvent être classées à partir des formes primitives suivantes :

(1) $a_1 a_1^{-1} b_1 b_1^{-1}$ ($\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$; ill. B)

(2) $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots\ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, g \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

($\mathbb{S}^2$ munie de g *anses* $\subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$; ill. B pour $g = 1, 2$)

(3) $a_1 b_1 a_1 b_1 \ldots\ldots a_k b_k a_k b_k, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

($\mathbb{S}^2$ munie de k *bonnets croisés* $\subset \mathbb{R}^n, n \geq 4$)

Les groupes d'homotopie fondamentaux des surfaces closes obtenues à partir de ces formes primitives sont deux à deux non isomorphes, si bien que les surfaces sont deux à deux non homéomorphes (th. 1 p. 237).

Rem. : Pour $g = 1$ dans la forme (2), on a une surface homéomorphe à un tore ; on désigne également par tore de *genre* g (ou tore à g trous) la surface $\mathbb{S}^2$ munie de g anses.

La forme (3) trouve sa réalisation dans $\mathbb{R}^4$ et non dans $\mathbb{R}^3$. Si on veut se faire une idée de la surface obtenue, ce ne peut être que par une *représentation* dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ (par ex. une projection affine de l'espace affine réel de dim. 3 sur un plan affine est une représentation de l'espace visuel : on l'utilise en dessin d'architecture). Ainsi si on veut représenter la forme (3) pour $k = 1$ (ill. B) à partir de la suite $a_1 b_1 a_1 b_1$, on aboutit à ce que l'on appelle une *surface à points multiples* : deux *nappes* de la surface se croisent en tout point intérieur au segment rouge du dessin le plus à droite. Relativement à chaque nappe, considérée indépendamment de l'autre, un point intérieur au segment possède un voisinage ouvert homéomorphe à un disque ouvert. Pour les extrémités du segment la situation est plus compliquée.

De même on peut montrer que la *bouteille* de Klein, introduite par la suite $a_1 b_1 a_1 b_1^{-1}$, qui est également une surface à points multiples (ill. B), est une représentation de la forme (3) pour $k = 2$.

Orientabilité

On peut définir l'orientabilité, ou la non-orientabilité, d'une surface en passant par les polyèdres. On se contentera ici de donner une idée intuitive de la non-orientabilité (donc de l'orientabilité).

Le ruban de Mœbius (ill. A) est une surface non orientable : on peut tracer sur ce ruban une courbe de Jordan J, dont le parcours est symbolisé par les flèches sensiblement rectilignes du dessin, le long de laquelle on « déplace » continûment sur la surface une courbe homéomorphe à un cercle orienté, symbolisée par une flèche arrondie : un tour complet sur J change l'orientation de la flèche arrondie en son opposée. Toute surface contenant une courbe de Jordan pour laquelle on a cette propriété est dite *non orientable*. Une surface est *orientable* si elle ne contient aucune courbe de Jordan J pour laquelle ce changement d'orientation ait lieu.

L'orientabilité, resp. la *non-orientabilité* est un invariant topologique.

$\mathbb{S}^2$, tous les tores de genre $g \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont orientables. En revanche les sphères $\mathbb{S}^2$ munies de k bonnets croisés, $k \in \mathbb{N}$-$\{0\}$, ne sont pas orientables. Parmi les plus importantes des surfaces à bord non orientables figure le ruban de Mœbius. On peut démontrer qu'une surface est non orientable si, et seulement si, elle contient un sous-espace homéomorphe à un ruban de Mœbius.

Nombre de connexité

Un autre invariant topologique important concernant les surfaces est le nombre de connexité Z. On entend par là le nombre maximal de courbes de Jordan, pouvant d'ailleurs se couper, que l'on peut tracer sur une surface close sans séparer celle-ci en deux parties disjointes. Pour une surface close orientable $Z = 2g$, g désignant le genre ($g = 0$ pour $\mathbb{S}^2$). Pour une surface close non orientable, $Z = k$ (nombre de bonnets croisés).

Topologie algébrique / Théorie de l'homologie I

Méthode fonctorielle

Parmi les procédés algébriques utilisés dans l'étude des espaces topologiques, la méthode fonctorielle joue un rôle fondamental (elle trouve également sa place dans bien d'autres domaines mathématiques).

On a affaire ici à des *catégories* reliées par des *foncteurs*.

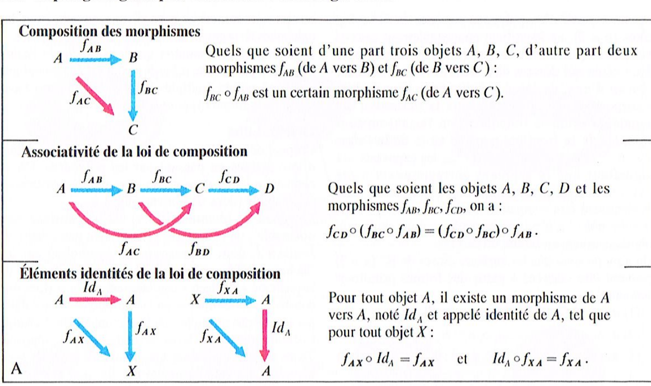
Une **catégorie** $\mathscr{C}$ se compose de deux classes (p. 29) :

a) Une classe Ob dite d'objets A, B, C ... b) Une classe Mo dite de morphismes, telle qu'à tout couple (A, B) d'objets on puisse associer l'*ensemble* $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ des morphismes de A (*source*) vers B (*but*) notés f_{AB}, tous éléments de Mo, satisfaisant d'une part à $Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathscr{C}}(A', B') \neq \varnothing \Rightarrow (A, B) = (A', B')$, d'autre part à la loi de composition définie selon les modalités du tableau A.

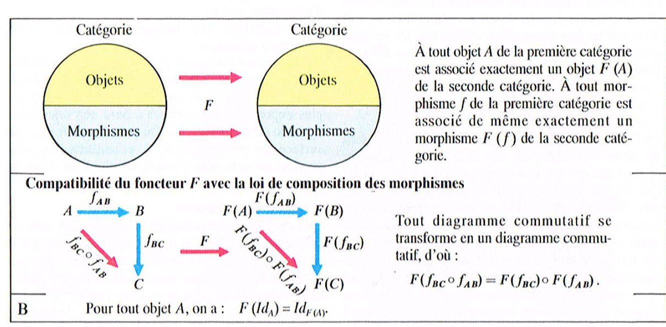
Ex. : 1) $Ob = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, Mo = la classe des matrices réelles : $Hom_{\mathscr{C}}(p, q) = \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$, loi de composition = produit matriciel.

2) $Ob = \mathbb{R}^n$, Mo = ensemble des bipoints (A, B) de $\mathbb{R}^n$: $Hom_{\mathscr{C}}(A, B) = \{(A, B)\}$, loi de composition $(B, C) \circ (A, B) = (A, C)$.

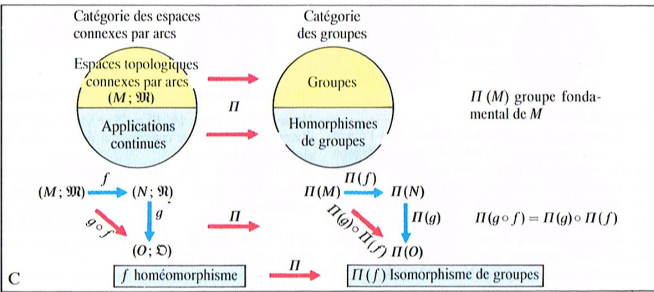
Si le premier exemple justifie le mot classe, le deuxième montre qu'un morphisme n'est pas nécessairement, pour une catégorie, une application.



Propriétés d'une catégorie



Propriétés d'un foncteur



Foncteur Π de la topologie algébrique

Les exemples suivants s'avèrent plus usuels :

3) Ob = classe des groupes, Mo = classe des homomorphismes de groupes, loi de comp. = comp. d'homomorphismes.

4) Ob = classe des espaces topologiques, Mo = classe des appl. continues, loi de comp. = comp. d'appl. continues.

5) Ob = classe des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, Mo = classe des appl. linéaires, loi de comp. = comp. d'appl. linéaires.

En se servant de la notion de *sous-catégorie*, on peut par ex. se limiter aux groupes abéliens, aux espaces topologiques connexes par arcs, etc.

On introduit les **foncteurs** pour mettre les catégories en relation. Un foncteur associe à tout objet d'une première catégorie un et un seul objet de la seconde catégorie, et à tout morphisme de la première catégorie un et un seul morphisme de la seconde, les conditions indiquées en tableau B devant être satisfaites.

De ces propriétés il s'ensuit que par ex. pour tout foncteur de la catégorie des espaces topologiques, ou d'une sous-catégorie (ex. 4) dans la catégorie des groupes (ex. 3), un homéomorphisme se transforme en isomorphisme de groupes : à des espaces topologiques homéomorphes correspondent des groupes isomorphes. Un foncteur de la topologie algébrique associe aux espaces topologiques des groupes comme invariants topologiques.

Foncteurs en topologie algébrique

On peut définir un foncteur Π associant la sous-catégorie des espaces topologiques connexes par arcs à la catégorie des groupes (ill. C) tel qu'à tout esp. top. connexe par arcs E corresponde son groupe fondamental $\Pi(E)$ (p. 237). Si, grâce à ce foncteur Π, on peut parvenir à classer les surfaces closes de $\mathbb{R}^3$ (p. 247), on ne peut déjà plus faire appel à lui pour la classification des sphères $\mathbb{S}^n$ (pp. 239, 241) pour lesquelles on a besoin d'autres invariants topologiques. Ceux-ci apparaissent par l'intermédiaire des foncteurs Π_n qui à tout esp. top. connexe par arcs E associe ses groupes d'homotopie n-dimensionnels $\Pi_n(E)$ (p. 241). La détermination de ces groupes est toutefois difficile (*cf.* $\Pi_n(\mathbb{S}^m)$ p. 241). On parvient à de meilleurs résultats en faisant intervenir les foncteurs d'homologie H_n (*cf. infra*) qui à tout espace topologique F associent ses groupes d'homologie $H_n(F)$. Ces foncteurs se sont en effet révélés des outils performants en topologie algébrique. La théorie des foncteurs d'homologie (ou théorie de l'homologie) a pu être développée grâce à la théorie des polyèdres. Les paragraphes qui suivent en donnent quelques propriétés.

Théorie de l'homologie simpliciale

Dans cette théorie, limitée aux polyèdres (Poincaré), on associe à un complexe simplicial r-dimensionnel K, pour chacune des valeurs $m \leq r$, un certain groupe $H'_m(K)$, construit à partir des simplexes m-dimensionnels appartenant à K. Ce groupe, appelé *groupe de* Betti *m-dimensionnel*, est le produit direct de p_m groupes monogènes et d'un certain nombre de groupes cycliques dont les ordres vérifient des propriétés particulières de divisibilité : p_m s'appelle le *nombre de* Betti *m-dimensionnel* et l'ordre d'un groupe cyclique un *coefficient de torsion*.

On peut montrer que deux complexes simpliciaux qui sont des triangulations soit d'un même polyèdre, soit plus généralement de deux polyèdres homéomorphes, possèdent des groupes de Betti m-dimensionnels isomorphes, si bien qu'on peut parler des groupes de Betti d'un polyèdre. Ces groupes, comme d'ailleurs les nombres de Betti et les coefficients de torsion, sont des invariants topologiques. Leur détermination demande une technique sérieuse.

Théorie de l'homologie singulière

Ω désignant un anneau commutatif unitaire, un *complexe* C est une suite, indicée par $\mathbb{Z}$, de couples (M_n, ∂_n) tels que : $\forall_n$, M_n est un Ω-module (p. 41), ∂_n un homomorphisme de M_n dans M_{n-1} vérifiant $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} \partial_n$.

On pose, pour tout n, $C_n(C) = \operatorname{Ker} \partial_n$, $B_n(C) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$.

Les éléments de $C_n(C)$ sont des *n-cycles*, ceux de $B_n(C)$ des *n-bords*. Deux n-cycles c et c' sont dits *homologues* si $c' - c$ est un n-bord. Cette relation d'*homologie* est une relation d'équivalence pour tout n. L'ensemble $H_n(C)$ *des classes d'homologie de degré n* peut être identifié à $C_n(C)/B_n(C)$ qui a une structure d'Ω-module. On l'appelle le $n^{\text{ième}}$ *module d'homologie de* C.

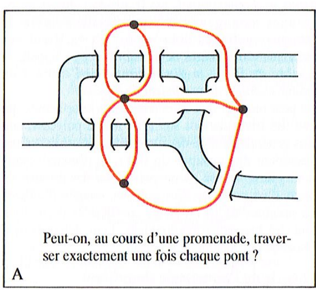
Tel est le point de départ de la théorie générale de l'homologie. Il n'est pas possible d'expliquer en quelques lignes les concepts et étapes qui ont conduit à la notion d'*homologie singulière* et à celle de *groupes d'homologies singulières p-dimensionnels* relatifs à un sous-espace topologique quelconque E de $\mathbb{R}^n$. Ces groupes $H_p(E)$ sont des invariants topologiques. Leur étude permet la résolution de nombreux problèmes de topologie.

Quelques résultats de la théorie de l'homologie

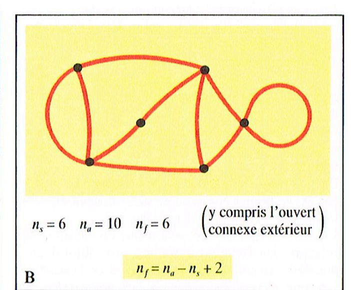
La propriété de connexité par arcs pour un espace toplogique E est équivalente à $H_0(E) \cong \mathbb{Z}$. Pour un espace topologique quelconque le groupe d'homologie 0-dimensionnel reflète le degré de connexité par arcs (nombre de composantes par arcs). En ce qui concerne les sphères, on a le résultat $H_m(\mathbb{S}^n) \cong 0$ pour $m \neq 0$ et $m \neq n$ $(n \geq 1)$, $H_m(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ pour $m = 0$ ou $m = n$.

On retrouve le fait que deux sphères de dim. différentes ne sont pas homéomorphes. En revanche, de $H_m(\mathbb{R}^n) \cong 0$ pour $m \geq 1$ et $H_0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}$, on ne peut pas déduire que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont homéomorphes si, et seulement si, $m = n$. Il faudrait faire appel à la théorie des groupes d'homologie singulière relatifs.

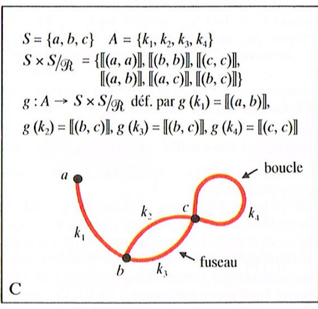
Quant au théorème du point fixe (ou théorème de Brouwer) énonçant que toute application continue d'une boule fermée n-dimensionnelle (disque fermé en dimension 2) dans elle-même possède un point fixe, il peut être effectivement démontré par des procédés qu'offre la théorie de l'homologie.



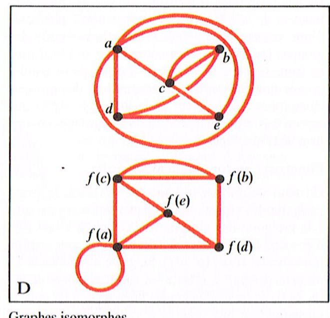
Problème des ponts de Koenigsberg



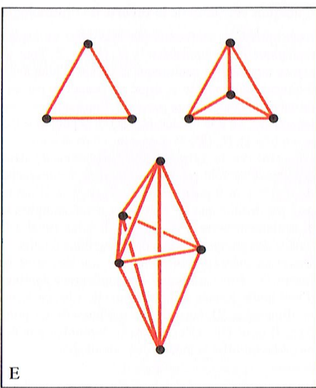
Formule d'Euler



Représentation d'un graphe

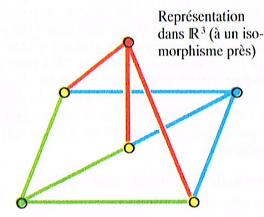


Graphes isomorphes



Graphes complets

Les trois sommets, resp. vert, rouge, bleu, sont connectables, chacun par une arête, aux trois autres sommets (jaunes).



Toute tentative de représentation dans $\mathbb{R}^2$ conduit à deux arêtes sécantes en dehors d'un sommet

Le graphe complet à cinq sommets de l'ill. E est également non planaire

F

Graphe non planaire

Théorie des graphes

La théorie des graphes trouve son origine dans l'étude des problèmes topologiques que l'on peut décrire en faisant intervenir des points (sommets) et des liaisons entre ceux-ci (arêtes). Celui des *ponts* de Kœnigsberg en est un exemple célèbre (ill. A) : il peut en effet être mathématisé par la donnée de quatre points du plan, dont certaines paires sont liées par un ou plusieurs arcs de Jordan qui ne se rencontrent pas en dehors des sommets (ill. A). La figure obtenue s'appelle un graphe.
Le complémentaire d'une telle figure supposée appartenir à un espace top., comme par exemple $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, peut faire également partie des objets à étudier dans la théorie des graphes. Par ex. la fig. B illustre la *formule d'Euler* relative à un graphe plan connexe (voir plus loin) liant les nombres supposés finis, n_s, n_a, n_f, resp. des sommets, des arêtes, des comp. connexes (ou faces) du complémentaire.
Tous les polyèdres dont les triangulations se composent de simplexes de dim. < 2 (p. 241) peuvent être considérés comme des graphes, ainsi que leurs images par homéomorphisme. Aujourd'hui la théorie des graphes est totalement indépendante de tout contexte d'applications (math. pures, physique théorique, problèmes techniques, réseaux).

Définition d'un graphe

Les graphes des fig. A et B sont des exemples de graphes topologiques, c.-à-d. qu'ils sont perçus comme des parties d'un espace topologique, ici $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$. La théorie actuelle repose sur une définition dans laquelle on ne fait pas intervenir d'espace topologique sous-jacent. On se borne à définir d'abord deux ensembles sans élément commun, l'un S, ensemble d'éléments appelés *sommets*, l'autre A, ensemble d'éléments appelés *arêtes*, et ensuite des *relations d'incidence* entre sommets et arêtes, que l'on va d'ailleurs traduire par une application. On introduit en effet une relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble des couples $(x, y) \in S \times S$:
$(x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y') \vee (x, y) = (y', x')$.
On vérifie facilement que c'est une relation d'équivalence et que $[\![(x, y)]\!]$ contient un seul élément si $x = y$, deux éléments si $x \neq y$. Une classe est donc définie soit par deux sommets distincts, soit par un sommet auquel on confie un rôle double. On peut la noter en abrégé $[\![x, y]\!]$ $(= [\![y, x]\!])$, que x et y soient distincts ou non. Dire alors que x et y sont incidents à l'arête k, c'est dire que l'on a $g(k) = [\![x, y]\!]$, où g est une certaine application de A dans $S \times S/_{\mathcal{R}}$.

Déf. : Le triplet $G := (S, A, g)$ est un *graphe*, dont *l'ensemble des sommets* est S, *l'ensemble des arêtes* A. Si $g(k) = [\![x, y]\!]$, on dit également de x et y qui sont incidents à k, qu'ils sont *connectés* par k. Si $x = y$, k prend le nom de *boucle*. S'il existe $k_1 \neq k_2$ tels que $g(k_1) = g(k_2) = [\![x, y]\!]$, on dit que x et y sont connectés par un *fuseau* (ensemble non réduit à un singleton des arêtes qui les connectent). Enfin on dit que deux sommets distincts sont *adjacents* s'il existe une arête les connectant.

Représentation d'un graphe, graphe topologique

La représentation d'un graphe se fait, si possible, dans $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{R}^p)$, $p = 2$ ou 3, par des points, des arcs de Jordan, voire des courbes de Jordan dans le cas de boucles, qui ne se rencontrent qu'en des sommets (*ex.* ill. C). D'autres espaces topologiques peuvent être également sollicités pour la représentation d'un graphe : par ex. une sphère, un tore ou d'autres surfaces closes.
Si les sommets d'un graphe sont des points d'un espace topologique, et les arêtes des arcs ou courbes de Jordan de cet espace, dont les points communs sont des sommets du graphe, on dit que celui-ci est un *graphe topologique*.

Sous-graphe, graphe partiel

On appelle *sous-graphe* d'un graphe G tout graphe que l'on obtient en supprimant un sous-ensemble de sommets de G, et donc également le sous-ensemble des arêtes qui sont incidentes aux sommets supprimés.
On appelle *graphe partiel* d'un graphe G tout graphe obtenu en supprimant un sous-ensemble d'arêtes de G. On peut donc parler de sous-graphe partiel.

Isomorphie des graphes

Les graphes de l'ill. D semblent à première vue différents. Cependant ils ont même structure au sens de la théorie des graphes. D'une manière précise on peut définir une bijection entre les deux ensembles de sommets d'une part et les deux ensembles d'arêtes d'autre part, qui respectent les relations d'incidence.
On dit que les graphes sont isomorphes.
L'image topologique d'un graphe topologique G est un graphe (topologiquement) isomorphe à G.

Graphes particuliers

a) **Graphes finis** : Il s'agit de graphes dont l'ensemble des sommets est fini. Un tel graphe peut toutefois posséder un ensemble d'arêtes infini. Il existe alors au moins un fuseau de cardinal infini.
b) **Graphes infinis** : L'ensemble des sommets est infini, mais l'ensemble des arêtes est fini ou infini.
c) **Graphe sans boucle ni fuseau** : Toute arête connecte deux sommets distincts, et pour deux sommets quelconques il existe au plus une arête qui les connecte. Si deux sommets distincts sont toujours adjacents le graphe est dit *complet* (fig. E).
d) **Graphes plans** : Il s'agit de graphes représentables dans $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$. Il existe des graphes à structure très simple qui ne sont pas représentables dans $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ (*ex.* ill. F : graphe des six numéros d'un dé à jouer. a et b sont connectés si, et seulement si, $a + b$ est impair).
e) **Graphes dirigés** : Chacune des arêtes peut être orientée et si elle connecte deux sommets distincts, l'un est le sommet origine, l'autre le sommet extrémité ; on pourra donc imposer un sens de parcours d'une arête. Une arête non orientée peut être parcourue dans les deux sens. Dans une représentation d'un graphe dirigé, les arêtes orientées sont fléchées.

Degré d'un sommet

Le *degré* deg.x d'un sommet x d'un graphe est le cardinal de l'ensemble des arêtes incidentes à x (une boucle apporte une ou deux incidences selon convention). Pour un graphe fini, sans boucle ni fuseau, deg.x est le nombre des sommets auxquels x est adjacent. Pour un tel graphe le nombre des arêtes n_a vérifie la relation $n_a = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} \text{deg.}\, x$.

$(a, k_1, b, k_2, b, k_3, c, k_4, d, k_5, e, k_6, d, k_7, f, k_7, d, k_8, g)$ Chaîne ouverte liant a et g

$(a, \ldots\ldots\ldots, g, k_9, a)$ Chaîne fermée de point-base a

$(a, \ldots\ldots\ldots, f, k_{10}, g)$ Chaîne simple liant a et g

$(a, k_1, b, k_3, c, k_4, d, k_8, g)$ Chemin liant a et g

$(a, \ldots\ldots\ldots, g, k_9, a)$ Cycle de point-base a

$(a, k_1, b, k_2, b, k_3, c, k_4, d, k_5, e, k_6, d, k_7, f, k_{10}, g, k_8, d, k_{11}, g, k_9, a)$

Chaîne eulérienne fermée (graphe avec k_{12})

$(a, \ldots\ldots\ldots, a, k_{12}, e)$

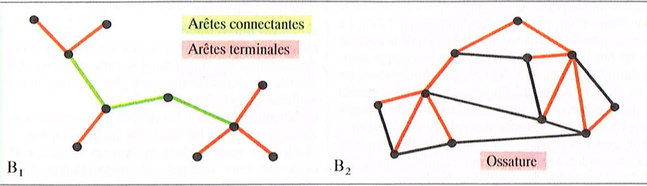
Chaîne eulérienne ouverte (graphe sans k_{12})

$(c, k_3, b, k_1, a, k_{12}, e, k_5, d, k_8, g, k_{10}, f)$

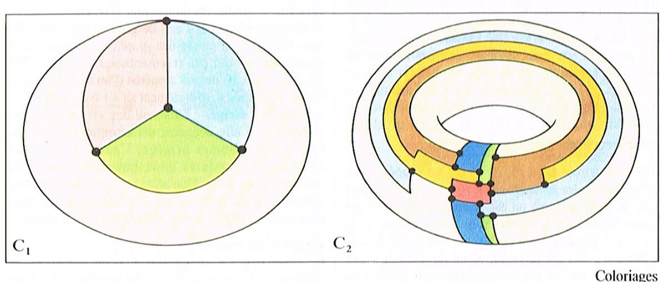
Chemin hamiltonien (graphe avec k_{12})

A

Chaînes, chemins, cycles



Arbre et ossature



Coloriages

(suite de la page 251)

Pour un graphe fini complet de n_s sommets, tous les sommets ont même degré : deg. $x = n_s - 1$. On en déduit que le nombre d'arêtes est $n_a = \frac{1}{2} n_s (n_s - 1)$.

Un graphe pour lequel chaque sommet a le même degré est dit *régulier*. Les graphes complets, les graphes qui définissent les surfaces des polyèdres réguliers (p. 170 ill. D) en sont des exemples. Pour un graphe fini régulier sans boucle ni fuseau, on a $n_a = \frac{1}{2} n_s \cdot$ deg. x.

Chaînes, chemins, cycles

Une *chaîne* liant le couple de points (x_1, x_n), $n > 1$, est une séquence finie de sommets x_i et d'arêtes k_j de la forme $(x_1, k_1, x_2, k_2, \ldots, x_{n-1}, k_{n-1}, x_n)$ dans laquelle k_ν est incidente à x_ν et $x_{\nu+1}$, $\nu = 1, \ldots, n-1$ (ill. A) ; n est la *longueur* de la chaîne. Les sommets et les arêtes peuvent se répéter dans la séquence. On dit la chaîne d'*origine* x_1 et d'*extrémité* x_n si on privilégie le sens de parcours de x_1 vers x_n : $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si $x_1 = x_n$, la chaîne est dite *fermée*, sinon on la dit *ouverte*. Une chaîne est dite *simple* si ses arêtes sont toutes distinctes (ill. A).

Une chaîne est dite *élémentaire* si ses sommets sont distincts deux à deux, sauf peut-être x_1 et x_n. Une chaîne élémentaire est nécessairement simple. On emploiera ici la terminologie, non universelle : *chemin* pour chaîne élémentaire ouverte, *cycle* pour chaîne élémentaire fermée. Toute chaîne ouverte liant x_1 et x_n peut être éventuellement « raccourcie » en un chemin liant x_1 et x_n ; toute chaîne fermée, de point-base $x = x_1 = x_n$, peut être éventuellement « raccourcie » en un cycle de même point-base.

Une chaîne *eulérienne* d'un graphe est une chaîne qui passe une fois et une seule par chaque arête de ce graphe (ill. A). Dans le problème des ponts de KŒNIGSBERG (p. 250 fig. A) c'est une telle chaîne que l'on voulait construire (*cf.* infra). Un chemin ou un cycle qui contient tous les points d'un graphe est dit *hamiltonien*.

Graphes connexes

On dit que deux points d'un graphe G sont *connectables* soit s'ils sont confondus, soit s'il existe une chaîne les liant. La relation « x et y connectables » est une relation d'équivalence dans l'ensemble S des sommets de G. S'il n'y a qu'une classe d'équivalence, G est dit *connexe*. Pour les graphes topologiques cette notion s'identifie à la connexité par arcs. S'il y a plus d'une classe d'équivalence, chacune d'elle définit un sous-graphe connexe, appelé *composante* (connexe) de G. L'ensemble des arêtes de G est alors la réunion des ensembles A_i des arêtes de chaque composante G_i, ces ensembles A_i étant deux à deux disjoints. Pour un graphe fini, sans boucle ni fuseau, possédant Z composantes, on a la relation

$n_a \leq \frac{1}{2} (n_s - Z)(n_s - Z + 1)$. Par suite si l'on a, pour

un tel graphe, $n_a > \frac{1}{2} (n_s - 2)(n_s - 1)$, on peut conclure

qu'il est connexe.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe connexe, sans boucle, ayant un nombre fini d'arêtes, contienne une chaîne eulérienne fermée, resp. ouverte, est que le degré de chaque sommet soit pair, resp. qu'il y ait exactement deux sommets de degré impair. Le problème des ponts de KŒNIGSBERG est donc impossible. Des critères comparables concernant les chemins et cycles hamiltoniens ne sont connus à ce jour que pour des graphes particuliers.

Rem. : Un graphe fini sans boucle dont tout sommet a un degré pair est dit *graphe eulérien*.

Arbres

La manipulation de graphes fait fréquemment intervenir ce que l'on appelle des *arbres*. Leur structure est particulièrement simple : il s'agit de graphes finis, ayant au moins deux sommets, connexes et sans cycle (fig. B_1). Un arbre est caractérisé par deux propriétés relatives aux arêtes. Une arête d'un graphe est dite *terminale* si l'une au moins de ses extrémités est de degré 1 (fig. B_1) ; elle est dite *connectante* si elle n'est pas terminale et si sa suppression dans la composante C à laquelle elle appartient fait perdre à C sa connexité (fig. B_1).

Un graphe fini est un arbre si, et seulement si, il est connexe et chacune de ses arêtes est soit terminale, soit connectante.

Pour tout arbre de n_s sommets et n_a arêtes on a la relation $n_s = n_a + 1$.

Si un graphe fini G de plus d'un sommet est connexe sans être un arbre, on peut construire un graphe partiel qui soit un arbre : un tel arbre s'appelle une *ossature* de G. Il est possible, en général, d'obtenir plusieurs ossatures, qui ne sont pas nécessairement isomorphes, bien qu'ayant le même nombre de sommets, donc d'arêtes.

Problème des quatre couleurs

L'impression en couleurs d'une carte géographique politique plane a conduit à préciser le nombre minimal de teintes dont il faut disposer pour différencier des pays situés de part et d'autre de limites territoriales communes. On mathématise le problème en passant par un graphe topologique G de $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ ayant les propriétés suivantes : les deux ensembles de sommets, resp. d'arêtes, sont finis. Les arêtes sont des arcs ou courbes de JORDAN. Tous les sommets sont de degré ≥ 3. Le complémentaire de G dans $\mathbb{R}^2$ est un ouvert constitué d'un nombre fini de composantes connexes, les faces. Chaque face est un territoire. Un terrritoire peut être une terre, une mer ou un océan. Un état est constitué d'un ou plusieurs territoires ; il peut être national ou international. Tous les terrritoires sont bornés sauf un. Une carte rectangulaire ampute donc au moins un territoire. On adopte, pour la représentation cartographique, les deux règles suivantes :

a) deux territoires dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points communs (nombre qui peut être nul) peuvent être affectés de la même couleur (on notera que ces points communs sont des sommets de G).

b) deux territoires dont les frontières ont en commun au moins une arête doivent être affectés de couleurs différentes.

Dans ces conditions le théorème dit des cinq couleurs fut longtemps le meilleur (« pour colorier une carte plane cinq couleurs suffisent »). Cependant on ne connaissait aucun exemple nécessitant cinq couleurs différentes ; malheureusement la conjecture des quatre couleurs ne pouvait être levée que par la vérification d'un nombre de situations dépassant les capacités humaines. Ce n'est que récemment, ordinateur aidant, que la propriété des quatre couleurs put être énoncée comme vraie. On ne peut aller en-dessous de quatre couleurs, comme le montre la figure C_1.

Rem. : Pour une carte non plane le résultat n'est plus le même en général. Si pour une carte sphérique la propriété des quatre couleurs reste valable, en revanche pour un carte torique il faut passer à sept couleurs (fig. C_2).

Chemins indépendants

Graphe 2-connexe :
Toute paire de sommets est connectée par au moins deux chemins indépendants.

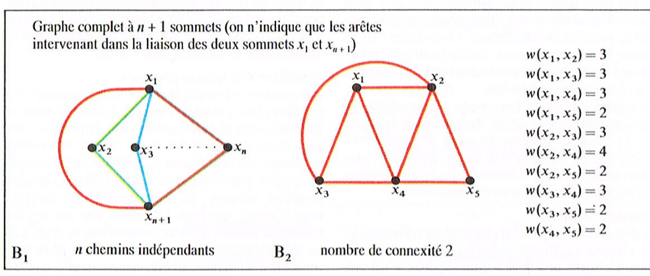
A_1

Sommet d'articulation

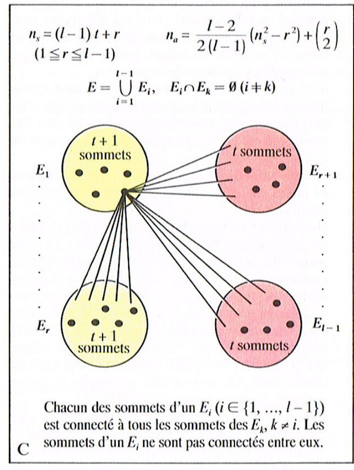
Graphe 1-connexe et non 2-connexe :
Les sommets x et y ne sont pas reliés par deux chemins indépendants.

A_2

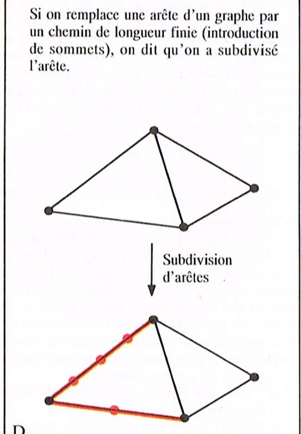
Graphes une et deux fois connexes



Graphe n-connexe, nombre de connexité



Graphe de Turan



Subdivision d'arêtes

Graphes plans

La formule d'Euler donnant le nombre n_f de faces d'un graphe topologique plan connexe à n_s sommets et n_a arêtes (ill. B p. 250) peut se généraliser à un graphe topologique plan G non connexe de la façon suivante : si G est formé de Z composantes connexes $G_1, G_2, \dots G_Z$, on a, pour tout $i = 1, 2, \dots Z$,
$n_{f_i} = n_{a_i} - n_{s_i} + 2$ que l'on écrit $n_{f_i} - 1 = n_{a_i} - n_{s_i} + 1 =$ nombre de faces bornées de G_i . En sommant pour i allant de 1 à Z , on obtient donc :
nombre de faces bornées de $G = n_f - 1 = n_a - n_s + Z$, soit $n_f = n_a - n_s + Z + 1$, formule valable quel que soit $Z \geq 1$.

Dans tout ce qui suit on ne considère que des graphes finis, sans boucle ni fuseau.

Graphes multiconnexes, nombre de connexité

On étudie, dans ce paragraphe et le suivant, la connexité d'un sous-graphe d'un graphe connexe. Si on suppose que deux sommets distincts quelconques x et y de G sont connectables par deux chaînes élémentaires n'ayant en commun que x et y (on dira *indépendantes*), la suppression d'un sommet de G n'enlève pas la connexité au sous-graphe restant. On dit alors que G est deux fois connexe, ou 2-connexe (fig. A_1). Un graphe est dit connexe si pour toute paire de sommets $\{x, y\}$ il existe au moins une chaîne élémentaire connectant x et y : un graphe 2-connexe est donc 1-connexe (fig. A_1). On peut d'ailleurs remarquer que la 1-connexité s'identifie à la connexité. Si un graphe est 1-connexe sans être 2-connexe, on dit que son nombre de connexité est 1. Si G est un graphe connexe, on dit que le sommet c de G est un *point d'articulation* si le sous-graphe obtenu en supprimant c n'est pas connexe (fig. A_2).

Rem. : Si un graphe est 2-connexe il existe toujours un cycle élémentaire contenant deux sommets donnés, resp. deux arêtes données.

Généralisation : Un graphe est dit *n-connexe* si pour toute paire de sommets $\{x, y\}$ il existe au moins n chaînes élémentaires, deux à deux indépendantes, connectant x et y. Un tel graphe contient nécessairement au moins $(n + 1)$ sommets et chaque sommet est de degré $\geq n$. Par ex., un graphe complet à $(n + 1)$ sommets est n-connexe sans être $(n + 1)$-connexe (fig. B_1). Si d'un graphe n-connexe on retire au plus $(n - 1)$ sommets, le sous-graphe restant est encore connexe. Plus précisément si on retire r sommets, $r < n$, le graphe restant est $(n - r)$-connexe.
À un graphe n-connexe qui n'est pas $(n + 1)$-connexe, on associe le *nombre de connexité n* . Pour un tel graphe deux sommets distincts quelconques sont connectables par au moins n chaînes élémentaires deux à deux indépendantes, et il existe au moins deux sommets distincts qui ne sont connectables que par au plus n chaînes élémentaires deux à deux indépendantes. Si on désigne par $w(x, y)$ le nombre maximal de chaînes élémentaires deux à deux indépendantes connectant deux sommets distincts x et y, le plus petit des nombres $w(x, y)$ est le nombre de connexité du graphe (fig. B_2). Si le graphe n'est pas complet on peut se limiter, pour la recherche de ce minimum, à l'étude des paires de sommets non adjacents (fig. B_2) : si $w(x, y)$ est $\geq p$ pour toutes les paires de sommets qui ne sont pas adjacents, alors il en est de même pour toutes les paires de sommets du graphe.

Coefficient d'articulation, théorème de Menger

On suppose que x et y sont deux sommets distincts non adjacents d'un graphe connexe G : il est possible de construire un ensemble, de cardinal minimal, constitué de sommets tous différents de x et y , dont la suppression dans G déconnecte x et y. Un tel ensemble, dont on note le cardinal $t(x, y)$, s'appelle *ensemble d'articulation relatif à* (x, y). On peut remarquer que cette notion n'existe pas pour un graphe complet.
La plus petite des valeurs $t(x, y)$ que G permet de construire s'appelle le *coefficient d'articulation de G* : c'est le nombre minimal de sommets bien choisis qu'il est nécessaire et suffisant de supprimer dans G pour que le sous-graphe restant soit non-connexe.
Le théorème de Menger exprime que $t(x, y) = w(x, y)$ pour deux sommets non adjacents : il s'ensuit que pour un graphe non complet coefficent d'articulation et nombre de connexité sont égaux. Dans un graphe non complet, de nombre de connexité n, il existe un ensemble d'articulation de cardinal n et il n'en existe pas de cardinal inférieur.

Théorème de Turan

Le problème suivant se pose assez fréquemment : on se donne un nombre n_s de sommets et une propriété E. Quel nombre d'arêtes n_a faut-il associer à ces données pour que tout graphe à n_s sommets et n_a arêtes possède la propriété E, et qu'il existe au moins un graphe à n_s sommets et $(n_a - 1)$ arêtes qui ne la possède pas ? En somme il s'agit de la recherche d'un n_a minimal. On peut proposer l'exemple suivant : E est la propriété pour un graphe à n_s sommets de contenir un sous-graphe complet à l sommets $(3 \leq l \leq n_s)$. On peut démontrer le résultat

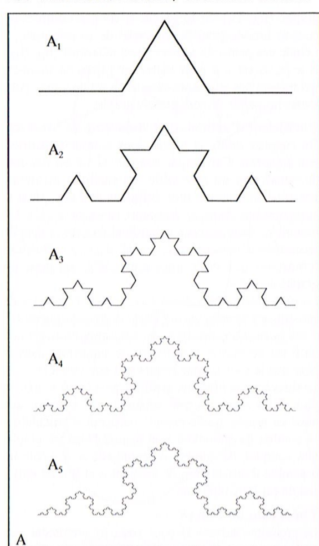
$$n_a = \frac{l-2}{2(l-1)}(n_s^2 - r^2) + \binom{r}{2} + 1 \text{, où } r \text{ est ainsi défini :}$$

$$r \equiv n_s \text{ mod. } (l-1),\ 1 \leq r \leq l-1.$$

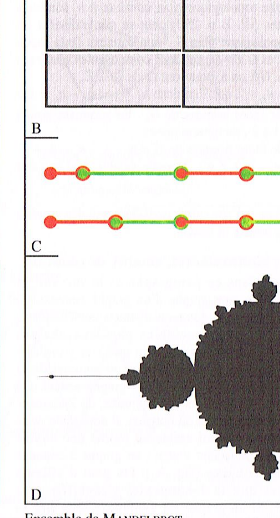
À un isomorphisme près il existe un et un seul graphe à n_s sommets et $(n_a - 1)$ arêtes qui ne possède pas cette propriété (graphe de Turan, ill. C).

Théorème de Kuratowski

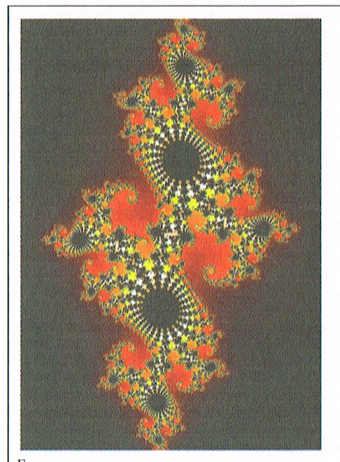
Parmi les graphes non planaires les plus importants, on peut citer d'une part le graphe D du dé à jouer (fig. F p. 250), d'autre part le graphe complet C à cinq sommets (ill. E p. 250). Un graphe dont un sous-graphe partiel est isomorphe à D ou à C n'est pas planaire. Réciproquement un graphe non planaire contient un sous-graphe partiel isomorphe ou bien à D, ou bien à C , ou bien à un graphe obtenu à partir de D ou C par division des arêtes (ill. D). Ces résultats, difficiles à justifier, sont dus à Kuratowski. On peut énoncer : *Un graphe fini est planaire si, et seulement si, il ne contient pas de sous-graphe partiel isomorphe à D ou C à une subdivision près des arêtes.*

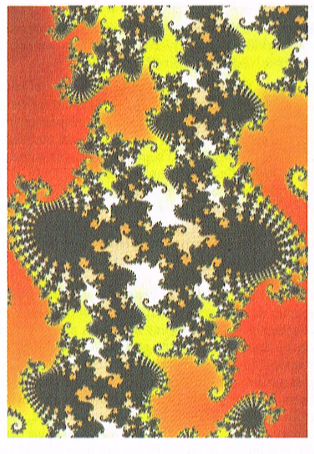


Courbe de Von Koch



Ensemble de Mandelbrot





Ensemble de Julia rempli

Ce chapitre a trait à l'étude de certaines configurations d'un espace métrique, principalement en géométrie euclidienne de dimension finie.

La notion de courbe est, par exemple, évoquée par un cheveu bouclé, celle de sphère par l'enveloppe extérieure d'une mirabelle. Mais si l'on observe à la loupe, puis au microscope, la peau d'une mirabelle, on découvre des détails nombreux et étonnants, souvent répétitifs, bousculant sans ménagement le concept de sphère. Il existe des figures, possédant une définition mathématique, dont l'analyse suggère un phénomène du type précité ; ces figures aident à comprendre la notion d'objet fractal. En voici un exemple classique (Courbe de Von Koch) :

La figure A_1 est celle d'une ligne brisée L de quatre segments égaux tels que les deux segments intermédiaires sont deux côtés d'un triangle équilatéral dont le troisième côté non utilisé est en alignement avec les deux segments extrêmes, sans point commun, de L. Pour construire la figure A_2 on remplace chacun des segments de L par une ligne brisée semblable à L dans le rapport $\frac{1}{3}$ comme il est indiqué. Les figures A_3 et A_4 sont obtenues en réitérant le procédé.

Si on poursuit indéfiniment celui-ci on obtient un arc de Jordan limite K, appelé courbe de Von Koch. Aucune application continue injective d'un segment dans $\mathbb{R}^2$, $t \mapsto f(t)$, définissant K, n'admet de fonction dérivée. Si on cherche à rectifier K, on trouve une longueur infinie. Si un tracé au crayon ou à la plume à dessin peut évoquer K (fig. A_5), c'est bien parce que le trait a une épaisseur dans laquelle K est incluse ; cette épaisseur se retrouve d'ailleurs dans tout tracé pratique d'un arc de Jordan plan, qu'il soit 0, 1 ou 2-régulier. Un dessin ne peut avoir valeur absolue.

La succession des constructions effectuées sur chaque segment de L montre que K est la réunion de quatre arcs K' égaux entre eux, et semblables à K dans le rapport $\frac{1}{3}$. Cette réunion devient une partition si on enlève une extrémité convenable à chacun de ces arcs.

Déf. 1 : Un sous-ensemble F d'un espace euclidien est dit à *homothétie interne* s'il existe une partition de F dont toutes les parties sont semblables à F.

Par ex. tout intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b[$ est à homothétie interne pour une quelconque partition du type $[a, x_1[, [x_1, x_2[, \dots, [x_\varphi, b[$ (fig. C).

Rem. : Un cas important est celui où la partition est finie, les n parties ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$) étant isométriques entre elles, donc dans un même rapport de similitude r avec F (partition finie régulière). C'est le cas relatif à K envisagé plus haut $\left(n = 4, r = \frac{1}{3}\right)$.

C'est également le cas d'une surface rectangulaire dont on ampute la frontière de deux côtés consécutifs et que l'on divise en n parties égales comme le suggère la figure B

$\left(n = \text{carré dans } \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, r^2 = \frac{1}{n}\right)$.

On peut généraliser l'ex. de la surface rectangulaire à un pavé dans un esp. euclidien de dim. d :

on aura alors $r^d = \frac{1}{n}$, soit $\frac{-\log n}{\log r} = d$.

Déf. 2 : Soit F une partie bornée non vide d'un espace métrique et α un nombre réel > 0. On désigne par *α-mesure extérieure de Hausdorff de F* le réel $m_\alpha(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf \sum_{i \in I} d_i^{\alpha}\right)$ où l'inf. est pris sur tous les recouvrements (indicés) de F par des boules de diamètre $d_i \leq \varepsilon$.

Dimension de Hausdorff-Besicovitch, ou dim. fractale

C'est pour F le réel α_0 tel que $m_\alpha(F) = +\infty$ si $\alpha < \alpha_0$ et $m_\alpha(F) = 0$ si $\alpha > \alpha_0$. L'existence d'un tel réel α_0 pour toute partie F bornée d'un espace euclidien a été établie par Besicovitch. Lorsque F est un arc de Jordan régulier, resp. une nappe injective régulière dans un espace euclidien, la dimension fractale coïncide avec la dimension topologique, soit 1, resp. 2 (*cf.* p. 233).

Ensemble fractal

On entend par là toute partie bornée d'un espace métrique dont la dimension fractale est strictement supérieure à sa dimension topologique. Il s'agit d'une notion liée à la métrique définissant la topologie.

Th. : *Si F est un sous-ensemble borné d'un espace euclidien de dimension finie à homothétie interne pour une partition finie régulière, alors $\frac{-\log n}{\log r}$ est égal à sa dimension fractale* (notations de la remarque antérieure).

Alors que la dimension fractale d'un pavé est égale à sa dimension topologique, celle de la courbe de Von Koch est égale à 1,26... supérieure à sa dimension topologique. Il s'agit donc d'un ensemble fractal. L'ensemble triadique de Cantor (p. 358) est également un ensemble fractal

$\left(\text{sa dimension est } \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}63 \dots\right)$.

Géométrie fractale

Imaginée par Mandelbrot, elle a pour but l'étude d'objets mathématiques de la géométrie euclidienne de dim. finie, dont la description passe en fait par des images que seul un ordinateur peut rendre. Il s'agit en particulier d'ensembles (la plupart sont des ensembles fractals) dont on peut percevoir la complexité, souvent répétitive, en grossissant par étapes successives une configuration locale sélectionnée.

Ex. : Ens. de Mandelbrot, ens. de Julia rempli.

On considère la suite complexe $z_{n+1} = z_n^2 + c$, $z_0 = 0$, c fixe, élément de $\mathbb{C}$.

L'*ensemble M de Mandelbrot* est l'ensemble des c tels que la suite soit bornée. Il est compact, connexe et la dimension fractale de sa frontière est 2 (résultat de Shishikura) (fig. D).

On reprend la même suite, avec z_0 quelconque ; c étant donné, on appelle *ensemble de Julia rempli* associé à c l'ensemble $\mathfrak{J}_c$ des z_0 tels que (z_n) soit bornée. $\mathfrak{J}_c$ est connexe ssi c est un él. de M (fig. E).

La géométrie fractale trouve son application dans de nombreux phénomènes physiques.

On rencontre pp. 169, 201, 371 les notions de valeurs propres et de sous-espaces propres d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E sur un corps commutatif K. On approfondit ici ces concepts.

Préliminaires

Déf. 1 : Étant donné une famille non vide de s.e.v. E_i de E, $i \in I$ (I ens. d'indices fini ou non), la *somme* $\Sigma = \underset{i \in I}{+} E_i$ est par déf. le s.e.v. de E dont les éléments sont les sommes finies de vecteurs $\vec{v}_i$ pris dans les E_i. $\sum$ est dite *somme directe* (et se note alors $\bigoplus_{i \in I} E_i$) si $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, \vec{u}_1, \vec{u}_2 .., \vec{u}_q$ non nuls pris dans q sous-espaces E_i d'indices différents, le système $(\vec{u}_1, \vec{u}_2 .., \vec{u}_q)$ est libre.

Déf. 2 : Un K-espace vectoriel E muni de ses deux lois +, ·, resp. interne et externe, devient une algèbre A si l'on introduit une troisième loi ×, interne, distributive par rapport à l'addition et telle que $\forall(\lambda, \mu) \in K^2$, $\forall\, (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$,
$(\lambda \cdot \vec{u}) \times (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.

A est dite associative, resp. commutative, si la loi × est associative, resp. commutative.

Ex. : Le K-espace vectoriel $L\,(E)$ des endomorphismes de E devient une algèbre associative si l'on choisit pour troisième loi celle de la composition de deux endomorphismes.

Appl. : Si $f \in L\,(E)$ et si $Q\,(X) = \sum_0^n a_k X^k \in K[X]$,

$Q\,(f) = \sum_0^n a_k f^k$ ($f^0 = Id$) est l'élément de $L\,(E)$ image de f par Q.

En dim. finie, si M est la matrice représentative de f dans une base de E, $Q\,(M)$ est celle de $Q\,(f)$ dans la même base.

Définitions générales

Soit E un K-espace vectoriel de dimension quelconque et $f \in L\,(E)$: λ, élément de K, est dit *valeur régulière* de f si $f - \lambda\, Id$ est inversible, *valeur spectrale* si $f - \lambda\, Id$ est non inversible, *valeur propre* si $f - \lambda\, Id$ est non injectif, ou, de manière équivalente, de noyau Ker $(f - \lambda\, Id) \neq \{\vec{0}\}$.

L'ensemble des valeurs propres P est inclus dans le spectre S, ensemble des valeurs spectrales. L'ensemble des valeurs régulières est $K \setminus S$. Si E est de dimension finie, P s'identifie à S, car $\forall g \in L\,(E)$, dim Ker (g) + dim $g\,(E)$ = dim E.

Exemples en dim. infinie : a) $E = \mathbb{R}\,[X]$; $Q\,(X) \in E$, $Q\,(X) \mapsto XQ\,(X)$, resp. $Q\,(X^2)$, resp. $Q'\,(X)$

$K \setminus S$	=	$\varnothing$	resp.	$\varnothing$	resp.	$\mathbb{R}^*$
S	=	$\mathbb{R}$	resp.	$\mathbb{R}$	resp.	$\{0\}$
P	=	$\varnothing$	resp.	$\{1\}$	resp.	$\{0\}$

b) E = $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe infinie : $D\,(f) = f'$. Alors $P = \mathbb{R}$.

La notion la plus importante présentée dans les déf. précédentes est celle de valeur propre. Si $\lambda \in P$, tout vecteur non nul de Ker $(f - \lambda\, Id)$ est dit *vecteur propre associé à* λ.

Quel que soit $f \in L\,(E)$, on dit que le s.e.v. F de E est stable sous f si $f\,(F) \subseteq F$. Si λ est valeur propre de f, le *sous-espace propre associé à* λ, F_λ = Ker $(f - \lambda\, Id)$, est stable sous f et la restriction de f à F_λ est l'homothétie vectorielle de rapport $\lambda \in K$.

Th. : *Lorsque P n'est pas vide, la somme* $\sum_P$ *des sous-espaces propres de f est directe :* $\sum_P = \bigoplus_{\lambda \in P} F_\lambda$.

Dans ces conditions tout vecteur $\vec{v}$ non nul de $\sum_P$ s'écrit de façon unique comme somme de q vecteurs propres associés à q valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2,.., \lambda_q$ ($q \in \mathbb{N}^*$, q dépendant de $\vec{v}$). On a alors $f\,(\vec{v}) = f\,(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 +..+ \vec{v}_q) = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 +..+ \lambda_q \vec{v}_q$. Ce résultat est particulièrement intéressant si $\sum_P = E$, car alors E peut être muni d'une base de vecteurs propres et l'écriture de f est, on le voit, très commode dans une telle base (dim E finie ou non).

Ex. : F et G étant deux s.e.v. $\neq \{0\}$ supplémentaires dans E, la projection p de E sur F parallèlement à G admet F et G comme sous-espaces propres associés aux valeurs propres respectives 1 et 0 : $E = F \oplus G = \sum_P$.

Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

On exploite ici, en dim. $n \in \mathbb{N}^*$, les propriétés des sous-espaces propres pour construire des bases de E dans lesquelles l'écriture matricielle de $f \in L\,(E)$ est simplifiée, permettant ainsi de préciser des propriétés remarquables de f.

Si M est la matrice de f dans une base b, [$f - \lambda\, Id$ non injectif] se traduit par det $(M - \lambda\, I_n) = 0$. Le polynôme $C\,(\lambda)$ = det $(M - \lambda\, I_n)$ est de degré n et il est invariant sous tout changement de base. C'est le *polynôme caractéristique* de f. Les valeurs propres de f sont les racines λ_k de C. On montre facilement que 0 < dim. Ker $(f - \lambda_k\, Id) \leq$ ordre de multiplicité de λ_k et que dim. $\sum_P$ = somme des dim. des sous-espaces propres. Avant d'exploiter ces résultats on donne une autre propriété de $C\,(\lambda)$:

Th. (Cayley-Hamilton) : *En dim. finie tout endomorphisme f annule son polynôme caractéristique C :* $C\,(f) = 0$.

Corollaire : L'ensemble des polynômes $Q\,(X) \in K[X]$ tels que $Q\,(f) = 0$ est un idéal principal (p. 83) non nul. Le polynôme unitaire générateur D de cet idéal s'appelle le *polynôme minimal* de f. C'est un diviseur de C. Les racines de D sont les valeurs propres de f, avec un ordre de multiplicité inférieur ou égal.

Diagonalisation

Déf. : On dit que $f \in L\,(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Th. : *Pour que f soit diagonalisable il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :*

a) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f ; b) $\sum_P = E$ *; c) C est entièrement scindable sur K et la dim. de chaque sous-espace propre est l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante ; d) le polynôme minimal de f est entièrement scindable et n'a que des racines simples ; e) il existe un polynôme non nul* $T\,(X) \in K\,[X]$, *entièrement scindable sur K, dont toutes les racines sont simples, tel que* $T\,(f) = 0$.

Rem. : 1) Si f admet n valeurs propres distinctes (n = dim E), f est diagonalisable.

2) Les endomorphismes involutifs s de $\mathbb{R}^n$ sont définis par $s \in L\,(\mathbb{R}^n)$, $s \neq Id$, $s^2 = Id$. En prenant $T\,(X) = X^2 - 1$, et en appliquant *e)* on voit qu'ils sont diagonalisables. Les deux polynômes minimaux possibles sont resp. $X + 1$, qui donne $s = -Id$, et $(X + 1)\,(X - 1)$, auquel cas s a deux sous-espaces propres F_1 et F_{-1}, supplémentaires dans E, resp. associés aux valeurs propres + 1, – 1, faisant de s la symétrie par rapport à F_1, parallèlement à F_{-1}.

Trigonalisation

Si C est entièrement scindable sur K, mais si la condition *c*) n'est pas remplie, f n'est pas diagonalisable ; f est toutefois *trigonalisable*. En d'autres termes il existe une base b' de E dans laquelle la matrice M' de f est *triangulaire supérieure* (tous les éléments de M' situés sous la diagonale principale sont nuls). On part du résultat suivant :

Th. : *Si f possède la valeur propre* λ_1, *son polynôme caractéristique* $C\,(\lambda)$ *s'écrit* $(\lambda_1 - \lambda)\, G_1(\lambda)$ *où* G_1 *est un polynôme. Il existe alors un hyperplan* H_1 *stable sous f, la restriction* f_1 *de f à* H_1 *admettant* $G_1(\lambda)$ *comme polynôme caractéristique.*

Pour justifier ce théorème on remarque que si M est la matrice de f dans une base b, ${}^tM$ admet également $C\,(\lambda)$ comme polynôme caractéristique. Il existe donc un n-vecteur colonne $\boldsymbol{u}$ non nul tel que ${}^tM\,\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{u}$. Un élément de E étant représenté par un n-vecteur colonne $\boldsymbol{x}$, ${}^t\boldsymbol{ux} = 0$ est l'équation d'un hyperplan H_1 stable sous f :
en effet ${}^t\boldsymbol{u}M\boldsymbol{x} = {}^t({}^tM\,\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{x} = {}^t(\lambda_1 \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{x} = \lambda_1 {}^t\boldsymbol{ux}$ qui est nul pour tout vecteur de H_1. Si b_1 est une base de H_1 et si $e_n \in E \setminus H_1$, la matrice de f dans la base (b_1, e_n) de E a pour dernière ligne $(0....0, \lambda_1)$. On en déduit le résultat.
Par suite si $C\,(\lambda)$ est entièrement scindable, $G_1\,(\lambda)$ l'est aussi et on construit dans H_1 un sous-espace H_2 de dim. $n - 2$, stable sous f, associé à une valeur propre λ_2 annulant $G_1\,(\lambda)$. En réitérant le procédé on dispose d'une suite de sous-espaces emboîtés $E = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \dots \supset H_{n-1}$. Il existe une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$ de E telle que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_i)$ soit une base de H_{n-i}, $i = 1\dots n$. Dans cette base la matrice de f est triangulaire supérieure : sur sa diagonale principale figurent les valeurs propres de f avec leur ordre de multiplicité. On notera que $\vec{e}_1$ est un vecteur propre de f.

Sous-espaces caractéristiques

Déf. : Si λ_k est valeur propre d'ordre de multiplicité m_k de f, le *sous-espace caractéristique* C_k *associé à* λ_k est Ker $(f - \lambda_k\, Id)^{m_k}$.

On remarque que C_k contient le sous-espace propre de f associé à λ_k et qu'il est également stable sous f. On peut démontrer que dim. $C_k = m_k$ et que la restriction f_k de f à C_k admet pour polynôme caractéristique $(\lambda_k - \lambda)^{m_k}$: f_k est donc trigonalisable et la diagonale principale d'une matrice triangulaire supérieure définissant f_k est constituée de m_k éléments égaux à λ_k.

Les sous-espaces caractéristiques relatifs aux différentes valeurs propres de f sont en somme directe. Si $C\,(\lambda)$ est entièrement scindable, cette

somme directe s'identifie à E. Alors dans une base b'' de E, réunion de bases de trigonalisation des f_k, la matrice M'' de f est triangulaire en escalier.

Déf. : Un endomorphisme non nul g est dit *nilpotent d'ordre* $s \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ si $g^s = 0$ mais $g^{s-1} \neq 0$. L'endomorphisme nul est dit nilpotent d'ordre 1.

Pour qu'un endomorphisme de l'espace E de dim. n soit nilpotent il faut et il suffit que 0 soit valeur propre d'ordre n. L'ordre de nilpotence est $\leq n$.

Ainsi $f_k - \lambda_k\, Id \in L\,(C_k)$ est nilpotent d'ordre $s_k \leq m_k$.

Plus précisément, en remarquant que pour tout $g \in L\,(E)$, $g \neq 0$, on a, $\forall\, t \in \mathbb{N}^*$, Ker $g^t \subseteq$ Ker g^{t+1}, on voit que la suite $t \to$ Ker $(f_k - \lambda_k\, Id)^t$ est stationnaire à C_k pour $t \geq s_k$ et strictement croissante pour $t = 1, \dots, s_k$ lorsque $s_k > 1$ (f_k est l'homothétie de rapport λ_k, donc diagonalisable, lorsque $s_k = 1$).

La matrice M'' est la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice triangulaire supérieure nilpotente. On vérifie facilement que ces matrices commutent. On en déduit que si $C\,(\lambda)$ est entièrement scindable, f est la somme $d + l$ d'un endomorphisme diagonalisable d et d'un endomorphisme nilpotent l tels que $d \circ l = l \circ d$. On peut prouver l'unicité d'une telle décomposition, commode pour développer f^p par la formule du binôme.

Matrices de Jordan

Si g est un endomorphisme nilpotent d'ordre $s > 1$ de l'espace n-dimensionnel E, on a $s \leq n$ et $\{\vec{0}\} \subset$ Ker $g \subset \dots \subset$ Ker $g^{s-1} \subset$ Ker $g^s = E$. On a de même $E \supset g\,(E) \supset \dots \supset g^{s-1}\,(E) \supset g^s\,(E) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$. Il existe $r \leq s$ tel que $(g^{r-1}\,(\vec{v}), \dots, g\,(\vec{v}), \vec{v})$ soit une suite de vecteurs non nuls et que $g^r\,(\vec{v}) = \vec{0}$. On prouve par l'absurde que les vecteurs de cette suite sont linéairement indépendants. Ils constituent une base b_v d'un sous-espace $\mathfrak{I}_v$ de dim. r, stable sous g, la matrice de la restriction de g à $\mathfrak{I}_v$ dans b_v contenant partout des 0 sauf aux intersections des $k^{\text{ièmes}}$ lignes et des $(k+1)^{\text{ièmes}}$ colonnes, $k = 1, \dots, r - 1$, où figurent des 1. On peut démontrer que E est une somme directe de sous-espaces $\mathfrak{I}_v$, la dim. maximale atteinte d'un $\mathfrak{I}_v$ étant s, la dim. minimale étant 1, non nécessairement atteinte. Quel que soit le procédé de construction de cette somme directe, on obtient toujours le même nombre de sous-espaces $\mathfrak{I}_v$ d'une dim. donnée de $[1, s]$. La réunion b''' des bases b_v des sous-espaces intervenant dans la somme directe est une base de E, dite de Jordan. Dans cette base la matrice M''' de g est remarquable (matrice de Jordan). Une base de Jordan d'un endomorphisme f de polynôme caractéristique $(\lambda_0 - \lambda)^n$ est une base de Jordan de $f - \lambda_0\, Id$. Dans cette base la matrice de Jordan de f est la somme de celle de $f - \lambda_0\, Id$ et de la matrice scalaire $\lambda_0\, I_n$. Une base de Jordan d'un endomorphisme f de polynôme caractéristique de degré n entièrement scindable est la réunion de bases de Jordan des restrictions de f à ses sous-espaces caractéristiques. On en déduit l'expression d'une matrice de Jordan de f.

Rem. : Si $C\,(\lambda)$ n'est pas entièrement scindable, il faut utiliser des sous-espaces stables sous f, en liaison avec la décomposition de $C\,(\lambda)$ en facteurs irréductibles, pour obtenir une simplification de l'écriture matricielle de f.

Déf. : Si E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, une application f de E^2 dans $\mathbb{C}$ est dite *à symétrie hermitienne* si $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2\ f(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{f(\vec{v}, \vec{u})}$ (1) ; f est dite linéaire à droite si $\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \lambda, \mu) \in E^3 \times \mathbb{C}^2$, $f(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda f(\vec{u}, \vec{v}) + \mu f(\vec{u}, \vec{w})$ (2) ; f est dite *semi-linéaire à gauche* si dans les mêmes conditions $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}) = \bar{\lambda} f(\vec{u}, \vec{w}) + \bar{\mu} f(\vec{v}, \vec{w})$ (3).

Rem. : (1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow$ (3) ; (1) $\wedge$ (3) $\Rightarrow$ (2) ; $\neg$ ((2) $\wedge$ (3) $\Rightarrow$ (1)). (Contre-exemple : appl. g de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g(\xi, \eta) = i\,\bar{\xi}\,\eta$.)

Forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne, forme hermitienne

On dit de f appliquant E^2 dans $\mathbb{C}$ qu'elle est une *forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne* (en abrégé s.l.s.h.) si elle satisfait à (1), (2), (3). L'ens. $\mathcal{F}$ des formes s.l.s.h. définies sur E^2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ($\mathbb{R}$ et non $\mathbb{C}$).

Si on pose, pour tout $\vec{u} \in E$, $h(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{u})$, $\vec{u} \to h(\vec{u})$ est une application de E dans $\mathbb{R}$ d'après (1). h s'appelle la *forme hermitienne associée* à f. On vérifie que $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $4 f(\vec{u}, \vec{v})$ est égal à :
$h(\vec{u} + \vec{v}) + \mathrm{i}\,h(\vec{u} - \mathrm{i}\,\vec{v}) - h(\vec{u} - \vec{v}) - \mathrm{i}\,h(\vec{u} + \mathrm{i}\,\vec{v})$.
Par suite l'ensemble des formes hermitiennes définies sur E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{H}$ isomorphe à $\mathcal{F}$; f s'appelle la *forme polaire* de h.

Rem. : La matrice *transconjuguée* ${}^t\overline{M}$ est la transposée de la conjuguée de M. M est dite hermitienne si, et seulement si, ${}^t\overline{M} = M$. En dim. finie une forme f s.l.s.h. est déterminée dans une base b par $f(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\bar{x}\,H\,y$ où H est une matrice hermitienne. La forme hermitienne associée s'écrit : $h(\vec{x}) = {}^t\bar{x}\,H\,x$. Si $x = \Gamma z$ définit un changement de base (b remplacée par $\hat{b}$, p. 418), on a
$h(\vec{x}) = {}^t\bar{z}\,{}^t\overline{\Gamma}\,H\,\Gamma z$. ${}^t\overline{\Gamma}\,H\,\Gamma$ (hermitienne) et H ont le même rang r : c'est le rang de h ou f.

Orthogonalité selon une forme hermitienne

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux selon la forme hermitienne h, de forme polaire f, s'ils satisfont à la relation symétrique
$f(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ($\Leftrightarrow f(\vec{v}, \vec{u}) = 0$). L'ensemble $\vec{u}_0^{\perp}$ des vecteurs $\vec{v}$ orthogonaux à un vecteur donné $\vec{u}_0$ est défini par l'équation $f(\vec{u}_0, \vec{v}) = 0$. L'application $\vec{w} \to f(\vec{u}_0, \vec{w})$ de E dans $\mathbb{C}$ est une forme linéaire de noyau $\vec{u}_0^{\perp}$. Si cette forme $f(\vec{u}_0, \cdot)$ est nulle, $\vec{u}_0^{\perp} = E$; sinon c'est un hyperplan (sous-espace admettant pour supplémentaire une droite). L'ensemble $A^{\perp}$ des vecteurs orthogonaux à tous ceux du sous-ensemble non vide A de E est, d'après ce qui précède, un sous-espace vectoriel de E. On peut remarquer que $A^{\perp} = (\mathrm{vec.}(A))^{\perp}$ et que $(A^{\perp})^{\perp} \supseteq A$.

Deux parties non vides de E sont dites orthogonales si tout vecteur de l'une est orthogonal à tout vecteur de l'autre. $E^{\perp}$ s'appelle le *noyau* de h : $E^{\perp} = \mathrm{Ker}\,h$; h est dite *non dégénérée* si $\mathrm{Ker}\,h = \{\vec{0}\}$; en dim. finie n, $\dim \mathrm{Ker}\,h = n - r$. Tout vecteur qui est orthogonal à lui-même est dit isotrope. L'ensemble des vecteurs isotropes est défini par $f(\vec{u}, \vec{u}) = h(\vec{u}) = 0$. On l'appelle le cône isotrope C_h. C_h contient toujours le vecteur nul. Si $C_h = \{\vec{0}\}$, on dit que h est *définie*. On remarquera que $\mathrm{Ker}\,h \subseteq C_h$. Toute forme hermitienne définie est nécessairement non dégénérée (réciproque fausse).

Enfin on a le résultat important suivant :

Th. 1 : *Si h est une forme hermitienne (de forme polaire f) sur l'espace vectoriel E supposé de dimension finie $n > 0$, il existe une base $b = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ telle que quels que soient p et q distincts $f(\vec{\varepsilon}_p, \vec{\varepsilon}_q) = 0$ (base orthogonale).*

Dém. : Si $h = 0$ toute base de E convient. Sinon il existe $\vec{\varepsilon}_n$ tel que $h(\vec{\varepsilon}_n) \neq 0$. La forme linéaire $f(\vec{\varepsilon}_n, \cdot)$ n'est donc pas nulle est son noyau est un hyperplan F qui ne contient pas $\vec{\varepsilon}_n$. La réunion de $\{\vec{\varepsilon}_n\}$ et d'une base orthogonale $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_{n-1})$ de F sera une base orthogonale de E. On est donc ramené au même problème en dim. $(n - 1)$. D'où le résultat par récurrence.

Corollaire : Quelle que soit la dimension de E, tout sous-espace de dim. finie de E possède une base orthogonale selon h.

Rem. : Le théorème 1 montre que pour toute matrice hermitienne H, il existe une matrice inversible Γ telle que ${}^t\overline{\Gamma}\,H\,\Gamma$ soit diagonale réelle de rang r (passage d'une base b quelconque à une base orthogonale).

Forme hermitienne positive

On dit que la forme hermitienne h définie sur E est positive si $\forall \vec{u} \in E$, $h(\vec{u}) \geq 0$.

Ex. : E = $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions φ à valeurs dans $\mathbb{C}$, RIEMANN-intégrables sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

$\varphi \to h(\varphi) = \int_a^b \overline{\varphi(t)}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme hermitienne positive de forme polaire

$$f(\varphi, \psi) = \int_a^b \overline{\varphi(t)}\,\psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Th. 2 : *Toute forme hermitienne* positive *satisfait aux inégalités respectives de* SCHWARZ *et de* MINKOWSKI *:*

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}), |f(\vec{u}, \vec{v})| \leq \sqrt{h(\vec{u})\,h(\vec{v})} \qquad \text{(S)},$$

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}), \sqrt{h(\vec{u} + \vec{v})} \leq \sqrt{h(\vec{u})} + \sqrt{h(\vec{v})} \qquad \text{(M)}.$$

Conséquences : 1) Pour toute forme hermitienne positive h, $C_h = \mathrm{Ker}\,h$.

Si $\vec{u}$ est isotrope ($h(\vec{u}) = 0$), on a, pour tout $\vec{v}$, $f(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ d'après (S). Donc $C_h \subseteq \mathrm{Ker}\,h$. En confrontant ce résultat à l'inclusion générale $\mathrm{Ker}\,h \subseteq C_h$, on en déduit l'identité du noyau et du cône isotrope.

2) Si h est définie positive ($\Leftrightarrow$ non dégénérée positive), l'application de E dans $\mathbb{R}_+$, $\vec{u} \to \sqrt{h(\vec{u})}$ est une norme (*cf.* p. 365). La vérification est immédiate en utilisant (M). E muni d'une telle norme est dit *préhilbertien*. Il est dit *hilbertien* s'il est préhilbertien complet.

Espaces préhilbertiens

Soit E un espace préhilbertien ; on désigne la norme (hilbertienne) de $\vec{u} \in E$ par $\|\vec{u}\|$. L'application $\vec{u} \to \|\vec{u}\|^2$ (carré scalaire) est une forme hermitienne définie positive. Sa forme polaire, notée $<\vec{u}, \vec{v}>$, ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le produit scalaire hermitien. Il n'est pas commutatif.

Il est linéaire à droite, semi-linéaire à gauche. On a en particulier $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$.

Ex. : E = $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_a^b \overline{\varphi(t)}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t}\,, \quad <\varphi, \psi> = \int_a^b \overline{\varphi(t)}\,\psi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Th. 3 : *Toute famille de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien E orthogonaux deux à deux est libre.*

En effet, pour toute sous-famille finie $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ la relation $\lambda_1\vec{u}_1 + \dots + \lambda_p u_p = \vec{0}$ implique pour tout $k = 1 \dots p$, $\vec{u}_k \cdot (\lambda_1\vec{u}_1 + \dots + \lambda_p u_p) = \lambda_k \vec{u}_k^{\,2} = 0$, soit $\lambda_k = 0$.

Déf. : Une partie de E est dite *orthonormée* (ou *orthonormale*) si tous ses vecteurs sont *unitaires*, c'est-à-dire de norme 1, et orthogonaux deux à deux.

Une telle partie est libre. On peut démontrer le résultat suivant :

Th. 4 : *Tout espace préhilbertien admettant une base au plus dénombrable admet une base orthonormée au plus dénombrable.*

Endomorphisme adjoint, endomorphisme normal

Déf. : Si l est un endomorphisme de l'espace préhilbertien E, l'endomorphisme l' est dit *adjoint* de l si $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $l'(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot l(\vec{v})$.

Si l possède un adjoint, celui-ci est unique car $l'(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot l(\vec{v}) = l''(\vec{u}) \cdot \vec{v}$, pour tous $\vec{u}, \vec{v}$, entraîne $\forall(\vec{u}, \vec{v})\ (l' - l'')(\vec{u}) \cdot \vec{v} = 0$, en particulier pour $\vec{v} = (l' - l'')(\vec{u})$, soit $[(l' - l'')(\vec{u})]^2 = 0$ pour tout $\vec{u}$, c'est-à-dire $l' - l''$.

On note définitivement l^* l'adjoint de l quand il existe. Alors l^* possède un adjoint : la relation $(l^*)^* = l$ est immédiate.

Th. 5 : *Si l'endomorphisme l est continu pour la topologie issue de la norme hermitienne, alors l admet un adjoint, également continu, et de même norme.*

L'ensemble des endomorphismes de l'espace préhilbertien E admettant un adjoint est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre $\mathfrak{L}(E)$ des endomorphismes de E. Si E est de dimension finie, cette algèbre s'identifie à $\mathfrak{L}(E)$, car alors tout endomorphisme de E est continu : si l est représenté par la matrice M dans la base b orthonormée, alors l^* est représenté par ${}^t\overline{M}$.

Déf. : Un endomorphisme l est dit *normal* s'il possède un adjoint et si $l \circ l^* = l^* \circ l$. Son adjoint est donc également normal.

Th. 6 : Si $l \circ l^* = l^* \circ l$, *tout sous-espace propre de l pour la valeur propre λ est sous-espace propre de l^* pour la valeur propre $\bar{\lambda}$ et réciproquement. De plus tous les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.*

Dém. : Soit F_λ le sous-espace propre de l pour la valeur propre λ. On a alors :
$\forall \vec{v} \in F_\lambda$, $l(l^*(\vec{v})) = l^*(l(\vec{v})) = \lambda\,l^*(\vec{v})$. Donc F_λ est stable sous l^*. Pour tous $\vec{u}, \vec{v}$ dans F_λ on a :
$l^*(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot l(\vec{v}) = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v}$; soit $(l^*(\vec{u}) - \bar{\lambda}\vec{u}) \cdot \vec{v} = 0$.
En faisant $\vec{v} = l^*(\vec{u}) - \bar{\lambda}\vec{u} \in F_\lambda$, on obtient $l^*(\vec{u}) = \bar{\lambda}\vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in F_\lambda$. Donc F_λ est inclus dans le sous-espace propre $F^*_{\bar{\lambda}}$ de l^*. On démontre de même que $F^*_{\bar{\lambda}} \subseteq F_\lambda$. On a bien les mêmes sous-espaces propres pour des valeurs propres conjuguées.

On montre maintenant que F_λ et F_μ sont orthogonaux pour $\lambda \neq \mu$; $l(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, $l(\vec{v}) = \mu\vec{v}$:
$\vec{u} \cdot l(\vec{v}) = \mu\,\vec{u} \cdot \vec{v} = l^*(\vec{u}) \cdot \vec{v} = (\bar{\lambda}\vec{u}) \cdot \vec{v}$,
$(\bar{\lambda}\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} \Rightarrow (\lambda - \mu)\,\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Ex. : On considère l'espace l^2, c'est-à-dire le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes infinies $x = (x_1, \dots, x_k, \dots)$ telles que $\sum_1^\infty \bar{x}_k x_k < \infty$; l^2 est hilbertien, avec $\|x\| = \sqrt{\sum_1^\infty \bar{x}_k x_k}$ et $x \cdot y = \sum_1^\infty \bar{x}_k y_k$.

Soit $c = (c_1, \dots, c_k, \dots) \in l^2$ et l'endomorphisme t_c :
$t_c(x) = (c_1 x_1, \dots, c_k x_k, \dots)$; t_c est un endomorphisme normal de l^2 et $t_c^* = t_{\bar{c}}$, où $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k, \dots)$.

Parmi les endomorphismes normaux d'un espace préhilbertien E on peut citer les endomorphismes *auto-adjoints* ($l^* = l$) et les *isométries*, c'est-à-dire les bijections de E sur lui-même qui respectent la distance issue de la norme hermitienne, ou de manière équivalente le produit scalaire :
$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $\|l(\vec{u}) - l(\vec{v})\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow$
$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $l(\vec{u}) \cdot l(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow l^* = l^{-1}$.

On vérifie facilement que les valeurs propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont réelles, et que celles d'une isométrie sont des complexes de module 1.

On étudie p. 371 l'opérateur linéaire (= endomorphisme d'espace normé de dim. infinie en général) de $C([a, b], \mathbb{C})$ défini par $f \to K(f)$, avec pour tout $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, $K(f)(x) = \int_a^b \Phi(x, t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$, la fonction *noyau* Φ de l'opérateur étant une application continue de $[a, b]^2$ dans $\mathbb{C}$. Si on introduit le produit scalaire hermitien
$<f, g> = \int_a^b \overline{f(t)}\,g(t)\,\mathrm{d}t$, K^* existe et a pour noyau Ψ telle que, $\forall(x, t) \in [a, b]^2$, $\Psi(x, t) = \overline{\Phi(t, x)}$.
Si $\forall(x, t) \in [a, b]^2$, $\Psi(x, t) = \Phi(t, x)$, K est auto-adjoint.

En dimension finie, dans une base orthonormée, un endomorphisme auto-adjoint est défini par une matrice hermitienne, et une isométrie par une matrice C *unitaire* ($C^{-1} = {}^t\overline{C}$). Le groupe des isométries est alors isomorphe au groupe des matrices unitaires, lesquelles définissent également les changements de bases orthonormées.

En dimension finie tout endomorphisme normal l est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Si N est sa matrice dans b orthonormée, il existe C unitaire telle que $C^{-1}NC = D$, matrice diagonale. En particulier si l est auto-adjoint, N est hermitienne et D diagonale réelle, et si l est une isométrie, N est unitaire et D a tous ses éléments diagonaux de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Inégalité de BESSEL

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et h une forme hermitienne sur E, de forme polaire f. On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E, de base dénombrable, tel que la restriction de h à F soit définie positive. F possède donc (th. 4 p. 261) une base orthonormée $\{\vec{e_k}, k \in \mathbb{N}^*\}$ relativement à h. On a la relation suivante due à BESSEL :

$$\forall \vec{v} \in E \quad 0 \leq \inf \{h(\vec{v} - \vec{w}) \mid \vec{w} \in F\} = h(\vec{v}) - \sum_1^{\infty} \bar{\lambda}_k \lambda_k, \text{ où } \lambda_k = f(\vec{e_k}, \vec{v}).$$

Égalité de PARSEVAL

On applique le résultat précédent au cas où E est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions RIEMANN-intégrables sur $[\alpha, \alpha + 2\pi] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, la forme hermitienne positive h étant déf. par

$h(g) = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{g(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t$. On prend pour F le sous-espace de E engendré par

$G = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z} \mid \varepsilon_n(t) = e^{nit}\}$, partie libre dénombrable. La restriction de h à F est définie positive puisque F est un sous-espace de fonctions continues. G est une base orthogonale de F, mais elle n'est pas orthonormée. On pose pour toute fonction $g \in E$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{-nit} g(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} f(\varepsilon_n, g).$$

L'inégalité de BESSEL devient l'égalité de PARSEVAL sur tout E :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{c_n}\, c_n = \frac{1}{2\pi} h(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{g(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Séries trigonométriques

Soit B un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé complet et $n \to (\alpha_n, \beta_n)$ une suite à valeurs dans B^2 ($n \in \mathbb{N}^*$). On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_0(t) = \alpha_0 \in B$ et, pour tout $n > 0$, $u_n(t) = \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)$. La série de fonctions $\sum u_n(\cdot)$ est par définition une *série trigonométrique*. Si elle converge sur $\mathbb{R}$ elle définit une application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans B :

$$t \to S(t) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} [\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)].$$

Si $\sum \|\alpha_n\|_B$ et $\sum \|\beta_n\|_B$ sont convergentes, $\sum u_n(\cdot)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et $t \to S(t)$ est continue pour la topologie associée à la norme $\| \ \|_B$.

Rem. : On pose $\gamma_0 = \alpha_0$ et pour $n > 0$

$$\gamma_n = \frac{1}{2}(\alpha_n - \mathrm{i}\,\beta_n),\ \gamma_{-n} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \mathrm{i}\,\beta_n).$$

Alors $S(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{-n}^{n} \gamma_k e^{kit}$, que l'on écrit conventionnellement $\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{kit}$ (cette convention n'autorise pas l'écriture : $S(t) = \gamma_0 + \sum_{-\infty}^{-1} \gamma_k e^{kit} + \sum_1^{+\infty} \gamma_k e^{kit}$).

Série de FOURIER

Si g est une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, RIEMANN-intégrable, son *coefficient de FOURIER* d'ordre $n \in \mathbb{Z}$ est le nombre complexe

$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{-nit} g(t)\, \mathrm{d}t$, indépendant de α. Sa *série de FOURIER* est $\sum c_n \varepsilon_n$, ou si l'on veut employer les fonctions sinus et cosinus :

$a_0 + \sum_{n>0} [a_n \cos(n\,\cdot) + b_n \sin(n\,\cdot)]$, en posant $a_0 = c_0$, et pour $n > 0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n})$.

La série de FOURIER de g est donc une série trigonométrique, qui peut être convergente ou non convergente. Toutefois $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$ est convergente dans $\mathbb{R}$, de somme $\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{g(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t$ (les séries $\sum |a_n|^2$ et $\sum |b_n|^2$ sont donc également convergentes). Ce résultat, qui traduit l'égalité de PARSEVAL, permet de montrer que réciproquement une série trigonométrique à valeurs dans $\mathbb{C}$, même convergente sur tout $\mathbb{R}$, n'est pas nécessairement une série de FOURIER (contre-exemple : $\sum_{n>0} \frac{\sin nt}{\ln(n+1)}$ converge quel que soit $t \in \mathbb{R}$, mais $\sum_{n>0} [\ln(n+1)]^{-2}$ est divergente).

Th. 1 : *Soit* $g_n(t) = a_0 + \sum_1^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$; *que la suite complexe $n \to g_n(t)$ converge ou non pour toute valeur de t, on a toujours :*

$$\forall \alpha, \lim_{n \to \infty} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |g(t) - g_n(t)|^2\, \mathrm{d}t = 0.$$

Convergence d'une série de FOURIER

La top. que l'on peut mettre sur un $\mathbb{K}$-espace vect. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une norme dépend a priori de celle-ci. En dim. finie toutes les normes définissent la même topologie. C'est faux en dim. infinie.

Ainsi le th. 1 donne la conv. en *moyenne d'ordre 2* ou *moyenne quadratique* de g_n vers g (p. 366).

Les lignes qui suivent donnent quelques résultats concernant la conv. d'une série de FOURIER.

Th. 2 : *Toute série trigonométrique à valeurs dans $\mathbb{C}$, uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, est une série de FOURIER (réciproque fausse).*

Si $\sum_{-n}^{n} d_k \varepsilon_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction s, alors $\forall t$, $s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k e^{kit}$, s est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et $d_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{-kit} s(t)\, \mathrm{d}t$, résultat que l'on obtient en intégrant terme à terme ; la convergence uniforme permet ce procédé de calcul. La série trigonométrique $\sum d_k \varepsilon_k$ est la série de FOURIER de la fonction s.

En particulier si $\sum c_k \varepsilon_k$ est la série de FOURIER de la fonction g et si $\sum |c_k|$ est convergente, la série trigonométrique $\sum c_k \varepsilon_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. On peut prouver assez facilement que sa somme s'identifie à g sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Le théorème suivant donne une condition suffisante de convergence simple. Une fonction g de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est dite de classe 1 par morceaux s'il existe une subdivision finie $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$ de $[a, b]$ telle que $\forall k = 0, 1, \ldots, p-1$, il existe g_k continûment dérivable sur $[t_k, t_{k+1}]$, coïncidant avec g sur $]t_k, t_{k+1}[$. Cette fonction g est donc continue en tout point distinct d'un t_k et admet une limite quand t tend vers t_k par valeurs supérieures (lim. à droite $g(t_k + 0) = g_k(t_k)$, $k < p$), resp. par valeurs inférieures (lim. à gauche $g(t_k - 0) = g_{k-1}(t_k)$, $k > 0$).

Th. 3 (DIRICHLET) : *Si g est 2π-périodique, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe 1 par morceaux sur $[\alpha, \alpha + 2\pi]$, alors* $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{kit} = \frac{1}{2}[g(t+0) + g(t-0)]$.

Corollaire : *Si de plus g est continue, alors* $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{kit} = g(t)$ *et la convergence de la série est uniforme sur $\mathbb{R}$.*

Déf. : Une fonction g définie sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, est dite à *variation bornée* s'il existe $M > 0$ tel que, quelle que soit la subdivision finie $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$, on ait :

$$\sum_{k=0}^{p-1} |g(t_{k+1}) - g(t_k)| \leq M.$$

Th. 4 : *Si g est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, à variation bornée sur un segment $[\alpha, \alpha + 2\pi]$, alors* $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{kit}$.

Intégration d'une série de FOURIER

Soit une fonction g 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ admettant une dérivée g', nécessairement 2π-périodique, développable en série de FOURIER sur $\mathbb{R}$:

$g'(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$. Si cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, on peut l'intégrer terme à terme et en déduire le développement en série de FOURIER de g. On remarquera que a_0 est nécessairement nul, puisque g est supposée 2π-périodique :

$$g(t) = g(0) + \sum_1^{\infty} \left[\frac{a_n}{n} \sin nt + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nt)\right].$$

Les séries $\sum \frac{a_n}{n}$ et $\sum \frac{b_n}{n}$ sont absolument convergentes (majorer, par ex. $\frac{|b_n|}{n}$ par $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |b_n|^2\right)$ et utiliser $\sum_1^{\infty} |b_n|^2 < \infty$).

D'où $g(t) = A + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n}(a_n \sin nt - b_n \cos nt)$; la convergence est normale sur tout $\mathbb{R}$.

Transformation de FOURIER

On désigne par $L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ intégrables sur tout segment de $\mathbb{R}$, telles que l'on ait $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p \mathrm{d}t < \infty$ (p. 341). L'ensemble $L_c^p(\mathbb{R})$ des fonctions continues g éléments de $L^p(\mathbb{R})$ en est un sous-espace que l'on peut normer par

$N_p(g) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$. On note C' le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ s'annulant à l'infini ($\Leftrightarrow \lim h(x) = 0$ si $|x| \to \infty$). Toute fonction appartenant à C' est nécessairement bornée. On peut donc normer C' par la norme $\| \ \|$ de la convergence uniforme : $\|h\| = \sup\{|h(x)|, x \in \mathbb{R}\}$.

Déf. : La *transformée de FOURIER* de $f \in L^1(\mathbb{R})$ est la fonction $\hat{f} = \mathfrak{F}(f)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi t x} \mathrm{d}t.$$

Th. 1 : *$\mathfrak{F}$ est un opérateur linéaire de $L^1(\mathbb{R})$ dans C'. La restriction $\mathfrak{F}_c$ de $\mathfrak{F}$ à $L_c^1(\mathbb{R})$ satisfait à $\|\mathfrak{F}_c(g)\| \leq N_1(g)$ et est donc continue pour ces normes.*

Rem. : $\mathfrak{F}$ n'est pas injectif (Si χ est la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{Z}$ et 0 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $\mathfrak{F}(\chi) = 0$) ; en revanche $\mathfrak{F}_c$ l'est.

Th. 2 : *Si f est de classe 1 par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$, alors :*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} \hat{f}(t)\, e^{2i\pi t x} \mathrm{d}t.$$

Rem. : Si on suppose de plus f continue et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\, e^{2i\pi t x} \mathrm{d}t$, soit $f(-x) = \mathfrak{F}[\mathfrak{F}(f)](x)$. C'est la formule de réciprocité de FOURIER. On notera toutefois que les propriétés supposées de f et de $\hat{f}$ ne sont pas les mêmes.

On désigne par E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions l de classe infinie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $\forall (k, q) \in \mathbb{N}^2$ $x^k l^{(q)}(x) \to 0$ si $|x| \to \infty$. On a évidemment $E \subset L_c^1(\mathbb{R})$.

Th. 3 : *La restriction $\mathfrak{F}_E$ de $\mathfrak{F}$ à E est un isomorphisme de E.*

Si $l \in E$, on a aussi $l' \in E$ et $\widehat{l'}(x) = 2\,\mathrm{i}\,\pi\, x\, \hat{l}(x)$. Par ailleurs $\hat{l}$ est dérivable et l'on a $(\hat{l})' = -2\,\mathrm{i}\,\pi\, \mathfrak{F}_E(Id_{\mathbb{R}} \cdot l)$ $(Id_{\mathbb{R}}(x) = x)$.

Ex. : $\forall\ \alpha > 0$ la fonction $x \mapsto e^{-\pi\alpha x^2}$ est dans E. Sa transformée de FOURIER est $x \mapsto A(\alpha)\, e^{-\frac{\pi}{\alpha}x^2}$ avec $A(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\alpha t^2} \mathrm{d}t$. En faisant $\alpha = 1$ et en utilisant la formule de réciprocité, on prouve que $A^2(1) = 1$, soit $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \mathrm{d}t = 1$. La fonction $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ est un vecteur propre de l'opérateur $\mathfrak{F}$ pour la valeur propre 1. On prouve facilement que $A(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ dans le cas général.

Si l'espace E est séduisant pour la transformation de FOURIER, il exige cependant des conditions exceptionnelles pour les fonctions envisagées. En introduisant l'espace $L^2(\mathbb{R})$, dans le cadre de l'intégrale de LEBESGUE, on peut construire une transformation dite de FOURIER-PLANCHEREL, coïncidant avec celle de FOURIER dans de nombreux cas (par ex. sur E), dont l'écriture est relativement commode dans les deux sens $f \mapsto \hat{f}$, $\hat{f} \mapsto f$, si on use de classes d'équivalence de fonctions.

Ces deux transformations (FOURIER et FOURIER-PLANCHEREL), en liaison avec les distributions, constituent un outil pour l'étude des équations fonctionnelles (les inconnues sont des fonctions), et en particulier des équations aux dérivées partielles.

La notion de convolution, qui peut prendre plusieurs aspects, intervient dans cette étude. En particulier si f et g sont dans $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, on peut démontrer l'existence de la fonction φ définie par $\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(\lambda - t)\, \mathrm{d}t$ (absolue convergence de cette intégrale). On note $\varphi = f * g$, *produit de convolution* de f et g. Ce produit est commutatif. La fonction φ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et sa transformée de FOURIER $\hat{\varphi}$ satisfait à : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\hat{\varphi}(x) = \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)$.

a) $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \varphi(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x$

b) $\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

c) $\left\langle \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon = 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, \mathrm{d}x$

d) $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$

A

a) $\langle \mathrm{D}^{\alpha} u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \mathrm{D}^{\alpha} \varphi \rangle$

b) $(\log|x|)' = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$

B

$$f\,\delta_a = f(a)\,\delta_a$$
$$f\,\delta' = f(0)\,\delta' - f'(0)\,\delta$$
$$x\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} = 1$$

C

$$\mathrm{supp}\, \mathrm{D}^{\alpha}\delta_a = \{a\}$$
$$\mathrm{supp}\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} = \mathrm{supp}\,\log|x| = \mathbb{R}$$

D

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y$$
$$\delta * u = u * \delta = u$$
$$\mathrm{D}^{\alpha}\delta * u = \mathrm{D}^{\alpha} u$$

E

a) ($n = 1$), $A = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} + a_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}} + \ldots + a_0$,

$E = z\,\mathrm{H}$, où z est l'unique solution de l'équation différentielle $A(z) = 0$ avec conditions initiales

$$z(0) = \ldots = z^{(m-2)}(0) = 0, \quad z^{(m-1)}(0) = 1.$$

b) (*Opérateur des ondes* dans $\mathbb{R}^3$) $A = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $\langle E, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|x|, x)}{4\pi|x|}\, \mathrm{d}x$,

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$.

c) (*Opérateur de* Cauchy-Riemann, $n = 2$) $A = \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\langle E, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(x, y)}{\pi(x + \mathrm{i}y)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

d) (*Opérateur laplacien dans* $\mathbb{R}^3$) $A = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $\langle E, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-\varphi(x)}{4\pi|x|}\, \mathrm{d}x$.

F

$$f(x) = \int_0^x z(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y + (b_1 + a_1 b_0)\, z(x) + b_0\, z'(x).$$

G

Introduction

La théorie des distributions, créée dans les années 1950 par L. Schwartz, a permis de rendre rigoureux certains procédés heuristiques (calcul symbolique de Heaviside, fonction delta de Dirac), de clarifier la notion de solution faible d'une équation aux dérivées partielles, et, enfin, de donner un cadre très général à la transformation de Fourier.

Les distributions constituent une vaste généralisation de la notion de fonction (de plusieurs variables) ; l'idée fondamentale est celle de *dualité* : les distributions sont, par définition, des formes linéaires sur un espace de fonctions dites *fonctions test*, qui sont indéfiniment différentiables ; ceci permet de définir, par transposition, les dérivées partielles des distributions et leur produit par des fonctions indéfiniment différentiables, puis, par conséquent, d'appliquer à une distribution un opérateur différentiel linéaire à coefficients C^{∞}, et donc de rechercher des solutions-distributions aux équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients C^{∞} ; on verra alors se dégager la notion de *solution élémentaire* d'une telle équation aux dérivées partielles, notion qui joue un rôle fondamental dans la résolution de l'équation au moyen de l'opération de convolution des distributions (on précise que l'opération de multiplication des fonctions ne se prolonge pas aux distributions).

Définition des distributions

Les distributions sont définies sur des parties ouvertes notées $\Omega, \Omega', \ldots$ des espaces $\mathbb{R}^n$; les *fonctions test* sur Ω sont les fonctions à valeurs complexes, définies sur Ω, de classe C^{∞} et à support compact (on rappelle que le *support* supp φ d'une fonction φ est l'adhérence de l'ensemble des points où φ est non nulle) ; elles forment un espace vectoriel complexe noté $\mathcal{D}(\Omega)$.

Notation : Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et on note D^{α} l'opérateur différentiel qui consiste à dériver α_1 fois par rapport à la variable x_1, α_2 fois par rapport à la variable x_2, etc.

Déf. : Une *distribution u sur* Ω est une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$, notée $\varphi \to \langle u, \varphi \rangle$, satisfaisant la condition de continuité suivante : si une suite (φ_k) de fonctions test est telle que :
— supp φ_k est inclus dans un compact, inclus dans Ω et indépendant de k,
— pour tout α, la suite $(\mathrm{D}^{\alpha}\varphi_k)$ converge uniformément vers 0, alors $\langle u, \varphi_k \rangle$ tend vers 0.

Les distributions sur Ω forment un e.v. noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Ex. : a) Une fonction f sur Ω, localement intégrable (i.e. intégrable sur tout compact inclus dans Ω), définit une distribution u par la formule a) tab. A. On dit alors que u est la fonction f. Ceci s'applique en particulier, dans le cas où $n = 1$, à la fonction H (fonction de Heaviside), fonction caractéristique de l'intervalle $[0, +\infty[$, et aussi à la fonction $\log|x|$; par contre la fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable ; on peut cependant lui associer une distribution notée vp $\frac{1}{x}$ (pour *valeur principale de Cauchy*) (voir tab. A).
b) Lorsque Ω contient le point 0, la distribution δ de Dirac, définie par $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, joue un rôle fondamental ; mais ce n'est pas une fonction au sens ci-dessus. On définit de même les distributions δ_a où $a \in \Omega$.
c) On rencontrera bientôt les distributions $\varphi \to \mathrm{D}^{\alpha}\varphi(0)$.

Dérivation des distributions

Déf. : Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{N}^n$ et toute distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit $\mathrm{D}^{\alpha}u$ par la formule a) tab. B. On remarquera que, pour les distributions, la dérivation est une opération toujours possible. Lorsque $n = 1$, on écrit aussi u', u'', etc., comme pour les fonctions.

Ex. : a) Si u est une fonction f de classe $C^{|\alpha|}$, $\mathrm{D}^{\alpha}u$ est la fonction $\mathrm{D}^{\alpha}f$ (on fait une intégration par parties, qui explique le signe $(-1)^{|\alpha|}$).
b) (Cas $n = 1$). On a $H' = \delta$. Plus généralement, si f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'une suite de points isolés a_i ($i = 1, 2, \ldots$) où elle admet des limites à gauche et à droite $f(a_i -)$ et $f(a_i +)$, sa dérivée comme distribution est égale à sa dérivée comme fonction (définie seulement presque partout) augmentée de la distribution

$$\sum_i \left(f(a_i +) - f(a_i -)\right)\delta_{a_i} \ (\textit{formule des sauts}).$$

c) (Cas $n = 1$) $\log|x|$ a pour dérivée vp $\frac{1}{x}$.

Multiplication

On définit le produit d'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par une fonction $f \in C^{\infty}(\Omega)$ par la formule :
$\langle f u, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle$.

Ex. : Voir tab. C.

Support des distributions

On dit qu'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est *nulle sur un ouvert* $\Omega' \subset \Omega$ si l'on a $\langle u, \varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ayant son support inclus dans Ω'. On démontre que, si une distribution est nulle sur chacun des ouverts d'une famille quelconque, elle est nulle sur leur réunion. Ceci permet de définir le *support d'une distribution* comme étant le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel elle est nulle.

Ex. : Voir tab. D.

Convolution des distributions

On prend ici $\Omega = \mathbb{R}^n$; on écrira $\langle u(x), \varphi(x) \rangle$ au lieu de $\langle u, \varphi \rangle$ s'il y a lieu de préciser de quelle variable dépendent u et φ. Ceci étant, le *produit de convolution* $u * v$ de deux distributions $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est défini **formellement** par la formule :
$\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u(x), \langle v(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$,
mais cela n'a de sens que sous certaines hyp., par ex. :
a) si, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathrm{supp}\, u \times \mathrm{supp}\, v$ vérifiant $x + y \in K$ est compact, on dit alors que supp u et supp v sont *convolutifs* ;
b) si u et v sont des fonctions intégrables f et g, auquel cas $u * v$ est la fonction définie presque partout
$(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y$.
La convolution est donc une opération non partout définie ; elle est toujours commutative, mais associative seulement sous certaines conditions.

Ex. : Voir tab. E.

Application aux équations aux dérivées partielles à coefficients constants

Soit $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}\mathrm{D}^{\alpha}$ un opérateur différentiel d'ordre m où les coef. a_{α} sont des constantes ;
il se prolonge en une appl. de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même :

$$A(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}\mathrm{D}^{\alpha}u.$$

On peut écrire cela : $A(u) = A(\delta) * u$, de sorte qu'une équation aux dérivées partielles de la forme $A(u) = v$ peut être considérée comme une équation **algébrique** $A(\delta) * u = v$ dans l'ensemble $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, qui n'est hélas pas une algèbre pour la convolution.
Le *théorème de Malgrange-Ehrenpreis* affirme qu'il existe toujours des *solutions élémentaires*, i.e. des distributions E vérifiant $A(E) = \delta$.

Ex. : Voir tab. F.

Utilisation des solutions élémentaires

Si E est une solution élémentaire d'un opérateur différentiel A, il est naturel de chercher une solution d'une équation $A(u) = v$ sous la forme $u = E * v$, mais ceci n'a de sens que sous certaines hypothèses, par exemple si les supports de E et de v sont convolutifs ; ce procédé a l'avantage de fournir des solutions de certains problèmes de Cauchy.

Ex. : On reprend l'exemple a) tab. F avec $m = 2$, et on cherche à résoudre le problème de Cauchy.
(1) $\quad A(f) = g, \quad f(0) = b_0, \quad f'(0) = b_1$,
où g est une fonction donnée sur $[0, +\infty[$, b_0 et b_1 des constantes, f une fonction inconnue sur $[0, +\infty[$.
(1) équivaut à $A(f\mathrm{H}) = g\,\mathrm{H} + (b_1 + a_1 b_0)\,\delta + b_0\,\delta'$ et admet l'unique solution
$f\,\mathrm{H} = (z\,\mathrm{H}) * (g\,\mathrm{H} + b_1 + a_1 b_0)\,\delta + b_0\,\delta')$, ce qui donne, pour $x \geq 0$, la formule du tab. G.

Rem. : Une méthode analogue s'applique dans le cas de l'exemple b) tab. F, en remplaçant la demi-droite $x \geq 0$ par le demi-espace $t \geq 0$.

Soit $(\theta, \sigma) \in S_n \times S_n$ et $\sigma(X) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.
$\theta(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_{\theta^{-1}(1)}, y_{\theta^{-1}(2)}, \dots, y_{\theta^{-1}(n)}) = (x_{\sigma^{-1}(\theta^{-1}(1))}, x_{\sigma^{-1}(\theta^{-1}(2))}, \dots, x_{\sigma^{-1}(\theta^{-1}(n))})$, car

$$y_i = x_{\sigma^{-1}(i)} \Rightarrow y_{\theta^{-1}(i)} = x_{\sigma^{-1}(\theta^{-1}(i))} \wedge \theta(\sigma(X)) = (\theta \circ \sigma)(X).$$

A_1

$f \in A_2(E) \Rightarrow f(x, x) = -f(x, x)$ d'où $2f(x, x) = 0$. Si la caractéristique du corps est différente de 2 on en déduit $f(x, x) = 0$: f est alternée. Si cette caractéristique est 2 on peut avoir $f(x, x) \neq 0$.
Ex. : $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $f : K \times K \to K$, $f(x, y) = xy$.
f bilinéaire et alternée $\Rightarrow f(x+y, x+y) = 0 \wedge f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = 0$. Soit $f(x, y) + f(y, x) = 0$; f est donc antisymétrique. Le raisonnement s'étend à f n-linéaire, $n \geq 2$, en fixant n-2 coordonnées.

A_2

L'antisymétrisée d'une forme bilinéaire f est g telle que $g(x, y) = f(x, y) - f(y, x)$.
Soit $f \in A_n(E)$ et $g = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma f$. Soit τ une transposition fixée, $\tau \in S_n$.
Comme $\sigma \to \lambda = \sigma \circ \tau$ est une permutation de S_n et $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\sigma \cdot \varepsilon_\tau = -\varepsilon_\sigma$, on a :

$$g \circ \tau = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma f \circ \sigma \circ \tau = -\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\lambda f \circ \lambda = -g.$$

A_3

Formes multilinéaires antisymétriques, formes alternées, antisymétrisation

Si $(f, g, h) \in A_p(E) \times A_q(F) \times A_r(E)$, en utilisant les relations indiquées, la déf. de $f \wedge g$, l'associativité et la distributivité par rapport à l'addition de $\otimes$, il vient :

$$(f \wedge g) \wedge h = \frac{1}{(p+q)!\,r!\,p!\,q!} \alpha(\alpha(f \otimes g) \otimes h) = \frac{1}{p!\,q!\,r!} \alpha(f \otimes g \otimes h)$$

$$\frac{1}{p!\,q!\,r!} \alpha(f \otimes g \otimes h) = \frac{1}{p!\,q!\,r!\,(q+r)!} \alpha(f \otimes \alpha(g \otimes h)) =$$

$$\frac{1}{p!\,(q+r)!} \alpha(f \otimes (f \wedge g)) = f \wedge (g \wedge h).$$

Plus généralement, si

$$f_i \in A_{p_i}(E), f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k = \frac{1}{\prod_{i=1,\dots,k} (p_i!)} \alpha(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_k).$$

B_1

Associativité du produit extérieur

Soit $f = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_p$, $g = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_q$, les φ_i et ψ_j étant des éléments de E^*. D'après la relation $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_q)(X_1, X_2, \dots, X_q) = \det(\varphi_i(X_j))$ on voit que l'application $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \mapsto \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ de $(E^*)^k$ dans $\overset{k}{\wedge} E^*$ est k-linéaire antisymétrique. Or pour passer de $f \wedge g = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_p \wedge \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_q$ à $g \wedge f = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_q \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_p$ on peut faire successivement pq transpositions d'éléments consécutifs d'où la relation $g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g$, qui s'étend par distributivité de $\wedge$ par rapport à l'addition, à tout $(f, g) \in A_p(E) \times A_q(E)$ et plus généralement au produit extérieur d'un p-vecteur par un q-vecteur.

B_2

Relation entre $f \wedge g$ et $g \wedge f$

Dans l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel E, $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ pour tout $\boldsymbol{v} \in E$. Plus généralement toute suite de vecteurs présentant une répétition a un produit extérieur nul.
Cependant on peut avoir $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u}$ étant un p-vecteur non décomposable et $p > 1$.
Ex. : $(\boldsymbol{e}_i)$ étant une base de E, soit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4$.
$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = 2\, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 \neq \boldsymbol{0}$.
Une condition nécessaire pour que $\boldsymbol{w} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$ soit un bivecteur décomposable est $\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$,
soit $x_{ij} x_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{j\beta} + x_{i\beta} x_{j\alpha} = 0$ pour toutes les suites d'indices i, j, α, β telles que $i < j < \alpha < \beta$.

C

p-vecteurs décomposables

Étant donné un espace vectoriel E on peut considérer les algèbres (p. 258) associatives avec unité sur un corps K commutatif, engendrées par E, admettant E comme sous-espace vectoriel, et vérifiant une condition supplémentaire. Si l'on impose à la multiplication de cette algèbre que $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$ soit nul pour tout $\boldsymbol{x}$ de E on obtient l'*algèbre extérieure* de E, théorie due à GRASMANN.
Un modèle en apparaît naturellement quand E est le dual d'un espace vectoriel de dim. finie, à partir de la notion de produit extérieur de deux formes multilinéaires antisymétriques.
En analyse cette algèbre trouve un riche champ d'applications dans la différentiation extérieure des formes différentielles et dans leur intégration (travaux de POINCARE et d'E. CARTAN). Ainsi l'élément différentiel dans une intégrale multiple reçoit une interprétation et une notation cohérentes. Les formules de STOKES, d'OSTROGRADSKY sont unifiées dans une formule générale qui relie différentiation extérieure et opérateur bord d'un domaine.
Le calcul extérieur joue un rôle important dans la théorie des variétés différentiables.
Les idées essentielles sont dans la suite présentées dans le cadre le plus simple sinon le plus usuel : espaces vectoriels de dim. finie, corps de base K fixé commutatif de caractéristique nulle. On rappelle que dans une algèbre associative unitaire A on peut identifier le corps K avec son image dans A par l'application $\lambda \mapsto \lambda \cdot \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}$ étant l'unité (supposée non nulle) de la multiplication dans A.

Fonction antisymétrique

À toute permutation $\sigma \in S_n$, groupe des permutations de l'ens. $\{1, 2, \dots, n\}$, et à tout ens. E on associe une permutation de E^n, en posant, conventionnellement $\sigma(X) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$ pour tout $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Il en résulte bien que $\sigma_2(\sigma_1(X)) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)(X))$ (tab. A_1).

Déf. : Soit E un ens. et f une appl. de E^n dans un espace vectoriel F. f est antisymétrique si pour toute transposition τ de $\{1, 2, \dots, n\}$ on a $f \circ \tau = -f$.

Il découle de la décomposition de $\sigma \in S_n$ en produit de k transpositions que $f \circ \sigma = \varepsilon_\sigma f$, où $\varepsilon_\sigma = (-1)^k = (-1)^v$ est la signature de σ (p. 91) et $v = \mathrm{Card}\,\{(i, j) \mid i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)\}$ (nombre d'*inversions* dans la suite $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$) ; on a de plus $\varepsilon_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = \varepsilon_{\sigma_1} \cdot \varepsilon_{\sigma_2}$.

Th. 1 : *Si f est une application de E^n dans F l'application $\alpha(f) := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma f \circ \sigma$ de E^n dans F est antisymétrique.*

Déf. 1 : $\alpha(f)$ est appelée *antisymétrisée* de f et α *opérateur d'antisymétrisation* (tab. A_3).

En particulier si f est antisym. on a $\alpha(f) = p!\, f$. Il est immédiat que $f \mapsto \alpha(f)$ applique linéairement l'esp. vect. F^E dans lui-même.

Application alternée

Déf. : Une appl. $f : E^n \to F$ telle que $f(X) = 0$ pour tout $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ayant deux coordonnées égales est dite *alternée*.

Si f est antisymétrique alors f est alternée car la caractéristique de K est nulle (tab. A_2). La réciproque

est inexacte : si $F = K$ et $f(X) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2$ est alternée mais non antisym. Mais si l'on suppose que E est un espace vectoriel et que f est une application n-linéaire alternée, alors f est antisymétrique (tab. A_2).

Produit extérieur

On suppose que E est un espace vectoriel de dim. finie n et que $F = K$. On désigne par $L_p(E)$ l'esp. vect. des applications p-linéaires de E dans K, et par $A_p(E)$ le sous-esp. des applications p-linéaires alternées. Une application est k-linéaire si elle est linéaire par rapport à chacune des k variables, les autres étant fixées. Les éléments de $L_p(E)$ sont appelés *formes p-linéaires*.

Déf. 1 : Le produit de f et g éléments respectifs de $L_p(E)$ et de $L_q(E)$ est la forme $(p+q)$-lin. $f \otimes g$, telle que
$(f \otimes g)(X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}) =$
$f(X_1, \dots, X_p) \cdot g(X_{p+1}, \dots, X_{p+q})$.

L'application $(f, g) \mapsto f \otimes g$ de $L_p(E) \times L_q(E)$ dans $L_{p+q}(E)$ est bilinéaire. Comme $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$, il est possible alors de définir le produit d'une suite de n formes multilinéaires par :
$(f_1, f_2, \dots, f_n) \mapsto (f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_{n-1}) \otimes f_n$.

Déf. 2 : Si $(f, g) \in A_p(E) \times A_q(E)$, $p \geq 1$ et $q \geq 1$, l'application $f \wedge g \in A_{p+q}(E)$, définie par $f \wedge g = \frac{1}{p!\,q!} \alpha(f \otimes g)$ est appelée *produit extérieur* de f et g.

On convient que $A_0(E) = L_0(E) = K$, en identifiant les appl. constantes et leur valeur. Donc $\forall (f, v) \in A_0(E) \times A_k(E)$ et $\forall X \in E$ $(v \wedge f)(X) = v \cdot f(X) = (f \wedge v)(X)$.
L'application $(f, g) \mapsto f \wedge g$ de $A_p(E) \times A_q(E)$ dans $A_{p+q}(E)$ est bilinéaire.

Rem. : Les formes p-linéaires définies sur E sont les tenseurs p fois covariants (p. 419). Celles qui sont antisym. correspondent aux *tenseurs antisymétriques* : transposer deux indices change chaque coordonnée en une coordonnée de valeur opposée.

Algèbre extérieure des formes multilinéaires alternées

Th. 2 :
$\forall (f, g, h) \in A_p(E) \times A_q(E) \times A_r(E)$,
(1) $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.
(2) $g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g$ (tab. B_1, B_2).
(1) peut se déduire des propriétés suivantes valables pour tout couple de formes multilinéaires (f, g), resp. p-lin. et q-lin. :
$\alpha(\alpha(f) \otimes g) = p!\, \alpha(f \otimes g)$,
$\alpha(f \otimes \alpha(g)) = q!\, \alpha(f \otimes g)$.
Soit $\varphi \in A_1(E) = E^*$ et $f \in A_{p-1}(E)$, $p \geq 2$. Alors :
$(\varphi \wedge f)(X_1, X_2, \dots, X_p) = \varphi(X_1) f(X_2, X_3, \dots, X_p)$
$+ \sum_{i=2,\dots,p} (-1)^{(i-1)} \varphi(X_i) f(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_p)$.

On en déduit, par récurrence et en considérant le développement d'un déterminant (p. 91), pour $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) \in (E^*)^p$, les relations :
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_q)(X_1, X_2, \dots, X_q) = \det(\varphi_i(X_j))$.
$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_q = \alpha(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_q)$.

Rem. : Les notions introduites jusqu'ici ne supposent pas que la dimension de E soit finie.

Formes p-lin. antisymétriques en dimension finie

Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, l'espace vectoriel $A_p(E)$ est réduit au vecteur nul si $p > n$ car toute forme p-lin. antisymétrique f prend la valeur 0 pour toute suite de vecteurs liés. Il suffit pour le constater d'exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.

Une base ordonnée $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ de E étant fixée, de base duale $(\boldsymbol{e}^*_1, \boldsymbol{e}^*_2, \dots, \boldsymbol{e}^*_n)$, $A_p(E)$, $p > 1$, admet comme base l'ensemble des $\binom{n}{p}$ formes $\boldsymbol{e}^*_{i_1} \wedge, \boldsymbol{e}^*_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^*_{i_p}$, pour toutes les suites strictement croissantes $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ de p éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ et l'on a pour $f \in A_p(E)$:

$$f = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n} f(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_p})\, \boldsymbol{e}^*_{i_1} \wedge, \boldsymbol{e}^*_{i_2} \wedge, \dots, \boldsymbol{e}^*_{i_p}.$$

En effet les deux membres prennent la même valeur pour toute suite de p vecteurs de base d'indices strictement croissants, donc par antisymétrie et multilinéarité pour toute suite de p vecteurs de E.

Algèbre extérieure des formes multilinéaires alternées en dimension finie

En convenant que $A_0(E) = K$, on considère sur l'espace vectoriel $\prod_{p=0\dots n} A_p(E)$, somme directe (p. 85) des $n + 1$ $A_p(E)$, le *produit extérieur*

$$(f_0 + f_1 + \dots + f_n) \wedge (g_0 + g_1 + \dots + g_n) = \sum_{i=0,\dots,n}^{j=0,\dots,n} f_i \wedge g_j,$$

où $(f_i, g_j) \in A_i(E) \times A_j(E)$. Cette loi interne est bien définie d'après l'écriture unique de tout élément dans cette somme directe. L'espace vectoriel $\prod_{p=0,\dots,n} A_p(E)$ muni de cette loi est une algèbre sur K, notée $\wedge E^*$ et appelée *algèbre extérieure* de E^*. Cette algèbre est de dimension 2^n sur K et admet pour base l'ensemble composé du scalaire 1, des vecteurs $(\boldsymbol{e}^*_i)_{i=1,2,\dots,n}$ et des produits extérieurs

$\boldsymbol{e}^*_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}^*_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^*_{i_p}$, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n$, $p = 2, \dots, n$, de vecteurs de la base duale $(\boldsymbol{e}^*_i)$.

Algèbre extérieure d'un esp. vect. de dim. finie

L'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel E de dim. finie et son bidual $(E^*)^*$ permet de définir l'algèbre extérieure de E, notée $\wedge E$ comme $\wedge (E^*)^*$ où tout $\boldsymbol{x} \in E$ est identifié à $\tilde{\boldsymbol{x}} \in E^*$ tel que $\forall\, \boldsymbol{y}' \in E^*$ $\tilde{x}(y') = y'(x)$ (p. 418). En adaptant ce qui a été dit de $\wedge E^*$, on voit que $\wedge E$ est engendré par 1, les vecteurs de E et les produits extérieurs de suites de p vecteurs $(1 < p \le n = \dim. E)$ $\tilde{\boldsymbol{v}}_1 \wedge \tilde{\boldsymbol{v}}_2 \wedge \dots \wedge \tilde{\boldsymbol{v}}_p$, que l'on notera $\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_p$. $\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_p$ est le *produit extérieur* des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p$ de E. Un élément de $\wedge E$ de la forme $\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_p$ est un *p-vecteur décomposable*. Pour p fixé les combinaisons linéaires des p-vecteurs décomposables engendrent un sous-espace vectoriel de $\wedge E$, noté $\overset{p}{\wedge} E$, dont les éléments sont appelés *p-vecteurs*. $\wedge E$ est, comme espace vectoriel, somme directe des sous-espaces $\overset{p}{\wedge} E$, $p = 0, 1, \dots, n = \dim E$, en convenant $\overset{0}{\wedge} E = K$ et $\overset{1}{\wedge} E = E$.

Soit $b = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E indexée par $\{1, 2, \dots, n\}$. À toute partie $H = \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, on associe $\boldsymbol{b}_H = \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p}$, en posant $\boldsymbol{b}_\varnothing = 1 \in K$ et $\boldsymbol{b}_{\{i\}} = \boldsymbol{e}_i$. L'ensemble des 2^n $\boldsymbol{b}_H$, H parcourant l'ens. des parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ est une base de $\wedge E$.

Si $\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1,\dots,n} v_{ij}\, \boldsymbol{e}_j$

alors $\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_p = \sum_{H \in \mathfrak{B}_p} \alpha_H\, \boldsymbol{b}_H$, α_H désignant, si $H = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, le déterminant formé avec les p colonnes relatives aux $\boldsymbol{v}_i$ et, dans cet ordre, les lignes de rang $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ de la matrice (v_{ij}), $\mathfrak{B}_p$ désignant l'ens. des parties à p éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$

Application : L'associativité du produit extérieur appliquée à $\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_n = \det(v_{ij})\, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_n$,

en prenant $\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_p = \sum_{H \in \mathfrak{B}_p} \alpha_H\, \boldsymbol{b}_H$,

et $\boldsymbol{v}_{p+1} \wedge \boldsymbol{v}_{p+2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_n = \sum_{K \in \mathfrak{B}_{n-p}} \beta_K\, \boldsymbol{b}_K$,

donne $\det(v_{ij}) = \sum_{\substack{H \in \mathfrak{B}_p \\ K \in \mathfrak{B}_{n-p}}} \varepsilon_{H,K}\, \alpha_H\, \beta_K$

où $\varepsilon_{H,K} = 0$ si $H \cap K \ne \varnothing$, sinon $\varepsilon_{H,K} = (-1)^{I(H,K)}$ avec $I(H, K) = Card\, \{(i, j) \mid i > j \wedge (i, j) \in H \times K\}$.

Finalement $\det(v_{ij}) = \sum_{H \in \mathfrak{B}_p} (-1)^{I(H, \overline{H})}\, \alpha_H\, \beta_H$, où H et $\overline{H}$ sont complémentaires dans $\{1, 2, \dots, n\}$. C'est la méthode de développement d'un déterminant due à LAPLACE ; elle généralise le développement suivant les éléments d'une colonne (p. 91).

Le p-vecteur $\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_p$ est non nul si, et seulement si, les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p$ sont linéairement indépendants.

Si M est un sous-espace vectoriel de E de dimension p tous les p-vecteurs décomposables $\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_p$, où $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p$ sont des vecteurs de M, forment une droite vectorielle de $\overset{p}{\wedge} E$. Si $M = \sum_{\oplus} K\, \boldsymbol{v}_i$ on a

$M = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_p \wedge \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$.

Les déterminants mineurs d'ordre p de la matrice (v_{ij}) des coordonnées des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p$ dans la base $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1,2,\dots,n}$, relatifs, pour $H = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le p$, aux lignes d'indice $i_1, i_2, \dots, i_p$, prises dans cet ordre constituent les *coordonnées grassmanniennes de M* par rapport à $\boldsymbol{b}$.

Produit vectoriel et produit extérieur

Dans un espace vectoriel euclidien orienté E de dim. 3 on peut former le produit vectoriel $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ de deux vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Il est parfois noté $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$. C'est un élément de E alors que $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ appartient à $\wedge E$ et ne dépend ni de la structure euclidienne, ni de l'orientation. L'isomorphisme canonique entre l'espace vectoriel E et son dual introduit $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ comme étant l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que :

$\forall\, \vec{x} \in E$ $\vec{w} \cdot \vec{x} = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{x}\,]$ où $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{x}\,]$ désigne le produit mixte : on associe ainsi à $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ une forme linéaire $\vec{x} \mapsto \vec{w} \cdot \vec{x}$. Par contre cet isomorphisme conduit à considérer $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ comme la forme bilinéaire alternée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \to (\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_1)(\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_2) - (\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1)(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2)$, expression par ailleurs égale à $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)$.

Propriétés universelles du produit extérieur

Dans $\wedge E$ on a $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, mais non pour tout élément de $\wedge E$ (p. 266, tab. C). L'algèbre extérieure de E est caractérisée par la propriété suivante :

si A est une algèbre associative, unitaire, $f : E \to A$, une application linéaire, et si tout élément $\boldsymbol{x}$ de $f(E)$ a un carré nul dans A $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0})$ alors f se prolonge, de façon unique, en un homomorphisme de l'algèbre $\wedge E$ dans l'algèbre A. Cette propriété universelle permet de montrer que toute algèbre associative unitaire la vérifiant, admettant E comme sous-espace vectoriel, engendrée par E et telle que $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ pour tout $\boldsymbol{x}$ de E est isomorphe à $\wedge E$, dans un isomorphisme prolongeant l'application identique de E.

De même on peut caractériser, pour $p > 0$, chaque sous-espace vectoriel $\overset{p}{\wedge} E$ de $\wedge E$ par la propriété universelle suivante : quelle que soit une application p-linéaire alternée Φ de E dans un espace vectoriel F, il existe une et une seule application linéaire h de $\overset{p}{\wedge} E$ dans F telle que : $\forall\, (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_p) \in E^p$

$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_p) = h(\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{x}_p)$.

L'application linéaire h est bien déterminée par ses valeurs sur une base de $\overset{p}{\wedge} E$, c'est-à-dire par :

$h(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p}) = \Phi(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{e}_p)$ pour toutes les suites d'indices telles que $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n$.

Application : Soit $F = K$. On obtient ainsi une application linéaire $\Phi \to h$ de $\overset{p}{\wedge} E^*$, espace vectoriel des formes p-linéaires alternées définies sur E dans $(\overset{p}{\wedge} E)^*$, dual de $\overset{p}{\wedge} E$. On voit facilement que cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels qui permet d'identifier $\overset{p}{\wedge} E^*$ et $(\overset{p}{\wedge} E)^*$ et de considérer l'application bilinéaire <…>, appelée *crochet de dualité* définie sur le produit $\overset{p}{\wedge} E \times \overset{p}{\wedge} E^*$, avec les notations précédentes, par $(\boldsymbol{u}, \Phi) \mapsto \langle \boldsymbol{u}, \Phi \rangle = h(\boldsymbol{u})$.

En particulier on retrouve la relation :

$\langle \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_p, \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2, \dots, \wedge \boldsymbol{v}_p \rangle = \det(\varphi_i(\boldsymbol{v}_j))$.

Il en résulte que :

$\langle \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \boldsymbol{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{j_p}, \boldsymbol{e}^*_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}^*_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^*_p \rangle = \delta^{j_1, j_2, \dots, j_p}_{i_1, i_2, \dots, i_p}$,

symbole de KRONECKER, égal à 1 si on a la même suite d'indices en haut et en bas, sinon égal à zéro. Ces deux bases sont donc des bases duales.

Si f est une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F, sous-espace vectoriel de $\wedge F$, d'après ce qui a été vu il existe un unique homomorphisme $\widehat{f}$ de l'algèbre $\wedge E$ dans l'algèbre $\wedge F$ dont la restriction à E est f. $\widehat{f}$ est tel que

$\widehat{f}(\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_k) = f(\boldsymbol{v}_1) \wedge f(\boldsymbol{v}_2) \wedge \dots \wedge f(\boldsymbol{v}_k)$, où $\forall i$, $\boldsymbol{v}_i \in E$. Il s'ensuit $\widehat{f}(\overset{p}{\wedge} E) \subseteq \widehat{f}(\overset{p}{\wedge} F)$. La matrice de la restriction de $\widehat{f}$ à $\overset{p}{\wedge} E$ relative à des bases $(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p})_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le \dim E}$ pour $\overset{p}{\wedge} E$, $(\boldsymbol{e}'_{j_1} \wedge \boldsymbol{e}'_{j_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}'_{j_p})_{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_p \le \dim F}$ pour $\overset{p}{\wedge} F$, a $\binom{\dim F}{p}$ lignes et $\binom{\dim E}{p}$ colonnes. L'élément d'indice de ligne $(j_1, j_2, \dots, j_p)$ et d'indice de colonne $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ est le mineur de la matrice de f par rapport aux bases $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1,\dots,\dim E}$ et $(\boldsymbol{e}'_j)_{j=1,\dots,\dim F}$ formé par les lignes $j_1, j_2, \dots, j_p$ et par les colonnes $i_1, i_2, \dots, i_p$, dans cet ordre. De la relation, facile à établir, $f_1 \mathbin{\widehat{\circ}} f_2 = \widehat{f}_1 \circ \widehat{f}_2$, on peut déduire des relations entre les mineurs de même ordre des matrices de f_1, f_2 et de $f_1 \circ f_2$.

Formes différentielles

Définition

K est le corps des réels. On considère l'espace affine $\widehat{E} = \mathbb{R}^n$ sur l'esp. vect. $E = \mathbb{R}^n$.

Déf. : Une forme différentielle ω de degré p, ou *p-forme différentielle*, définie sur Ω, ouvert de $\widehat{E}$, est une application de Ω dans $\overset{p}{\wedge} E^*$, espace vectoriel des formes p-linéaires alternées.

Si $p = 0$ ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $p > 0$ et tout $m \in \widehat{E}$ $\omega(m)$ est une forme p-linéaire alternée : $\omega(m) : E^p \to \mathbb{R}$. Si $(o\,;\, \boldsymbol{e}_i)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ $(\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \dots,$ $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1))$, à tout point m correspond ses coordonnées dans ce repère, notées $x_i(m)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Chaque fonction x_i de Ω dans $\mathbb{R}$ est différentiable en tout point et sa différentielle $\mathrm{d}x_i(m) \in E^*$ est constante, notée $\mathrm{d}x_i$, et identique en tout m à $\boldsymbol{e}^*_i$, $i^{\text{ième}}$ vecteur de la base duale $(\boldsymbol{e}^*_i)$ de E d'où :

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n} a_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

où les $a_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n}$ sont des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour que ω soit de classe k il faut et il suffit que tous les $a_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n}$, composantes de ω dans la base considérée, soient de classe k.

Ex. : $\omega = x_3\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + x_1\, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_2\, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1$ est une 2-forme diff. ; l'écriture avec des indices croissants pour les $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ n'est pas obligatoire en adaptant le signe des coef. car $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$.

L'ensemble des formes diff. de classe k, p fixé, définies sur Ω est un espace vectoriel réel, noté $\Lambda^{(k)}_p(\Omega)$, avec les déf. suivantes : $(\omega_1 + \omega_2)(m) = \omega_1(m) + \omega_2(m)$, $(\lambda\omega)(m) = \lambda\omega(m)$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Si $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Lambda^{(k)}_p(\Omega) \times \Lambda^{(k)}_q(\Omega) \times \Lambda^{(k)}_r(\Omega)$, le produit extérieur $\omega_1 \wedge \omega_2$ est l'élément de $\Lambda^{(k)}_{p+q}(\Omega)$ tel que : $\forall\, m \in \Omega$ $(\omega_1 \wedge \omega_2)(m) = \omega_1(m) \wedge \omega_2(m)$.

On a $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$ et $\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{pq}(\omega_1 \wedge \omega_2)$.

Changement de variable dans une forme différentielle

Soit $\Phi : \Omega \to \Omega_1$ un difféomorphisme de classe C^k, $k \ge 1$, de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sur l'ouvert $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ (Φ est bijective, Φ et Φ^{-1} sont de classe k), défini par n fonctions φ_i telles que $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soit la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de $\Phi(X)$, les x_k étant celles de $X \in \mathbb{R}^n$.

A toute forme différentielle $\omega_1 \in \Lambda^{(k)}_p(\Omega_1)$ on associe $\Phi^*(\omega_1) \in \Lambda^{(k)}_p(\Omega)$ de la façon suivante :

si $p = 0$, $\Phi^*(\omega) = \omega_1 \circ \Phi$; si $p > 0$

$(\Phi^*(\omega_1)(m))(X_1, \dots, X_n) = \omega_1(\Phi(m))(Y_1, \dots, Y_n)$ où $Y_i = \Phi'(m)(X_i)$ ($\Phi'(m)$ étant la dérivée ou différentielle de Φ en m). Il est facile de vérifier que Φ^* est une appl. linéaire et que $(\Phi_1 \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Phi^*_1$.

$\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi)$

$\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \Phi^*(\omega_1) \wedge \Phi^*(\omega_2)$, $\Phi^*(a) = a \circ \Phi$.

Si $\omega_1 = a(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$, alors $\Phi^*(\omega_1) = a(\varphi_1, \dots, \varphi_n)\, \Phi^*(\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{j_p}$ et $\Phi^*(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_p})$

$$= \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_p \le n} \frac{\mathrm{D}(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_p})}{\mathrm{D}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_p})}\, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{j_p}$$

Soit Ω ouvert de $\hat{E}_3$, espace affine euclidien orienté de dim. 3, rapporté à une base orthonormée directe $b = (0 ; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. À un champ de vecteurs $\boldsymbol{V} : m \mapsto \boldsymbol{V}(m) = \Sigma X_i(m)\, \boldsymbol{e}_i$ correspond biunivoquement une 1-forme diff. ω telle que $\omega(m)(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{V}(m) \cdot \boldsymbol{v}_1$ i.e. $\omega = \Sigma X_i\, \mathrm{d}x_i$ (si $\boldsymbol{V} = \operatorname{grad}(f)$ alors $\omega = \mathrm{d}f$), et une 2-forme diff. $\overline{\omega}$ telle que $\overline{\omega}(m)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = [\boldsymbol{V}(m), \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$, soit $\overline{\omega} = X_1\, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + X_2\, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + X_3\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$.
Le calcul montre que $\mathrm{d}\omega$ est la 2-forme diff. associée au rotationnel (p. 355) du champ V :

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2,$$

ce qui démontre l'invariance de rot (V) par changement de repère orthonormé direct.

Comme $\mathrm{d}\overline{\omega} = \left(\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ on voit apparaître la même invariance pour la divergence. De plus comme $\overline{\omega}(m)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = k \cdot \det_{(e_i')}(\boldsymbol{V}(m), \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, dans une base $(\boldsymbol{e}_i')$ quelconque,
$\overline{\omega} = (X_1'\, \mathrm{d}x_2' \wedge \mathrm{d}x_3' + X_2'\, \mathrm{d}x_3' \wedge \mathrm{d}x_1' + X_3'\, \mathrm{d}x_1' \wedge \mathrm{d}x_2') \cdot k$,

où $k = [\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3']$ et $\mathrm{d}\overline{\omega} = \left(\sum_i \frac{\partial X_i'}{\partial x_i'}\right)(k\, \mathrm{d}x_1' \wedge \mathrm{d}x_2' \wedge \mathrm{d}x_3') = \left(\sum_i \frac{\partial X_i'}{\partial x_i'}\right) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$, ce qui montre l'invariance de la divergence dans un changement de repère quelconque.

A

Formes différentielles et champ de vecteurs

Si f est une fonction de classe C^2 $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = 0$ car $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = -\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$. La relation s'étend par linéarité, après avoir établi $\mathrm{d}(\mathrm{d}(a\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_p)) = 0$ en utilisant la relation concernant $\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2)$ (p. 270).

B

Relation fondamentale $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$

Sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^n$ la forme diff. ω de degré $p \geq 1$ de classe C^1 est la différentielle extérieure d'une (p-1)-forme diff. de classe C^1 si, et seulement si, $\mathrm{d}\omega = 0$. On a alors $\omega = \mathrm{d}\alpha$, où α est défini à l'addition près d'une (p-1)-forme diff. quelconque $\mathrm{d}\beta$ où $\beta \in \Omega^1_{p-1}$. Si U est étoilée par rapport à 0, i.e. $\forall (\lambda, x) \in [0, 1] \times U\ \lambda x \in U$, $\alpha(x)(x_1, \ldots, x_{p-1}) = \int_0^1 t^{p-1}\, \omega(tx)(x, x_1, \ldots, x_{p-1})\, \mathrm{d}t$ définit une (p-1)-forme diff. α de classe C^1 telle que $\omega = \mathrm{d}\alpha$.
Ex. : $n = 2$, $\omega = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$; $\mathrm{d}\omega = 0$ redonne la condition nécessaire pour que ω soit la différentielle d'une fonction, soit $B_x' = A_y'$ (p. 353). Si $\mathrm{d}\omega = 0$ (ω est alors dite fermée), l'existence de α telle que $\omega = \mathrm{d}\alpha$ sur tout l'ouvert U de déf. de ω n'est pas garantie si U est quelconque ; cependant α existe sur un voisinage de tout point U (p. 352).

C

Théorème de Poincaré

Différentiation extérieure

Si f est une 0-forme diff. on lui associe une 1-forme diff. à savoir $\mathrm{d}f$. Cette opération peut être étendue aux p-formes diff. à partir de leur expression unique dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Déf. : Si dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \Lambda_p^{(k)}(\Omega)$ s'écrit :

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n} a_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_p},$$

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n} \mathrm{d}a_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_p},$$

est la *différentielle extérieure* de ω. d est l'*opérateur de différentiation extérieure*.

Th. : *L'opérateur de différentiation extérieure* d *applique linéairement* $\Lambda_p^{(k)}(\Omega)$ dans $\Lambda_{p+1}^{(k-1)}(\Omega)$ *et vérifie les propriétés suivantes :*

1) *Si f est une fonction* $\mathrm{d}f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i$,
2) $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$,
3) $\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p\, \omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2$ *si* $\omega_1 \in \Lambda_p^1(\Omega)$,
4) $\mathrm{d}(\Phi^*(\omega)) = \Phi^*(\mathrm{d}\omega)$.

La propriété 4 montre que le calcul fait à partir de l'expression associée à la base canonique se déroulerait de la même façon avec l'expression liée à toute autre base. Si $\omega = a\, \mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_k$ alors $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_k$, $a, f_1, f_2, \ldots, f_k$ étant des fonctions différentiables.

Rem. : Les propriétés 1, 2, 3 caractérisent la différentiation extérieure des formes différentielles.

Intégrale d'une forme différentielle

Dans la suite l'intégrale considérée est l'intégrale de Lebesgue. Dans $\mathbb{R}^n$ une forme différentielle d'ordre n s'écrit de façon unique dans la base canonique sous la forme $\omega = f\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, d'où une bijection entre les 0-formes, c'est-à-dire les fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ et les n-formes différentielles.

Déf. : Soit K un compact connexe inclus dans l'ouvert Ω. L'intégrale sur K de la forme diff. de classe 0, $\omega = f\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, est l'intégrale de f sur K.

Cette définition est justifiée par la formule de changement de variable pour les intégrales multiples (p. 345). Si Φ est un difféomorphisme $(x_1, x_2) \mapsto (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2))$ de l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, la formule de changement de variable

$$\iint_K f dx_1\, dx_2 = \iint_{\Phi^{-1}(K)} (f \circ \phi) \left|\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_1, x_2)}\right| dx_1\, dx_2$$

donne $\int_K f dx_1 \wedge dx_2 := \varepsilon \int_{\Phi^{-1}(K)} \Phi^*(f\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2)$,

où $\varepsilon = \pm 1$ est du signe du déterminant jacobien $J(\Phi) = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_1, x_2)}$. On rappelle que, Φ étant un difféomorphisme, $J(\Phi)$ est continu et ne s'annule pas, donc garde un signe constant car K est connexe.

Th. : *Soit* $\omega \in \Lambda_n^{(0)}(\Omega)$, Ω *et* U *ouverts de* $\mathbb{R}^n$, *un compact connexe* $K \subset \Omega$, Φ *un difféomorphisme de* U *sur* Ω, $J(\Phi)$ *le déterminant jacobien de* Φ, *alors, si* $|J(\Phi)| = \varepsilon J(\Phi)$, $\int_K \omega = \varepsilon \int_{\Phi^{-1}(K)} \Phi^*(\omega)$.

Ceci conduit à considérer, pour une intégrale multiple, l'élément différentiel comme un produit extérieur, par exemple $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ au lieu de $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$. Le changement de variable donné par Φ se lit, en ne considérant que le cas $J(\Phi) > 0$, ainsi :

$$\iint_K f\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = \iint_{\Phi^{-1}(K)} f \circ \Phi\, \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2.$$

Ex. : $x_1 = \rho \cos\theta$, $x_2 = \rho \sin\theta$, $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$
$= (\cos\theta\, \mathrm{d}\rho - \rho \sin\theta\, \mathrm{d}\theta) \wedge (\sin\theta\, \mathrm{d}\rho + \rho\cos\theta\, \mathrm{d}\theta)$
$= \rho\, \mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\theta$ (p. 344, tab. B_2).

Formes diff. sur une variété différentiable

Soit V_n une variété différentiable, de classe C^1, connexe, de dimension n, $P \in V_n$ et (Ω, φ) (une carte locale en P, c.-à-d. un homéomorphisme d'un voisinage ouvert de $P \in V_n$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit T_p l'espace vectoriel tangent à V_n en P.

Rem. : Un vecteur $\boldsymbol{v} \in T_p$ peut être considéré comme une classe d'équivalence pour les couples (X, φ) d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et d'une carte locale ainsi définie : (Y, ψ) est équivalent à (X, φ) si, et seulement si, $Y = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(P))(X)$. Chaque vecteur $\boldsymbol{v} \in T_p$ peut être identifié à l'opérateur de dérivation tel que
$\boldsymbol{v}(f) = [\mathrm{d}(f \circ \varphi^{-1})]_{\varphi(P)}(X)$ car
$\boldsymbol{v}(f) = [\mathrm{d}(f \circ \psi^{-1})]_{\psi(P)}(Y)$ si (Y, ψ) et (X, φ) sont des représentants de $\boldsymbol{v}$. On peut alors écrire $X = \varphi_*(\boldsymbol{v})$ (application linéaire tangente p. 273/1).

Une p-forme différentielle ω sur V_n est une application qui à tout $P \in V_n$ associe une forme p-linéaire alternée définie sur T_p et qui correspond dans chaque système de coordonnées locales (Ω, φ) à une p-forme diff. sur $\varphi(\Omega)$, de classe C^1

$$\omega_\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} a_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ telle que $\omega(P)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p) = \omega_\varphi(\varphi(P))(X_1, \ldots, X_p)$, où $(X_i, \varphi) \in \boldsymbol{v}$, soit encore $X_i = \varphi_*(\boldsymbol{v}_i)$. Avec l'application linéaire cotangente (p. 273/1) $\omega = \varphi^*(\omega_\varphi)$.
$\varphi^*(\omega_\varphi) = \psi^*(\omega_\psi) \Rightarrow \omega_\psi = (\varphi \circ \psi^{-1})^*(\omega_\varphi)$: on passe de ω_φ à ω_ψ par le changement de variable correspondant au difféomorphisme $\varphi \circ \psi^{-1}$.

En opérant sur la traduction dans un système de coordonnées locales comme dans $\mathbb{R}^n$ on peut définir et calculer la différentielle extérieure d'une forme différentielle, la somme, le produit extérieur de deux formes diff. Le changement de variable signalé montre que le résultat est intrinsèque, i.e. indépendant des coordonnées locales choisies. Ainsi on a $\mathrm{d}(\omega_\varphi) = (\mathrm{d}\omega)_\varphi$.

Un cas simple est la notion de forme différentielle sur un ouvert d'un espace affine réel de dim. finie en prenant comme carte l'application qui, à tout point, associe le vecteur de ses coordonnées dans une base donnée.

Intégrale d'une forme diff. sur une variété

La variété différentiable V_n, de dim. n est supposée orientée. Soit ω une n-forme différentielle définie sur V_n et dont le support (i.e. l'adhérence dans V_n de l'ens. des P où ω n'est pas nulle) est un compact K (K = supp. (ω)), qui peut donc être recouvert par un nombre fini d'ouverts domaines de définition de cartes locales.

Th. : *(partition de l'unité) Si* $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$, *I fini, est une famille de cartes locales compatibles avec l'orientation de* V_n, *et si* $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ *il existe des fonctions différentiables* $(\alpha_i)_{i \in I}$ *telles que l'on ait :*
$\forall i \in I\ 0 \leq \alpha_i \leq 1$ *et supp.* $(\alpha_i) \subset \Omega_i$.
Alors $\sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(\Omega_i)} \alpha_i \cdot \omega_{\varphi_i}$ *ne dépend ni de* $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$ *ni de la partition de l'unité ainsi choisie.*

Déf. : $\sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(\Omega_i)} \alpha_i \cdot \omega_{\varphi_i}$ est appelé intégrale de la n-forme différentielle ω sur la variété orientée de dim. n V_n et noté $\int_{V_n} \omega$.

Intégrale d'une forme diff. selon un paramétrage

On considère une appl. différentiable Ψ (p. 423) d'un ouvert borné de $\mathbb{R}^p$ dans V_n, variété différentiable connexe de dim. n, $p \leq n$, et une p-forme diff. ω, continue définie sur V_n, à support compact.

Déf. : L'intégrale de ω selon Ψ est $\int_\Psi \omega = \int_K \Psi^*(\omega)$

où $K = \operatorname{supp}(\Psi^*(\omega))$, $\Psi^*(\omega)(m)(X_1, \ldots, X_p) = \omega(\Psi(m))(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$ et $\boldsymbol{v} = \Psi_*(X)$.

Ex. : Si $\omega_\varphi = a\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, alors :
$\Psi^*\omega = (a \circ \Psi)\, \mathrm{d}(x_1 \circ \Psi) \wedge \mathrm{d}(x_2 \circ \Psi)$.

On obtient $\Psi^*(\omega)$, exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, en effectuant dans ω_φ le changement de variable $\Phi = \varphi \circ \Psi$. Si $\Psi_2 = \Gamma \circ \Psi_1$ où Γ est un difféomorphisme des ens. de déf. de Ψ_1 et Ψ_2, de déterminant jacobien > 0, les paramétrages sont dits équivalents et l'on a : $\int_{\Psi_1} \omega = \int_{\Psi_2} \omega$.

Intégrale curviligne

On se donne $\gamma = [a, b] \to V_n$, une courbe orientée de classe C^1 et ω une forme diff. sur un ouvert Ω de V_n.

Alors $\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^* (\omega) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$, car sur $\mathbb{R}^1$ $\gamma^* (\omega) = f(t)\, \mathrm{d}t$. Si V_n est un esp. aff. euclidien de dim. 3 et $\omega = P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y + R\, \mathrm{d}z$ dans un r.o.n. $\mathfrak{R}$, alors $\gamma^* (\omega) = \boldsymbol{v} \cdot \gamma'\, \mathrm{d}t$.

$\int_a^b \boldsymbol{v} \cdot \gamma'\, \mathrm{d}t$ est égal à la circulation du champ de vecteurs de composantes (P, Q, R) dans $\mathfrak{R}$ le long de γ, orienté dans le sens des t croissants si $a \leq b$.

Intégrale de surface

Soit sur V_n, esp. aff. euclidien orienté de dim. 3 rapporté à un r.o.n. $\mathfrak{R}$, une 2-forme différentielle $\overline{\omega} = A\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ et une application $\mathfrak{S}$ d'un domaine $\mathfrak{D}$ de $\mathbb{R}^2$ dans V_n. Il vient $\int_{\mathfrak{S}} \overline{\omega} = \int_{\mathfrak{D}} \mathfrak{S}^* (\overline{\omega}) = \iint_{\mathfrak{D}} H(u, v)\, \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$.

Si W est le champ de vecteurs de composantes A, B, C dans $\mathfrak{R}$, le calcul montre que $H = [\boldsymbol{W}, \mathfrak{S}'_u, \mathfrak{S}'_v]$ (produit mixte) (p. 270, tab. A). Si on oriente la normale par le vecteur

$$\boldsymbol{n} = \frac{\mathfrak{S}'_u \times \mathfrak{S}'_v}{\| \mathfrak{S}'_u \times \mathfrak{S}'_v \|} \text{ on a : } \int_{\mathfrak{S}} \overline{\omega} = \iint_{\mathfrak{D}} \boldsymbol{W}(u, v) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma.$$

C'est le flux du champ $\boldsymbol{W}$ à travers la surface orientée.

Exemples d'application de la formule de Stokes

Dans l'énoncé de la formule générale de Stokes concernant l'intégrale d'une $(n-1)$ forme diff. sur une variété à bord compacte orientée il est question d'une orientation canonique de la variété de dim. $(n-1)$ constituée par ∂V_n (p. 273/1). On peut en avoir une idée intuitive pour une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.

Soit $\omega = P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y$, de classe C^1 sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, orienté comme sous variété par $\mathbb{R}^2$, contenant le domaine D borné, dont la frontière ∂D est formée d'un nombre fini d'arcs réguliers C^1 par morceaux. ∂D est orientée de façon que, en chaque point m de ∂D, sauf un nombre fini, le couple formé d'un vecteur d'origine m, par exemple normal en m à ∂D, contenu au voisinage de ce point dans $\mathbb{R}^2 \setminus D$, et d'un vecteur orientant la tangente constitue un repère de sens direct, celui de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors la formule de Stokes donne celle de Green-Riemann :

$$\int_{\partial D} P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y = \iint_D (Q'_x - P'_y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Dans la formule d'Ostrogradsky on considère une surface S fermée, compacte, frontière d'un volume V, domaine borné de $\mathbb{R}^3$ et variété de dim. 2 décrite par des cartes locales $m \to (u, v)$. V étant orienté comme $\mathbb{R}^3$, l'orientation sur S sera définie par un ordre entre les paramètres. Ce sera l'ordre u, v si, sauf sur une partie négligeable de S, le repère formé d'un vecteur d'origine $m\,(u, v)$, par ex. normal à S, situé dans $\mathbb{R}^3 \setminus V$, de $\boldsymbol{m}'_u$, $\boldsymbol{m}'_v$ est de sens direct, celui de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors la formule de Stokes $\int_{\partial V} \overline{\omega} = \int_V \mathrm{d}\overline{\omega}$ où $\overline{\omega}$ est une 2-forme diff. donne la formule d'Ostrogradsky :

$$\int_{\partial D} A\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y =$$

$$\iiint_V (A'_x + B'_y + C'_z)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \text{ (p. 354).}$$

Compléments de géométrie différentielle

Une *variété différentiable de classe* C^k (resp. C^∞, C^ω) est le couple d'une variété et d'une classe d'équivalence d'atlas C^k (resp. C^∞, C^ω) (voir p. 421). (Ω, φ) sera une carte locale en P, $(x^1, \ldots x^n)$ le système de coordonnées associé. Une application f d'une variété différentiable C^k : W_p dans une autre V_n est différentiable C^r $(r \leq k)$ en P si, $\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable C^r en $\varphi(P)$, et l'on définit le *rang* de f en P comme étant le rang de $\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(P)$. f est C^r si elle est C^r en tout point. C'est une *immersion* si le rang de f est égal à p en tout point de W. C'est un *plongement* si f est une immersion telle que f soit un homéomorphisme de W_p sur $f(W_p)$ muni de la topologie induite par celle de V_n.

Une *sous-variété* de dimension p d'une variété différentiable V_n est un sous-ensemble W de V_n tel que, pour tout point $Q \in W$, il existe une carte locale (Ω, φ) de V_n où $\varphi(\Omega)$ est un ouvert de la forme $\theta \times U$ avec $\theta \subseteq \mathbb{R}^p$ et $U \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $\varphi(\Omega \cap W) = \theta \times \{0\}$. Il existe ainsi un système de coordonnées locales $(x^1, \ldots x^n)$ sur un voisinage de Q dans V_n tel que W_p soit défini localement par $x^{p+1} = x^{p+2} = \ldots = x^n = 0$. Souvent le sous-ensemble de $W \subset V_n$ sera défini par un système de $q = (n-p)$ équations $f_i(M) = 0$ $(1 \leq i \leq q)$ où les f_i sont des fonctions C^1. Si l'application de V_n dans $\mathbb{R}^q$ définie par $M \to (f_1(M), \ldots, f_q(M))$ est de rang *q en tout point M de W*, alors W est une sous-variété de dimension p. On suppose les *variétés connexes*. Sinon on étudie les composantes connexes l'une après l'autre. La définition d'une variété différentiable est abstraite. Mais en fait c'est une hypersurface de dimension n dans $\mathbb{R}^p$ avec $p > n$. La variété étant supposée *dénombrable à l'infini* (il existe une suite de compacts $K_i \subseteq V_n$ telle que, pour tout i, $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$ et $\cup_{i \geq 1} K_i = V_n$), Whitney a démontré le th. suivant :

Th. : *Une variété connexe différentiable C^1 de dimension n admet un plongement dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Ex. : Le projectif réel $P_2(\mathbb{R})$, variété analytique compacte, admet un plongement dans $\mathbb{R}^4$.

Espace tangent

On considère l'ensemble $\mathfrak{I}$ des fonctions qui sont différentiables dans un voisinage de P. $f \in \mathfrak{I}$ est dite plate en P si $[d(f \circ \varphi^{-1})]_{\varphi(P)} = 0$.

Déf. *Un vecteur tangent* en P est une forme linéaire X sur $\mathfrak{I}$ qui est nulle sur les fonctions plates. Le *plan tangent* en P : $T_P(V)$ est l'ensemble des vecteurs tangents en P. Il a une structure naturelle d'espace vectoriel de dimension n : les deux opérations sont définies par $(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$ et $(\lambda X)(f) = \lambda X(f)$. On montre que les vecteurs tangents $(\partial / \partial x^i)_P$ $(1 \leq i \leq n)$ définis par $(\partial / \partial x^i)_P (f) = [\partial (f \circ \varphi^{-1}) / \partial x^i]_{\varphi(P)}$ forment une base de $T_P(V)$. L'*espace tangent* $T(V) = \cup_{P \in V} T_P(V)$. L'*espace cotangent* $T^*(V) = \cup_{P \in V} T^*_P(V)$, T^*_P étant le dual de $T_P(V)$.

Déf. : *L'application linéaire tangente Φ_** de l'application différentiable Φ de V dans W, deux variétés différentiables, est une application de $T(V)$ dans $T(W)$ définie de la manière suivante : à $X \in T_P(V)$ correspond $Y = \Phi_* X \in T_Q(W)$ avec $Q = \Phi(P)$ de sorte que, pour toute fonction g différentiable dans un voisinage de Q, $Y(g) = X(g \circ \Phi)$.

L'*application linéaire cotangente* Φ^* est définie par dualité : si $\omega \in T^*_Q(W)$, $\Phi^* \omega \in T^*_P(V)$ est telle que $< \Phi^* \omega, X > = < \omega, \Phi_* X >$ pour tout $X \in T_P(V)$.

On note $\Lambda^p(V)$ l'ensemble des *p-formes différentielles*, et $\Gamma(V)$ *l'espace des champs de vecteurs* sur V. Les *champs de tenseurs* sont définis d'une manière analogue. Φ^* permet de transporter $\Lambda^1(W)$ dans $\Lambda^1(V)$. En effet soient $P \in V$ et $\omega \in \Lambda^1(W)$, $(\Phi^* \omega)_P = \Phi^*[\omega(\Phi(P))]$. De même à un champ de tenseurs covariants g sur W, on fait correspondre $\Phi^* g$ sur V. Par contre Φ_* ne permet pas de transporter les champs de vecteurs en général. On montre que la *différentielle extérieure* d commute avec Φ^* :
$\mathrm{d}(\Phi^* \eta) = \Phi^*(\mathrm{d}\eta)$. Pour une fonction f, cette formule est $\mathrm{d}(f \circ \Phi) = \Phi^*(\mathrm{d}f)$.

Déf. : *Crochet de deux champs de vecteurs* X et Y sur V : c'est le champ de vecteurs $[X, Y]$ défini par $[X, Y]_P(f) = X_P[Y(f)] - Y_P[X(f)]$ pour tout $f \in \mathfrak{I}$. Ici f doit être C^2 mais la définition s'étend à $\mathfrak{I}$ entier.

Déf. : Une variété différentiable V_n est *orientable* s'il existe un atlas tel que tous les changements de cartes appartiennent au groupe linéaire positif $GL(\mathbb{R}^n)^+$. Soit deux cartes locales de l'atlas (Ω, φ) et (θ, ψ) telles que $\Omega \cap \theta \neq \emptyset$. Sur $\Omega \cap \theta$ il y a deux systèmes de coordonnées $\{x^i\}$ pour (Ω, φ) et $\{y^\alpha\}$ pour (θ, ψ). La matrice $(\partial y^\alpha / \partial x^i) \in GL(\mathbb{R}^n)^+$.

Th. : *Une variété différentiable V_n est orientable si, et seulement s'il existe une n-forme différentielle sur V qui ne s'annule en aucun point.*

Dans l'ensemble des n-formes différentielles qui ne s'annulent pas, on définit la relation : $\omega_1 \sim \omega_2$ s'il existe $f > 0$ telle que $\omega_1 = f \omega_2$. *Orienter la variété*, c'est choisir une des deux classes d'équivalence. *Exemples* de variété non orientables : les projectifs réels de dimension paire, la bouteille de Klein.

Variété à bord

Déf. : *Une variété à bord* est un espace topologique séparé tel que chacun de ses points admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de H^n le demi-espace de $\mathbb{R}^n$ $(x^1 \leq 0)$, muni de la topologie induite.

Les points de V_n qui ont un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ constituent *l'intérieur* de V_n, le complémentaire de l'intérieur est *le bord* noté ∂V. Comme pour les variétés sans bord, on définit une variété différentiable à bord C^k.

Th. : *Si $\partial V \neq \emptyset$, ∂V est une variété différentiable de dimension $(n-1)$, sans bord : $\partial(\partial V) = \emptyset$. Si V_n est orientable, son bord ∂V est orientable. A toute orientation de V_n correspond canoniquement une orientation de ∂V.*

Formule de Stokes : *V_n étant une variété à bord différentiable, orientée et compacte, toute $(n-1)$-forme différentielle ω sur V_n vérifie $\int_V \mathrm{d}\omega = \int_{\partial V} i^* \omega$.*

∂V a l'orientation canonique et i est l'inclusion $\partial V \xrightarrow{i} V$.

Théorème de Frobenius

Déf. : *Un champ de p-directions H_x* sur V est la donnée en chaque point x de V_n d'un sous-espace vectoriel H_x de dimension p de $T_x(V)$ qui vérifie une condition de différentiabilité écrite sous l'une des formes suivantes : a) Chaque $x_0 \in V_n$ possède un voisinage U sur lequel il existe p champs de vecteurs différentiables $X_1, X_2, \ldots, X_p$ tels que les $X_i(x)$ $(1 \leq i \leq p)$ forment une base de H_x pour tout $x \in U$; b) sur U il existe $q = (n-p)$ 1-formes différentielles $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ telles que $X \in H_x \Leftrightarrow \omega_j(X) = 0$, $1 \leq j \leq q$.

Th. : *La c.n.s. pour qu'il existe en tout point $x_0 \in V_n$ une sous-variété de dimension p (appelée variété intégrale passant par x_0) d'un voisinage U de x_0 tangente en chacun de ses points x au sous-espace H_x (x_0 est l'un deux) est $[X_i, X_j]_x \in H_x$ pour tous i, j et x $(1 \leq i \leq j \leq p)$ si l'on considère la condition* a). *Sinon la c.n.s. est*
$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \ldots \wedge \omega_q = 0$ pour tout i.

Le cas $p = 1$ correspond aux champs de vecteurs qui sont toujours intégrables ($[X, X] = 0$).

Ex. :
Soit $\omega = a(x)\, \mathrm{d}x^1 + b(x)\, \mathrm{d}x^2 + c(x)\, \mathrm{d}x^3 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. La c.n.s. de Frobenius est $\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} = 0$ où $\vec{A} = (a, b, c)$.

Connexion

Dans $\mathbb{R}^n$ on compare deux vecteurs ayant des origines différentes par transport parallèle et on peut ainsi dériver un champ de vecteurs. Sur V_n, si $P \neq Q$ il n'y a aucun lien entre $T_P(V)$ et $T_Q(V)$. C'est pourquoi il faut se donner une connexion sur V_n.

Déf. : Une *connexion* sur la variété différentiable V est la donnée d'une application D (appelée *dérivée covariante*) de $T(V) \times \Gamma(V)$ dans $T(V)$ ayant les propriétés suivantes : a) Si $X \in T_P(V)$, $D(X, Y)$ noté $D_X Y \in T_P(V)$; b) Pour tout $P \in V$ la restriction de D à $T_P(V) \times \Gamma(V)$ est bilinéaire ; c) Si f est une fonction différentiable $D_X(fY) = X(f)Y + f D_X Y$; d) Si X et $Y \in \Gamma(V)$, X de classe C^r et Y de classe C^{r+1} alors $D_X Y$ est de classe C^r. Pour écrire la dérivée covariante $D_X Y$ du champ de vecteurs Y

dans une carte locale (Ω, φ) de coordonnées $\{x^i\}$ avec $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ on pose :

d'après d) $D_{\partial / \partial x^i}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Gamma^k_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x^k}$; Γ^k_{ij} sont les symboles de CHRISTOFFEL (p. 416), ce sont des fonctions C^∞ sur Ω si la variété est de classe C^∞. D'où $D_X Y = X^i (\partial_i Y^k + \Gamma^k_{ij} Y^j)\, \partial / \partial x^k$.

Déf. : *La torsion de la connexion D* est l'application de $\Gamma \times \Gamma$ dans Γ définie par
$(X, Y) \to T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$. Sur (Ω, φ) $[T(X, Y)]^i = (\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}) X^j Y^k = T^i_{jk} X^j Y^k$. T^i_{jk} sont les composantes d'un tenseur, alors que les Γ^i_{jk} ne le sont pas.

Déf. : *La courbure de la connexion D* est la 2-forme à valeurs dans Hom (Γ, Γ) :
$(X, Y) \to R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X, Y]}$.
Un calcul montre que $R(X, Y) Z = R^k_{\ell ij} X^i Y^j Z^\ell \dfrac{\partial}{\partial x^k}$.

Déf. : Z est un *champ de vecteurs parallèles* le long d'une courbe différentiable C ($[0,1] \ni t \to C(t) \in V$) si $D_{\mathrm{d}c/\mathrm{d}t} Z = 0$. Cette condition s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d} Z^k(t)}{\mathrm{d}t} + \Gamma^k_{ij}(C(t)) \frac{\mathrm{d} C^i(t)}{\mathrm{d}t} Z^j(t) = 0$$

où $Z(t) = Z(C(t))$.

$Y = Z(1)$ est le transporté parallèle du vecteur $X = Z(0)$ le long de C. Dans $\mathbb{R}^n$ le transport parallèle ne dépend pas de la courbe C ; ce n'est pas le cas sur V_n en général.

Déf. : Une *géodésique de la connexion* D est une courbe C de classe C^2 telle que $D_{\mathrm{d}c/\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = 0$.
L'équation des géodésiques est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 C^i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk}(C(t)) \frac{\mathrm{d}C^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}C^k}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{pour tout } i.$$

Déf. : On étend aux champs de tenseurs la notion de *dérivée covariante* par rapport à un vecteur X. Par exemple $D_X f = X(f)$ et pour une 1-forme différentielle $\omega = \omega_j \mathrm{d}x^j$ sur Ω, $\nabla_i \omega_j = \partial_i \omega_j - \Gamma^k_{ij} \omega_k$. La règle est : à la dérivée partielle on doit ajouter autant de Γ^k_{ij} avec le signe + qu'il y a d'indices contravariants et autant de Γ^k_{ij} avec le signe – qu'il y a d'indices covariants.

Variété riemannienne

Déf. : C'est le couple (V_n, g) d'une variété différentiable V_n et d'une *métrique riemannienne* g qui est un champ de tenseurs deux fois covariants tel qu'en tout point $p \in V$, g_P définisse une forme bilinéaire symétrique définie positive. D'après WHITNEY, il existe une métrique riemannienne sur une variété différentiable $V_n \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^{2n+1}$, Φ étant le plongement. En effet, $g = \Phi^* \mathscr{E}$ est une métrique riemannienne sur V_n, $\mathscr{E}$ étant la métrique euclidienne.

Déf. : *Longueur L (C) d'un chemin différentiable* $C : [a, b] \ni t \to C(t) \in V$ de classe C^1,

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right)}\, \mathrm{d}t$$

. La variété étant connexe par arcs, deux points P et Q de V peuvent être joints par un arc différentiable. d $(P, Q) = \inf L(C)$ pour tous les chemins différentiables C de P à Q définit une *distance* qui fait de (V_n, g) un *espace métrique*.

Déf. : *Connexion riemannienne*. C'est la connexion sans torsion pour laquelle le tenseur métrique est à dérivée covariante nulle. En écrivant $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ et $\nabla_i g_{jk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma^\ell_{ik} g_{j\ell} - \Gamma^\ell_{ij} g_{\ell k} = 0$, on trouve :

$\Gamma^\ell_{ij} = \dfrac{1}{2} g^{k\ell} [\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}]$ où $g^{k\ell}$ sont les composantes de la matrice inverse de la matrice (g_{ij}).

Le *tenseur de courbure* de composantes $R_{k\ell ij} = g_{mk} R^m_{\ell ij}$ a les propriétés suivantes : $R_{ijk\ell} = - R_{jik\ell}$, $R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}$, $R_{ijk\ell} + R_{i\ell jk} + R_{ik\ell j} = 0$ et $\nabla_m R_{ijk\ell} + \nabla_k R_{ij\ell m} + \nabla_\ell R_{ijmk} = 0$. Si les ξ^k sont les composantes d'un champ de vecteurs $\nabla_i \nabla_j \xi^k - \nabla_j \nabla_i \xi^k = R^k_{\ell ij} \xi^\ell$.
$\sigma(X, Y) = g[R(X, Y)Y, X] = R_{ijk\ell} X^i X^k Y^j Y^\ell$, si X et Y sont orthonormés est la *courbure sectionnelle* relative au biplan défini par X et Y. Pour la sphère $S_n(1)$ la courbure sectionnelle est constante égale à 1. Le tenseur de RICCI a pour composantes $R_{jk} = R^i_{jik}$ et la courbure scalaire $R = g^{ij} R_{ij}$.

Équations aux dérivées partielles

Soit Ψ une application C^∞ d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (muni de coordonnées $\{x^i\}$) dans $\mathbb{R}^p$. $x \to \psi(x)$ est représentée par p fonctions $x \to \psi^\beta(x)$ ($\beta = 1, 2, ..., p$) qui sont les coordonnées de $\psi(x)$ dans $\mathbb{R}^p$.

Déf. : Un opérateur aux dérivées partielles linéaire A d'ordre k est un opérateur linéaire de $E_p = C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$ dans E_q qui s'écrit avec $1 \le \alpha \le q \in \mathbb{N}$:

$$(1)_a\ A^\alpha(\Psi) = \sum_{\ell=0}^k (a^\alpha_{\beta,\ell}(x))^{i_1, i_2 \dots i_\ell}\, \partial_{i_1 i_2 \dots i_\ell} \Psi^\beta.$$

On fait la somme sur β de 1 à p et sur chaque i_λ de 1 à n. Les $a^\alpha_{\beta,\ell}(x)$ sont des fonctions C^∞ (mais cela n'est pas nécessaire). *Exemple :* Soient $g_{ij}(x, t)$ les composantes d'une métrique riemannienne g_t sur Ω, $(1)_b$ $\partial_t g_{ij} = g^{kl}(\partial_{ij} g_{k\ell} + \partial_{k\ell} g_{ij} - \partial_{ik} g_{j\ell} - \partial_{j\ell} g_{ik})$ est une équation du second ordre avec $p = q = n(n+1)/2$.

Déf. : Une équation aux dérivées partielles (É.D.P.) d'ordre k est une équation qui s'écrit :
(2) $F(x, \psi, \partial^1 \psi, ..., \partial^k \psi) = 0$, $\partial^l \psi$ représente toute dérivée d'ordre ℓ de chacune des composantes ψ^β ; F qui a q composantes est supposée dépendre différentiablement de chacun de ses arguments $(\dots x^i, \dots \psi^\alpha, \dots \partial_{i_1 \dots i_\ell} \psi^\beta, \dots)$.

On suppose $n > 1$, sinon il s'agit d'une équation différentielle ordinaire (É.D.O.), et $q = p$: il y a autant d'équations que de fonctions inconnues.

Ex. : Sur une variété riemannienne $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$ est une équation de déformation de la métrique (si en x_0, $\Gamma^k_{ij}(x_0) = 0\ \forall i, j, k$, le second membre est celui de $(1)_b$). L'équation de GINZBURG-LANDAU $\Delta u = -|\nabla u|^2 u$ où u est une application de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Si $u = (u^1, u^2)$ l'équation est le système :
$\sum_{i=1}^2 [\partial_{ii} u^j + \sum_{k=1}^2 (\partial_i u^k)^2 u^j] = 0, j = 1, 2.$

Théorème de CAUCHY-KOWALEWSKA

On suppose que $F = 0$ soit sous la forme $1 \le \alpha \le p$
(3) $\partial^k \psi^\alpha / (\partial x^1)^k = f^\alpha(x, \psi, \partial^1 \psi, \dots \partial^k \psi)$, où f^α ne dépend pas des $\partial^k_1 \psi^\beta$ $1 \le \beta \le p$. Le *problème de* CAUCHY en $x = 0$ consiste à prouver l'existence d'une solution de (3) qui satisfasse aux conditions $\psi^\alpha(0, y) = \varphi^\alpha_0(y)$, $\partial_1 \psi^\alpha(0, y) = \varphi^\alpha_1(y)$, ..., $\partial_1^{k-1} \psi^\alpha = \varphi^\alpha_{k-1}(y)$ où les $\varphi^\alpha_\ell(y)$ $(1 \le \alpha \le p, 0 \le \ell \le k-1)$ sont des fonctions données dans un voisinage de $y = 0$, avec $y = (x^2, x^3, ..., x^n)$.

Th. : *Si les fonctions f^α et φ^α_ℓ sont analytiques, le problème de* CAUCHY *admet une et une seule solution analytique dans un voisinage de $x = 0$.*

Rem. : Une équation d'ordre k peut se ramener à une équation d'ordre 1 en prenant toutes les dérivées d'ordre inférieure à k comme inconnues supplémentaires et en ajoutant les équations correspondantes. Si les données ne sont pas analytiques, il peut ne pas y avoir de solution. Un exemple très simple : on suppose que l'équation (2) soit $\Delta \psi = 0$ et que $\varphi_0(y)$ ou $\varphi_1(y)$ ne soit pas analytique ; il n'y a pas de solution à ce problème de CAUCHY puisque toute solution de $\Delta \psi = 0$ est analytique. En général on peut mettre (2) sous la forme (3), sauf si les données de CAUCHY sont sur des hypersurfaces contenant des courbes caractéristiques (voir ci-dessous). Dans ce cas il peut y avoir plusieurs solutions si les données de Cauchy satisfont certaines conditions imposées par l'équation (2), sinon il n'y a pas de solution.

Ex. : Soit l'équation linéaire (4) $a^i(x)\, \partial_i u = 0$ $(p = q = 1, 1 \le i \le n)$. On intègre le système ordinaire (5) $\mathrm{d}x^i / \mathrm{d}s = a^i(x)$. Une solution $x^i = x^i(s)$ $(1 \le i \le n)$ détermine une courbe C le long de laquelle u est constante. Ces courbes C sont les courbes caractéristiques. Soit une hypersurface H passant par $x = 0$ représentée paramétriquement par les fonctions $x^i(t_1, t_2, \dots t_{n-1})$ $(1 \le i \le n)$ et $u(t_1, t_2, \dots t_{n-1})$ la donnée de CAUCHY sur H. Si $C \subset H$, la donnée de CAUCHY devra être constante le long de C. Soit $x^i(s, t_1, t_2, \dots t_{n-1})$ $(1 \le i \le n)$ la solution de (5) qui en $s = 0$ vaut $x^i(t_1, t_2, \dots t_{n-1})$. Si on peut exprimer $s, t_1, t_2, \dots t_{n-1}$ en fonction de $x^1, ..., x^n$, $u(x) = u(t_1(x), t_2(x), \dots t_{n-1}(x))$ sera la solution du problème de CAUCHY. Pour cela il faut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \partial x^1 / \partial t_1 \dots \partial x^1 / \partial t_{n-1} & a^1 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ \partial x^n / \partial t_1 \dots \partial x^n / \partial t_{n-1} & a^n \end{vmatrix} \text{ soit non nul sur } H.$$

La dernière colonne ne doit pas être une combinaison linéaire des autres. Comme H est supposée être une sous-variété, il existe localement des nouvelles coordonnées $\{y^i\}$, de sorte que $y^1 = 0$ soit l'équation de H. On est ainsi ramené à la forme résolue. *Autre exemple :* On considère l'équation (6) $\partial_x u - u \partial_y u = 0$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y), avec la donnée de CAUCHY $u(0, y) = f(y) \in C^1(\mathbb{R})$. L'équation des courbes caractéristiques est $\mathrm{d}y / \mathrm{d}x = -u$. Ce sont des droites $y = -\lambda x$ le long desquelles $u = \lambda$. La solution de l'équation (6) est donnée par l'équation implicite (7) $u = f(y + ux)$. Tant que $x f'(y + ux) \neq 1$ la solution est unique. (6) admet une unique solution au voisinage de la droite $x = 0$ (pour $t < 1 / \sup f'$).

Déf. : Le *symbole principal* $\sigma_\xi(A, x)$ est obtenu en remplaçant les $\partial / \partial x^i$ par des variables réelles ξ_i dans la *partie principale de A* c'est-à-dire la partie correspondant aux dérivées d'ordre le plus élevé dans A : $[\sigma_\xi(A, x)]^\alpha_\beta = [a^\alpha_{\beta,k}(x)]^{i_1, i_2 \dots i_k} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k}$.

On dira que l'opérateur linéaire A est *elliptique* en x si à $\sigma_\xi(A, x)$ correspond un opérateur inversible de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ quel que soit le vecteur non nul $\xi = \{\xi_i\} \in \mathbb{R}^n$. Lorsque $p = 1$ (une équation pour une fonction inconnue), $\sigma_\xi(A, x)$ est une forme quadratique si $k = 2$. Si cette forme est définie positive ou négative en x l'équation est *elliptique* ; elle est *parabolique* si $\det |a^{ij}| = 0$ et *hyperbolique* dans les autres cas.

Ex. : Le Laplacien Δ défini par $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u$ est un opérateur elliptique et $\sigma_\xi(\Delta) = \sum_{1 \le i \le n} (\xi_i)^2$.

$\partial_{xx} u - \partial_{yy} u = 0$ est une équation *hyperbolique*. Sa solution générale s'écrit $u(x, y) = f(x + y) + g(y - x)$ où f et g sont des fonctions C^2 arbitraires (pour le montrer on fait le changement de variables $x + y = z$, $y - x = t$). Si on impose $u(0, y) = \varphi_0(y)$ et $\partial_x u(0, y) = \varphi_1(y)$, la solution $u(x, y)$ est parfaitement déterminée.

Le *type d'un opérateur non linéaire F* dépend de la fonction ψ qu'on considère. En ψ le type de F est celui de sa différentielle $F'_\psi(u) = \sum_{\ell=0}^k \dfrac{\partial F}{\partial(\partial^\ell \psi)} \partial^\ell u$.

Ex. : L'équation de MONGE-AMPÈRE sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $F(\psi) = \partial_{xx} \psi\, \partial_{yy} \psi - (\partial_{xy} \psi)^2 - f(x, y) = 0$, est elliptique lorsque $f(x, y) > 0$ et hyperbolique lorsque $f(x, y) < 0$. En effet $\sigma_\xi(F, x, y) = \partial_{yy} \psi (\xi_x)^2 - 2\partial_{xy} \psi\, \xi_x \xi_y + \partial_{xx} \psi (\xi_y)^2$ ne s'annulera pas si $(\partial_{xy} \psi)^2 - \partial_{xx} \psi\, \partial_{yy} \psi < 0$.

Équation de la chaleur

Solution dans le demi-espace de $\mathbb{R}^n$ où $x^1 = t \ge 0$ de

(8) $Lu = \partial_t u - \sum_{i=2}^n \partial_{ii} u = f(t, y)$, $u(0, y) = \varphi(y)$.

Dans $\mathbb{R}^n$ on note $x^1 = t$ et $y = (x^2, x^3, ..., x^n)$. Cette équation est de type parabolique. On appelle noyau de la chaleur $K(y, z, t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp[-\|y - z\|^2 / 4t]$. Pour $t > 0$ on peut vérifier que $LK \equiv 0$, et que toute fonction $u(y, t)$ qui est C^2 en y et C^1 en t satisfait pour tout $t > 0$:

$$(9)\ u(y, t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(y, z, t - \tau)\, Lu(\tau, z)\, \mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(y, z, t)\, u(0, y)\, \mathrm{d}y.$$

Cette identité nous donne la solution de l'équation (8). Parfois pour des équations non linéaires, on connaît la solution sous forme explicite. La solution dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

de l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial t} = u\partial u / \partial x + \mu\partial^2 u / \partial x^2$, $\mu > 0$, $u(0, x) = f(x) \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ est

$$u_\mu(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y-x}{t} F(x, y, t)\,dy \Big/ \int_{\mathbb{R}} F(x, y, t)\,dy \text{ où}$$

$$F(x, y, t) = \exp\left\{\left[\int_0^y f(x)\,dx - (x-y)^2/2t\right]/2\mu\right\}.$$

Théorème de Fredholm

On considère l'application linéaire définie en (1) : $\psi \to A(\psi)$ (on suppose Ω borné à bord $\partial\Omega$ C^∞). On utilise la norme L_2 pour définir l'adjoint formel A^* de A : $< A(\psi), v >_F = < \psi, A^*(v) >_E$ pour tout ψ et v dès que les termes ont un sens ($E = E_p$, $F = E_q$).

Th. : *Si A est un opérateur elliptique* ($p = q$), Ker *A et* Ker A^* *sont de dimension finie. Si* $v \in L_2(F)$, *l'équation* $A(\psi) = v$ *admet une solution* ψ *(dont les dérivées jusqu'à l'ordre k appartiennent à* $L_2(E)$ *si, et seulement si, v est orthogonal dans* $L_2(F)$ *à* Ker A^*. *Cette solution est unique si on impose à* ψ *d'être orthogonal à* Ker *A. Si A est uniformément elliptique (il existe* $c > 0$ *indépendant de x tel que* $\sum_{\alpha=1}^{p} [\sigma_\xi(A, x)]_\beta^\alpha\, \eta^\beta \eta^\alpha \geq c$ *pour tous vecteurs* $\eta \in \mathbb{R}^p$ *et* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *de norme* 1), *A admet une suite de valeurs propres tendant vers l'infini. Les espaces propres sont de dimension finie.*

On a, pour certaines équations, donné des solutions explicites ou indiqué la procédure à suivre pour exhiber une solution. Dans le cas général on dispose du théorème de Cauchy-Kowalewska. Ce théorème ne concerne que le cas analytique mais surtout est purement local. Or les problèmes qui se posent en Géométrie, en Mécanique ou en Physique consistent à prouver l'existence de solution globale d'É.D.P. Pour résoudre ces équations de nombreuses méthodes ont été développées, *méthodes d'analyse fonctionnelle* mais aussi *méthodes topologiques*. En voici quelques-unes. Pour les équations linéaires, la *transformation de Fourier* ramène une É.D.P. à un système d'équations différentielles ordinaires.

Pour une équation d'évolution telle que l'équation

(10) $Lu = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t)$, $x \in \Omega$, $t > 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$,

$u(x, 0) = u_0(x)$, on peut utiliser la *méthode des fonctions propres*. λ_n étant la suite des valeurs propres de $-\Delta$ sur Ω avec donnée de Dirichlet nulle sur $\partial\Omega$, et ψ_n une base orthonormée pour $L_2(\Omega)$ de fonctions propres correspondant à λ_n, on cherche une solution de (10) sous la forme $u(x, t) = \sum \alpha_n(t)\,\psi_n(x)$ en utilisant les données $f(x, t) = \sum f_n(t)\,\psi_n(x)$ et $u_0(x) = \sum \beta_n\,\psi_n(x)$.

La méthode *des approximations successives* pourra être utilisée pour une équation parabolique ($p = 1$) plus générale que (8) sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}$:
$\widetilde{Lu} = \partial_t u - g^{ij}(t, y)\,\partial_{ij} u = f(t, y, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_{n-1} u)$ où $g^{ij}(t, y)\,\xi_i \xi_j \geq c\,\|\xi\|^2$ pour un réel $c > 0$ indépendant de t et y. Tout d'abord en posant $v(t, y) = u(t, y) - \varphi(y)$ on se ramène à la même question $\tilde{L}v = \tilde{f}(t, y, v, \ldots)$, mais avec une donnée initiale nulle. Ensuite on construit un opérateur $\tilde{K}(y, z, t)$ pour $\tilde{L}$ qui jouera le rôle de $K(y, z, t)$ pour (8), et on prouve une égalité $(\tilde{9})$ telle que (9). Enfin en partant de la fonction $v_0(t, y) \equiv 0$ on construit par récurrence une suite de Cauchy dans un Banach approprié de fonctions sur $[0, \varepsilon] \times \mathbb{R}^{n-1}$ pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit ; pour cela $v_{m+1}(t, y)$ est défini comme égal au second membre de $(\tilde{9})$ avec $\tilde{f}(\tau, z, v_m(\tau, z), \ldots)$ à la place de $\tilde{L}v(\tau, z)$.

Dans la *méthode variationnelle*, on considère une fonctionnelle (s'il en existe une) dont l'équation d'Euler est l'équation à résoudre. Il suffit alors de prouver que la fonctionnelle admet un point critique. Pour illustrer cette voie, on considère l'esp. dit de Sobolev $H_1(\Omega)$ sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à bord $\partial\Omega$ régulier. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur Ω qui appartiennent à $L_2(\Omega)$ ainsi que chacune de ses dérivées premières : $H_1(\Omega)$ est le complété de $\mathscr{E}$ pour la norme $\|u\|_{H_1}^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_2^2$. $\mathscr{D}(\Omega)$ étant l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω, on note $\mathring{H}_1(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H_1(\Omega)$. On peut mettre en évidence un réel λ tel que l'équation $\Delta u + \lambda u = 0$ admette une solution non triviale vérifiant $u|_{\partial\Omega} = 0$. On dira que u vérifie une *condition de Dirichlet* sur le bord lorsqu'on se donne la valeur de u sur le bord. Une *condition de Neumann* est la donnée sur le bord de la dérivée normale de u. Pour cela, on considère la fonctionnelle

$I(u) = \int |\nabla u|^2\,dx / \int u^2\,dx$ et μ l'inf. de $I(u)$ pour $u \in \mathring{H}_1(u)$. $I(u)$ étant homogène, on peut considérer une suite minimisante u_i ($I(u_i) \to \mu$) telle que $\|u_i\|_2 = 1$. Comme H_1 est un Hilbert, la boule unité est faiblement compacte *(Théorème de Banach)*, et comme l'inclusion $H_1 \subset L_2$ est compacte (c.-à-d. la fermeture dans L_2 des bornés de H_1 est compacte) *(Théorème de Kondrakov)*, on montre qu'une sous-suite $\{u_j\} \subset \{u_i\}$ converge vers une fonction $v \in \mathring{H}_1(\Omega)$ qui vérifie $I(v) = \mu$ et $\|v\|_2 = 1$. De cela on déduit que v satisfait au sens des distributions l'équation $\Delta v + \mu v = 0$, d'où $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $v|_{\partial\Omega} = 0$. Comme $\|v\|_2 = 1$, $v \not\equiv 0$ et $\mu = \int |\nabla v|^2\,dx > 0$, μ est la plus petite valeur propre.

On termine par la *méthode de continuité* qui permet de résoudre l'*équation de Monge-Ampère* (11) $\det((\partial_{ij} u)) = f(x)$ sur Ω, $u|\,\partial\Omega = 0$ avec $f(x) > 0$. Sur un ouvert borné strictement convexe $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \varphi(x) < 0\}$, φ étant une fonction strictement convexe. La méthode consiste à choisir une famille d'équations ($t \in [0, 1]$) E_t :
$\det((\partial_{ij} u_t)) = \det((\partial_{ij}\varphi)) + t\,[f(x) - \det((\partial_{ij}\varphi))]$ sur Ω, $u_t|_{\partial\Omega} = 0$, de sorte que E_0 ait une solution connue unique et E_1 soit l'équation (11). Puis on montre que $A = \{t \in [0,1] \,/\, E_t$ a une solution$\}$ est ouvert par le théorème des fonctions inverses et fermé après l'obtention d'estimées a priori (on montre que si u_t existe, dans un « bon » espace, $\|u_t\| \leq c$, constante indépendante de t pour α fixé dans $]0, 1[$). Comme $A \neq \emptyset$ et $[0,1]$ est connexe, $A = [0,1]$ et (11) a une solution.

On étudie ici des opérateurs (linéaires), c'est-à-dire des endomorphismes d'e.v. réels ou complexes de dim. en général infinie, normés, dont les prop. sont plus fortes que celle des opérateurs continus.

Si E est un $\mathbb{K}$-esp. vect. normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), un opérateur f est cont. ssi l'image $f(B)$ de la boule unité fermée B est bornée. L'ens. des opérateurs cont. de E est une sous-algèbre $\mathfrak{L}_c(E)$ de l'algèbre $\mathfrak{L}(E)$ (p. 258).

Si l'on pose $\|f\| = \sup_{x \in B} \|f(x)\|$, on munit $\mathfrak{L}_c(E)$ d'une *norme d'algèbre* telle que :
$\forall (f, g) \in \mathfrak{L}_c(E)^2$ $\|f \circ g\| \leq \|f\|\,\|g\|$.

En dim. finie $\mathfrak{L}_c(E) = \mathfrak{L}(E)$: ce n'est jamais vrai en dim. infinie. B est un fermé borné. Donc en dim. finie B est compacte. En dim. infinie B n'est jamais compacte (Th. de Riesz). On ne peut donc rien dire d'autre a priori, en dim. infinie, de l'image d'un fermé borné par un opérateur cont. si ce n'est qu'elle est bornée. Aussi introduit-on d'autres opérateurs.

Opérateurs compacts

Déf. : Un opérateur du $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E est dit *compact* s'il transforme toute partie bornée de E en un sous-ensemble *relativement compact*, c'est-à-dire dont l'adhérence dans E est compacte.

Th. 1 : *Un opérateur compact est continu (réciproque fausse), et l'ensemble des opérateurs compacts de E est une sous-algèbre* $\mathfrak{L}_k(E)$ *de* $\mathfrak{L}_c(E)$.

Rem. : 1) Plus généralement si f est compact et g continue $f \circ g$ et $g \circ f$ sont compacts.
2) Si E est complet, $\mathfrak{L}_c(E)$ est complet et $\mathfrak{L}_k(E)$ est fermé dans $\mathfrak{L}_c(E)$, donc $\mathfrak{L}_k(E)$ est complet.
3) Si E est de dim. finie $\mathfrak{L}_k(E) = \mathfrak{L}_c(E) = \mathfrak{L}(E)$.

Th. 2 : *Si l est un opérateur compact d'un espace complet E, le sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle de l est de dimension finie.*

La condition « valeur propre non nulle » est fondamentale : l'opérateur nul est compact, et il admet une seule valeur propre, la valeur 0. Le sous-espace propre associé est E tout entier, espace complet dont la dimension est en général infinie.

Opérateurs de rang fini

Déf. : Un opérateur f d'un $\mathbb{K}$-esp. vect. normé E est dit de *rang fini* s'il est cont. et si $f(E)$ est de dim. finie.

Ex. : Si Δ est une droite de E (sous-espace de dim.1), tout supplémentaire H de Δ est un *hyperplan*. Le projecteur p de E sur Δ parallèlement à H est tel que $p(E) = \Delta$: p sera de rang fini si, et seulement si, il est continu. Si p est continu H est fermé car $H = p^{-1}(\{\vec{0}\})$ est l'antécédent d'un fermé. On peut prouver la réciproque.

Th. 3 : *L'ensemble des opérateurs de rang fini de E est une sous-algèbre* $\mathfrak{L}_r(E)$ *de* $\mathfrak{L}_k(E)$.

Rem. : Plus gén. si f est un opérateur de rang fini et g un opérateur cont., $g \circ f$ et $f \circ g$ sont de rang fini.

Les trois propriétés qui suivent concernent l'inversibilité de l'opérateur $Id - f$ ($f \in \mathfrak{L}_c(E)$), et sont généralisables à $Id - \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Elles jouent un rôle fondamental (*cf.* par ex. p. 371) :

Prop. 1 : *Si E est complet, et si* $\|f\| < 1$, *alors* $Id - f$ *est inversible :* $$(Id - f)^{-1} = \sum_{q=0}^{\infty} f^q.$$

Prop. 2 : *Si f est de rang fini et si* $f(\vec{v}) = \vec{v}$ *implique* $\vec{v} = \vec{0}$, *alors* $Id - f$ *est inversible (E complet ou non).*

Prop. 3 : *E étant supposé complet, si f est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini et si* $f(\vec{v}) = \vec{v}$ *implique* $\vec{v} = \vec{0}$, *alors* $Id - f$ *est inversible.*

Certaines des prop. suivantes relèvent des précédentes :
1) Si E est complet, la limite d'une suite d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact tel que tout élément non nul de son spectre est une valeur propre.
2) Si E est préhilbertien et si f est de rang fini, alors f admet un adjoint f^* puisque f est continu : f^* est également de rang fini.
3) Si E est préhilbertien et si f est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini, il en est de même de f^*.
4) Si E est hilbertien et si f est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini, toute valeur propre non nulle de f^* est conjuguée d'une valeur propre de f.

Opérateurs hermitiens

Ce sont les opérateurs auto-adjoints d'un espace préhilbertien en général de dimension infinie.

Th. 4 : *Si l est un opérateur hermitien compact, chaque sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est de dimension finie.*

Th. 5 : *Si l est un opérateur hermitien compact d'un espace hilbertien E, alors l admet au moins une valeur propre de valeur absolue* $\|l\|$. *Toutes les valeurs propres de l appartiennent au segment* $[-\|l\|, \|l\|]$.

Th. 6 : *Si l est un opérateur hermitien compact, l'ensemble de ses valeurs propres est au plus dénombrable et ne peut avoir d'autre point d'accumulation que* 0.

Le théorème général sur l'orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint, associé à ces trois derniers théorèmes, permet d'établir un résultat remarquable concernant un opérateur hermitien compact l d'un espace hilbertien E. On munit chaque sous-espace propre de l associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$ d'une base orthonormale b_λ. La réunion de toutes ces bases b_λ peut être ordonnée en une suite (s) au plus dénombrable de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux. (s) définit le sous-espace F de E, somme directe des sous-espaces propres de l distincts de Ker l. F est inclus dans $l(E)$ puisque tout sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est globalement invariant sous l. Par ailleurs Ker l étant l'antécédent de $\{\vec{0}\}$ sous l, continu, est un fermé dans E. Comme E est complet, Ker l l'est donc aussi. Mais tout sous-espace complet d'un espace préhilbertien admet un (et un seul) supplémentaire orthogonal. On a donc $E = \text{Ker } l \oplus (\text{Ker } l)^\perp$. Enfin le sous-espace orthogonal de toute partie d'un espace préhilbertien étant fermé, on en conclut que $(\text{Ker } l)^\perp$ est fermé, donc complet dans E hilbertien. F étant orthogonal à Ker l, soit parce que Ker $l = \{\vec{0}\}$, soit parce que Ker l est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, on a donc $F \subseteq (\text{Ker } l)^\perp$, donc également $\overline{F} \subseteq (\text{Ker } l)^\perp$. On peut prouver que $\overline{F} = l(E)$, et comme $l(E)$ est isomorphe sous l à tout supplémentaire de Ker l, on a finalement le théorème suivant :

Th. 7 : *Si l est un opérateur hermitien compact d'un espace hilbertien E,* $\overline{l(E)}$ *est l'adhérence de la somme directe des s.e.v. propres de l distincts de* Ker l : $\overline{l(E)}$ *est un s.e.v. complet inclus dans le s.e.v. complet* $(\text{Ker } l)^\perp$ *et lui est isomorphe sous l.*

a) $GL(n, \mathbb{K})$ (*groupe linéaire général*)
b) $SL(n, \mathbb{K}) = \{g \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \det g = 1\}$ (*groupe linéaire spécial*)
c) $O(n, \mathbb{K}) = \{g \in GL(n, \mathbb{K}) \mid {}^t g \cdot g = \mathrm{Id}\}$ (*groupe orthogonal*)
d) $SO(n, \mathbb{K}) = O(n, \mathbb{K}) \cap SL(n, \mathbb{K})$ (*groupe des rotations*)
e) $U(n, \mathbb{C}) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g^* g = \mathrm{Id}\}$ (*groupe unitaire*)
f) $SU(n, \mathbb{C}) = U(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C})$

A

a) $\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{K})$ aussi noté $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$
b) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ = ensemble des matrices de trace nulle
c) $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ = ensemble des matrices antisymétriques
d) idem
e) $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n, \mathbb{C})$ = ensemble des matrices antihermitiennes
f) $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{u}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

B

On désigne par F_n le $\mathbb{R}$-esp. vect. des matrices antisymétriques réelles $n \times n$ $(n > 1)$. Sa dim. est $\frac{1}{2} n(n-1)$.

Quelle que soit $A \in F_n$, iA est hermitienne. Par suite toute valeur propre de A est soit nulle, soit imaginaire pure (p. 261). La matrice $\mathrm{Id} - A$ est donc inversible. On vérifie facilement que $(\mathrm{Id} + A)(\mathrm{Id} - A)^{-1}$ est un élément du groupe de Lie linéaire $O(n, \mathbb{R})$ (résultat dû à Cayley).
L'appl. de F_n dans $O(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto (\mathrm{Id} + A)(\mathrm{Id} - A)^{-1}$ est injective, mais non surjective. D'une manière précise si $\Gamma \in O(n, \mathbb{R})$, l'éq. d'inconnue A, $(\mathrm{Id} + A)(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \Gamma$, admet la seule solution $A = (\Gamma - \mathrm{Id})(\Gamma + \mathrm{Id})^{-1}$, qui est bien un élément de F_n, pourvu que -1 ne soit pas valeur propre de Γ.
A étant fixée non nulle, l'appl. de $\mathbb{R}$ dans $O(n, \mathbb{R})$, $\lambda \mapsto \gamma(\lambda) = (\mathrm{Id} + \lambda A)(\mathrm{Id} - \lambda A)^{-1}$, définit un arc de courbe simple de classe infinie. Au voisinage de $\lambda = 0$, on peut développer $\gamma(\lambda)$ en série entière :
$\gamma(\lambda) = (\mathrm{Id} + \lambda A)(\mathrm{Id} + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots) = \mathrm{Id} + 2\lambda A + 2\lambda^2 A^2 + \ldots$
On a $\gamma(0) = \mathrm{Id}$ et $\gamma'(0) = 2A$. Il s'ensuit que l'espace tangent à $O(n, \mathbb{R})$ en Id contient F_n.
On s'intéresse maintenant à l'application $A \mapsto \exp A$:

1) $n = 2$: $A = aJ$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On voit aisément que $\exp A = \mathrm{Id} \cos a + J \sin a$,

soit $\exp A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$. Si A parcourt F_2, $\exp A$ décrit $SO(2, \mathbb{R})$.

2) $n > 2$: On a ${}^t(\exp A) = \exp({}^t A) = \exp(-A)$, soit ${}^t(\exp A) \exp A = \mathrm{Id}$ puisque A et $-A$ commutent. D'où $\exp A \in O(n, \mathbb{R})$. Mais F_n étant connexe, et $A \mapsto \exp A$ étant continue, $\det(\exp A)$ décrit un connexe de $\{1, -1\}$ contenant $\det(\exp 0) = 1$.
Par suite $\forall A$ $\det(\exp A) = +1$, et $\exp A \in SO(n, \mathbb{R})$.

On peut démontrer que l'appl. $A \mapsto \exp A$ est surj. de F_n sur $SO(n, \mathbb{R})$ en réduisant l'endomorphisme normal (p. 261), ici réel, qu'est tout élément de $SO(n, \mathbb{R})$.
L'image de F_n par exp est donc $SO(n, \mathbb{R})$, qui est le plus grand voisinage connexe de Id dans $O(n, \mathbb{R})$.
Finalement la dim. de l'espace tangent en Id à $O(n, \mathbb{R})$ est celle de F_n, et cet espace tangent est F_n.

C

Étude d'un exemple illustrant le premier théorème de Lie supposé connu

Introduction

Les groupes de Lie sont des ensembles munis de deux types de structures : une structure algébrique (celle de groupe), et une structure géométrique (celle de variété) ; la structure résultante est suffisamment riche pour permettre une classification (partielle) des objets étudiés ; par ailleurs elle conduit à des résultats inattendus : par exemple toute application multiplicative et continue entre deux groupes de Lie est automatiquement indéfiniment différentiable ; mais elle est d'un maniement difficile, utilisant des techniques aussi bien analytiques qu'algébriques ; pour remédier à cet inconvénient, on associe à chaque groupe de Lie un objet purement algébrique, son algèbre de Lie, qui reflète assez bien les propriétés du groupe de Lie.
On examinera d'abord les groupes de Lie linéaires, dont l'étude est plus élémentaire que celle des groupes de Lie généraux.

Groupes de Lie linéaires

Notations : on notera $\mathbb{K}$ le corps des réels ou celui des complexes et, pour tout entier $n > 0$, $M(n, \mathbb{K})$ (resp. $GL(n, \mathbb{K})$) l'espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (resp. le groupe multiplicatif des matrices inversibles). Par ailleurs on désignera par exp l'application de $M(n, \mathbb{K})$ dans $GL(n, \mathbb{K})$ définie par :

$$X \to \exp X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Déf. : On appelle *groupe de Lie linéaire* tout sous-groupe fermé d'un groupe $GL(n, \mathbb{K})$.

Ex. : Voir tab. A.

Algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire

Déf. : Une *algèbre de Lie* est un espace vectoriel réel de dimension finie E muni d'une application bilinéaire $E \times E \to E$, notée $(X, Y) \to [X, Y]$, vérifiant les deux conditions suivantes :
(i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*antisymétrie*)
(ii) $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ (*identité de Jacobi*).

Ex. : Toute algèbre associative devient une algèbre de Lie pour l'application $[X, Y] = XY - YX$.

Déf. : Soit $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ un groupe de Lie linéaire. On note $\mathfrak{g}$ l'espace tangent à G en l'élément neutre Id : c'est l'ensemble des éléments $\gamma'(0) \in M(n, \mathbb{K})$ où γ est une application différentiable d'un intervalle $]-a, a[$ dans G vérifiant $\gamma(0) = \mathrm{Id}$.

Th. : (i) $\mathfrak{g}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $M(n, \mathbb{K})$ *considéré comme espace vectoriel réel.*
(ii) *On a* $gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$ *pour tout* $X \in \mathfrak{g}$ *et tout* $g \in G$.
(iii) *L'application* exp *envoie* $\mathfrak{g}$ *dans* G.
(iv) *L'application* exp *induit une bijection (et même un difféomorphisme) d'un voisinage de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$ *sur un voisinage de* Id *dans* G.

Dém. : on démontrera seulement (i) et (ii).
Si $X = \gamma'(0) \in \mathfrak{g}$, pour tout réel k on a $kX = \zeta'(0)$ où $\zeta(t) = \gamma(kt)$.
Si $X = \gamma'(0)$ et $Y = \eta'(0)$, on a $X + Y = (\gamma\eta)'(0)$.
Si $X = \gamma'(0)$ et $g \in G$, on a $gXg^{-1} = \zeta'(0)$ où $\zeta(t) = g\gamma(t)g^{-1}$.
Si $X \in \mathfrak{g}$ et $Y = \eta'(0)$, on a $[X, Y] = \zeta'(0)$ où $\zeta(t) = \eta(t) \cdot X \cdot \eta(t)^{-1}$.

Cor. (de l'assertion (iv).) : *Le groupe de Lie G est une sous-variété de* $M(n, \mathbb{K})$ *et l'application* exp *en est une carte locale au voisinage de* Id.

Pour obtenir une carte locale au voisinage d'un élément quelconque g_0, il suffit de faire la translation $g \to g g_0$.

Ex. : Voir tab. B.

Groupes de Lie généraux

Déf. : Un *groupe de Lie* est un groupe G muni d'une structure de variété C^∞ de façon que les applications $(g, h) \to gh$ et $g \to g^{-1}$ soient C^∞.

On notera A l'algèbre des fonctions réelles C^∞ sur G.

Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

On note $\mathfrak{g}$ l'espace vectoriel réel tangent à G en l'élément neutre Id ; c'est l'ensemble des formes linéaires X sur A vérifiant la relation :
$\forall \varphi, \psi \in A \quad \langle X, \varphi\psi \rangle = \varphi(\mathrm{Id}) \cdot \langle X, \psi \rangle + \psi(\mathrm{Id}) \cdot \langle X, \varphi \rangle$
Si γ est une application différentiable d'un intervalle $]-a, a[$ dans G vérifiant $\gamma(0) = \mathrm{Id}$, on définit $\gamma'(0) \in \mathfrak{g}$ par $\langle \gamma'(0), \varphi \rangle = (\varphi \circ \gamma)'(0)$.
On définit une action, dite *adjointe* et notée Ad, de G dans A par :
$\forall \varphi \in A, g, h \in G, \quad (\mathrm{Ad}\, g \cdot \varphi)(h) = \varphi(g^{-1} h g)$,
puis une action de G dans $\mathfrak{g}$ par :
$\langle \mathrm{Ad}\, g \cdot X, \varphi \rangle = \langle X, \mathrm{Ad}\, g^{-1} \cdot \varphi \rangle$;
alors $\mathrm{Ad}\, g \cdot \gamma'(0) = \zeta'(0)$ où $\zeta(t) = g \cdot \gamma(t) \cdot g^{-1}$.
Cette application Ad est une application C^∞ de G dans l'espace vectoriel End $\mathfrak{g}$; on note ad sa différentielle en l'élément Id, application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans End $\mathfrak{g}$; enfin on munit $\mathfrak{g}$ d'une structure d'algèbre de Lie en posant : $\forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad [X, Y] = \mathrm{ad}\, X \cdot Y$.

Application exponentielle

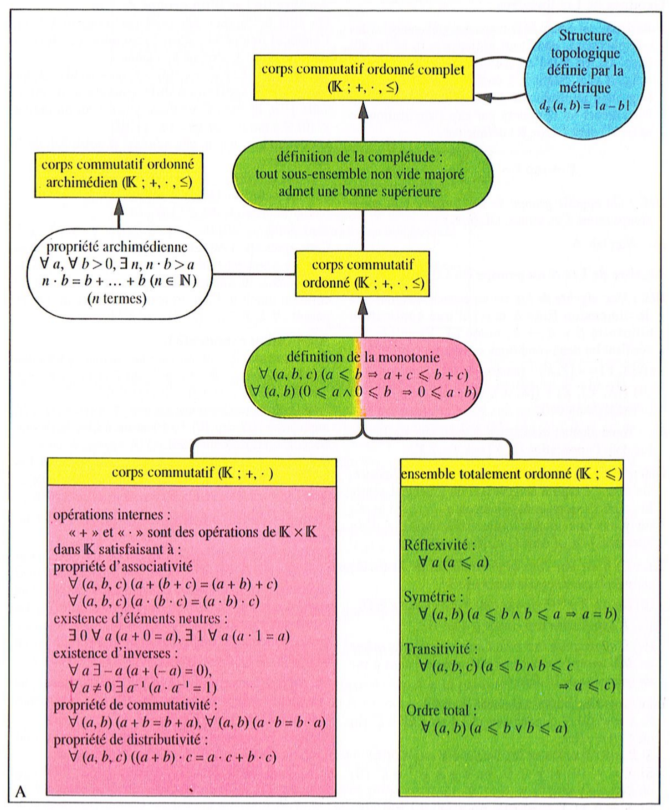
Th. : *Pour tout* $X \in \mathfrak{g}$, *il existe une unique application différentiable* $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ *telle que l'on ait* $\gamma'_X(0) = X$ *et* $\forall s, t \in \mathbb{R}$ $\gamma_X(s + t) = \gamma_X(s) \cdot \gamma_X(t)$.

Pour le démontrer, on remarque que $\gamma(s + t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t)$ implique $\gamma'(t) = \gamma'(0) \cdot \gamma(t)$ et on utilise la théorie des équations différentielles.
On définit alors l'application exp : $\mathfrak{g} \to G$ par $\exp X = \gamma_X(1)$; c'est une application C^∞ dont la différentielle en 0 est l'identité (cela résulte de ce que $\gamma_{\lambda X}(t) = \gamma_X(\lambda t)$).

Groupes de Lie admettant une algèbre de Lie donnée

On démontre (troisième théorème de Lie) que, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe des groupes de Lie G admettant $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie ; parmi eux, un et un seul est connexe et simplement connexe, soit G_0 ; les autres sont exactement les quotients de G_0 par les sous-groupes discrets du centre $C(G_0)$ de G_0 ; si G_0/Γ est un tel groupe, son groupe fondamental est isomorphe à Γ.

Ex. : a) $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ avec $\forall X, Y \in \mathbb{R}$ $[X, Y] = 0$. Alors G_0 est le groupe additif $\mathbb{R}$; les autres sont tous isomorphes au tore $\mathbb{T}$.
b) $\mathfrak{g}$ = ensemble des matrices $\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où u et v sont réels. Alors G_0 est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$; $C(G_0)$ est trivial, G_0 est le seul groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
c) $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$; alors $G_0 = SU(2, \mathbb{C})$ (qui est connexe et simplement connexe car homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^3$) ; $C(G_0)$ est formé de Id et $-$Id ; l'unique autre groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est donc $SU(2, \mathbb{C})/\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$; il est isomorphe à $SO(3, \mathbb{R})$. Ces deux groupes jouent un rôle fondamental dans la théorie du spin en Mécanique quantique.
d) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$; alors G_0 est difficile à décrire car ce n'est pas un groupe linéaire ; son centre est isomorphe à $\mathbb{Z}$; $G_0/2\mathbb{Z}$ n'est autre que $SL(2, \mathbb{R})$; $G_0/\mathbb{Z}$ est le groupe de Lorentz restreint à trois dimensions d'espace-temps.
e) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$; alors $G_0 = SL(2, \mathbb{C})$; $C(G_0)$ est formé de Id et $-$Id, $SL(2, \mathbb{C})/\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ est le groupe de Lorentz restreint à quatre dimensions d'espace-temps.



Définition d'un corps commutatif ordonné complet

Quels que soient $a, b, c \in \mathbb{K}$:

$a\leq b \Rightarrow a+c\leq b+c$	$a<b \Rightarrow a+c<b+c$	$0\leq \lvert a\rvert$
$a+c\leq b+c \Rightarrow a\leq b$	$a+c<b+c \Rightarrow a<b$	$a\leq \lvert a\rvert$
$a\leq b\wedge 0\leq c \Rightarrow a\cdot c\leq b\cdot c$	$a<b\wedge 0<c \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$	$-\lvert a\rvert\leq a$
$a\leq b\wedge c\leq 0 \Rightarrow a\cdot c\geq b\cdot c$	$a<b\wedge c<0 \Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$	$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$
$a\cdot c\leq b\cdot c\wedge 0<c \Rightarrow a\leq b$	$a\cdot c<b\cdot c\wedge 0<c \Rightarrow a<b$	$\lvert a\rvert^2 = a^2$
$a\cdot b\leq b\cdot c\wedge c<0 \Rightarrow a\geq b$	$a\cdot c<b\cdot c\wedge c<0 \Rightarrow a>b$	$\lvert a\cdot b\rvert = \lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$
$a\leq b\wedge c\leq d \Rightarrow a+c\leq b+d$	$a\leq b\wedge c<d \Rightarrow a+c<b+d$	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}\ (b\neq 0)$
$0\leq a\leq b\wedge 0\leq c\leq d \Rightarrow a\cdot c\leq b\cdot d$	$0\leq a<b\wedge 0\leq c<d \Rightarrow a\cdot c<b\cdot d$	$\lvert a\pm b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$
$a\cdot b>0 \Leftrightarrow a>0\wedge b>0 \vee a<0\wedge b<0$	$a\cdot b<0 \Leftrightarrow a>0\wedge b<0 \vee a<0\wedge b>0$	$\lvert a\pm b\rvert \geq \lvert a\rvert - \lvert b\rvert$
		$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert = 0 \Leftrightarrow a=0\wedge b=0$

B

Règles de calcul dans un corps ordonné

A la base de l'*analyse réelle*, on trouve la structure multiple de l'ensemble des nombres réels (p. 37) (noté $\mathbb{R}$ pour $\mathbb{R}^1$). Sur $\mathbb{R}$ on peut en effet définir une structure algébrique, une structure d'ordre et une structure topologique. La structure topologique permet d'introduire la notion de *processus limite* (convergence de suites et de séries, limites de fonctions etc.). L'introduction des deux autres structures permet de traiter ces processus limites par le calcul.

Structure algébrique de ℝ

La structure algébrique de $\mathbb{R}$ est celle d'un *corps* commutatif (ill. A ; pp. 41, 59 sqq.). L'inversion des opérations d'addition et de multiplication permet de définir respectivement la soustraction et la division. On en déduit les règles de calcul habituelles sur les réels (p. 59 sqq.).

Structure d'ordre de ℝ

$\mathbb{R}$ ordonné grâce à la relation d'ordre total « ≤ » (soit $(\mathbb{R};\leq)$) est un ensemble totalement ordonné (ill. A ; pp. 43, 59 sqq.). La relation d'ordre stricte « < » correspondant à « ≤ », est définie par : $a<b :\Leftrightarrow a\leq b$ et $a\neq b$ (p. 43).

La structure d'ordre est compatible avec la structure algébrique car l'addition et la multiplication satisfont aux propriétés de monotonie (ill. A). Ainsi, $(\mathbb{R};+,\cdot,\leq)$ a la structure d'un *corps ordonné*.

Rem. : Quelques règles de calcul pour les inéquations sont données dans le tableau B. On rappelle la définition de la *valeur absolue* : $|a| := \begin{cases} a \text{ pour } a\geq 0 \\ -a \text{ pour } a<0 \end{cases}$

Par ailleurs, $(\mathbb{R};+,\cdot,\leq)$ admet d'autres propriétés liées à son ordre total. Comme son sous-corps ordonné $(\mathbb{Q};+,\cdot,\leq)$ (p. 57), $(\mathbb{R};+,\cdot,\leq)$ est ordonné de façon archimédienne, car :

Prop. 1 : *Quels que soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}^*_+$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\cdot b>a$.*

Conséquences :

(a) Quel que soit $a\in\mathbb{R}$ il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $n>a$.

(b) Quel que soit $b\in\mathbb{R}^*_+$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n}<b$.

(c) Quels que soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$ il existe $q\in\mathbb{Q}$ tel que $a<q<b$.

La véritable différence structurelle entre $(\mathbb{Q};+,\cdot,\leq)$ et $(\mathbb{R};+,\cdot,\leq)$ réside, grâce au processus de complétion (p. 59 sqq.), dans le fait que la prop. suivante sur *la borne supérieure (inférieure)* est valable dans $(\mathbb{R};+,\cdot,\leq)$ mais non dans $(\mathbb{Q};+,\cdot,\leq)$.

Prop. 2 : *Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée (minorée) admet une borne supérieure (inférieure).*

$(\mathbb{R};+,\cdot,\leq)$ satisfait ainsi à la déf. d'un *corps complet et ordonné* (ill. A). L'étude de ce type de structure montre que tout corps complet et ordonné se ramène à un isomorphisme près à $(\mathbb{R};+,\cdot,\leq)$. Ce résultat est remarquable car il permet de pratiquer l'analyse réelle avec les axiomes d'un corps complet et ordonné, sans avoir à se référer constamment à la construction particulière des nombres réels.

Structure topologique de ℝ

On définit une métrique sur $\mathbb{R}$ grâce à la distance $d_E(a,b) := |a-b|$ (pp. 51 et 217). Ainsi $(\mathbb{R}, d_E)$ est un espace métrique. La topologie $\mathfrak{R}$ induite par cette métrique (appelée aussi *topologie naturelle* de $\mathbb{R}^1$, p. 215) est à la base de l'analyse réelle.

Un élément de $\mathfrak{R}$ est un ouvert qui, lorsqu'il n'est pas vide, est un sous-ensemble O de $\mathbb{R}$ ayant la propriété : quel que soit $x\in O$, il existe $\varepsilon>0$ tel que la boule de rayon ε et de centre x soit contenue dans O. Une boule ouverte de centre x et de rayon ε $(\varepsilon>0)$ est ici l'intervalle ouvert $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, encore appelé ε-voisinage. Comme l'ensemble des boules ouvertes est une base de $\mathfrak{R}$ (p. 217), on peut représenter toute partie ouverte non vide comme une réunion de boules ouvertes.

Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un ouvert contenant l'élément x est un voisinage de x (p. 215). Il suffit cependant de considérer l'ensemble des boules ouvertes contenant x (ici les intervalles ouverts) pour constituer une base de voisinages de x. L'ensemble de ces intervalles dont les extrémités appartiennent à $\mathbb{Q}$ forme même une base dénombrable de voisinages de x.

$(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ est un espace topologique connexe, localement compact (mais non compact) (pp. 223 et 227) et en particulier un espace de Hausdorff (p. 227), c.-à-d. que deux réels distincts possèdent des voisinages disjoints (et même des ε-voisinages disjoints). Cette propriété de séparation garantit l'unicité de la limite d'une suite convergente.

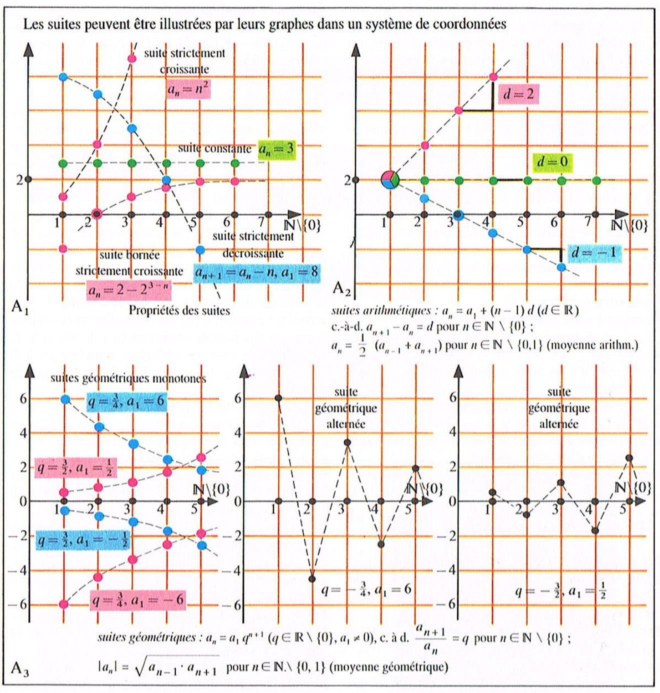
Les définitions de concepts topologiques importants comme point adhérent, point extérieur, point intérieur, point isolé, point frontière, point d'accumulation, ensemble fermé, fermeture $\overline{A}$ d'un ensemble A, intérieur $\mathring{A}$, et frontière ∂A se trouvent pp. 211, 213, 214.

Si l'on opère sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, comme par exemple des intervalles bornés, il faut utiliser la topologie induite (pp. 209 et 219).

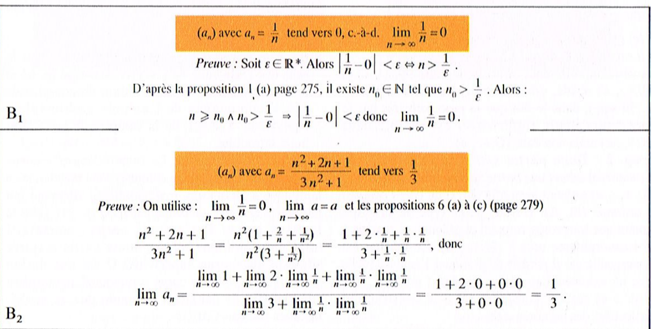
En ajoutant la structure algébrique, $(\mathbb{R};+,\cdot,\mathfrak{R})$ satisfait à la déf. d'un *corps topologique*. Les deux structures algébrique et topologique sont compatibles car les opérations internes sont continues (la structure topologique sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est alors la topologie produit, p. 221).

Rem. : $(\mathbb{R};+,\cdot,\leq,\mathfrak{R})$ est également complet dans le sens que toute suite de Cauchy converge (p. 61 et p. 279, propriété 7). Cette notion de complétude est, accompagnée de l'axiome archimédien, équivalente à la déf. de la complétude précédemment introduite.

Note des traducteurs : La terminologie « corps complet » (fin de première colonne) a été maintenue en hommage à Dedekind, mathématicien allemand qui introduisit la notion de coupure dans $\mathbb{Q}$ (p. 59). Dans le langage actuel il s'agit de corps commutatif totalement ordonné tel que toute partie majorée admette une borne supérieure. C'est une notion équivalente à celle du corps commutatif archimédien complet (fin de deuxième colonne) due au mathématicien français Cauchy.



Suites



Preuve de la convergence, détermination de la valeur limite (voir page 279)

Suites

Déf. 1 : Toute application de $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ou d'un ensemble qui lui est équipotent (cf. p. 47) dans un ensemble E est appelée *suite*. Au lieu d'écrire : $f : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to E$ définie par $n \mapsto f(n) = a_n$, on note la suite plus simplement $(a_1, a_2, \ldots)$ ou encore (a_n).
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ s'appelle une *suite finie*.

Rem. : Au lieu de $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on peut donc choisir pour indicer la suite, par exemple $\mathbb{N}$, ou toute partie infinie de $\mathbb{N}$ ou encore $\mathbb{Z}$. *L'ensemble des images d'une suite* est à distinguer de la suite elle-même. Par exemple, la suite (1, 2, 1, 2, …) admet pour ensemble des images {1, 2}.

Pour l'analyse réelle, ce sont les *suites à valeurs réelles* qui sont importantes, c.-à-d. les suites pour lesquelles $E = \mathbb{R}$. A partir de maintenant, sauf indication particulière, les suites considérées seront toujours à valeurs réelles.

Déf. 2 : (a_n) est *constante* si $\forall n,\ (a_n = a_{n+1})$.
(a_n) est *croissante* si $\forall n,\ (a_n \leq a_{n+1})$.
(a_n) est *strictement croissante* si $\forall n,\ (a_n < a_{n+1})$.
(a_n) est *décroissante* si $\forall n,\ (a_n \geq a_{n+1})$.
(a_n) est *strictement décroissante* si $\forall n,\ (a_n > a_{n+1})$.
(a_n) est *monotone* si elle est croissante resp. décroissante.
(a_n) est *majorée (minorée)* lorsqu'il existe une borne supérieure (inférieure) à l'ensemble des images de la suite (p. 45). Une suite majorée et minorée est dite *bornée*.

Exemples : ill. A.

Suites convergentes

Parmi les suites, il y en a certaines dont les éléments « tendent » vers un nombre réel bien défini, lorsque l'indice croît. Par exemple, $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ tend vers 0, $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$ tend vers 1. Ce comportement de certaines suites, nommé convergence, est défini grâce à la structure topologique de $\mathbb{R}$.

Déf. 3 : Une suite (a_n) est dite *convergente* (vers $a \in \mathbb{R}$) lorsqu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour toute boule ouverte contenant a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que tous les éléments a_n de la suite appartiennent à cette boule pour $n \geq n_0$. a est la valeur limite de la suite (symboliquement, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$).

Une suite non convergente est dite *divergente*.
Comme l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ est de HAUSDORFF (p. 227) on en déduit :

Prop. 1 : *Toute suite possède au plus une valeur limite.*

Rem. : Une suite converge aussi vers a si quel que soit l'intervalle ouvert contenant a, le nombre des valeurs de n tel que a_n soit extérieur à cet intervalle est fini.

En utilisant la structure algébrique et la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$, on obtient :

Prop. 2 : (a_n) *converge vers* $a \in \mathbb{R}$ *si quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|a_n - a| < \varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_0$.

On ne peut prouver la convergence d'une suite à l'aide de la prop. 2 que lorsque la valeur de la limite est déductible de la structure de la suite (ex. : tab. B_1). Pour prouver la convergence d'une suite sans connaissance de la valeur de la limite, on peut utiliser le critère de convergence de CAUCHY (p. 279).

Les suites convergentes sont bornées. Il existe cependant des suites bornées non convergentes comme par exemple (1, -1, 1, -1, …). Les suites non bornées sont divergentes. Parmi celles-ci on distingue en particulier celles qui satisfont à : quel que soit $a \in \mathbb{R}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n > a$ (respectivement $a_n < a$) pour tout $n \geq n_0$. Ces suites sont appelées *suites fortement divergentes*, et on écrit alors $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (respectivement $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$). L'ill. A en contient des exemples, comme les *suites arithmétiques* avec $d \neq 0$ ou les *suites géométriques* avec $q > 1$.

Rem. : Le comportement de convergence de la suite ne change pas lorsqu'on la modifie, pourvu que ces modifications n'affectent pas la suite à partir d'un indice *fini* (on peut enlever des termes, en rajouter, en modifier, ou en permuter).

Sous-suite, valeur d'adhérence d'une suite

Déf. 4 : $(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots)$ est une *sous-suite* de la suite (a_n) si les a_{i_j}, appartiennent à la suite (a_n) et si $i_1 < i_2 < i_3 \ldots$.

Toute sous-suite d'une suite convergeant vers a converge également vers a. Par contre, une sous-suite d'une suite divergente peut converger. Pour une suite bornée, on montre d'ailleurs qu'il existe toujours une sous-suite convergente (voir ci-dessous).

Déf. 5 : $a \in \mathbb{R}$ est dit *valeur d'adhérence* de la suite (a_n) si celle-ci contient une sous-suite convergeant vers a.

Les suites convergentes possèdent ainsi une et une seule valeur d'adhérence (la limite). Les suites qui n'ont aucune valeur d'adhérence ou plus de deux sont divergentes. Il existe cependant des suites divergentes avec une seule valeur d'adhérence comme par exemple $(2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4} \ldots)$. La divergence de cette suite est due au fait qu'elle n'est pas bornée.
En effet,

Prop. 3 : *Une suite est convergente si elle est bornée et si elle possède une seule valeur d'adhérence. La limite s'identifie alors à la valeur d'adhérence.*

Pour prouver cette propriété on utilise :

Th. de BOLZANO-WEIERSTRASS : *Toute suite bornée possède une valeur d'adhérence.*

Pour prouver ce th., on peut utiliser la prop. suivante :

Prop. 4 : $a \in \mathbb{R}$ *est valeur d'adhérence de la suite* (a_n) *si pour tout voisinage v de a, il existe une infinité d'indices i tels que* $a_i \in V$.

Rem. : On utilise souvent l'énoncé de la prop. 4 comme déf. d'une valeur d'adhérence. Ce concept doit être distingué de celui de *point d'accumulation d'un ensemble* (p. 214). Bien que tout point d'accumulation de l'ensemble des images d'une suite soit valeur d'adhérence de la suite, l'inverse est faux, comme par ex. pour la suite (1, -1, 1, -1, …).

La suite définie par $c_{n+1} = \frac{1}{2}\left(c_n + \frac{r}{c_n}\right)$ avec $c_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tend vers $\sqrt{r}$

Preuve : comme pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{2}(a+b) \geqslant \sqrt{ab}$, on en déduit $c_{n+1} \geqslant \sqrt{c_n \cdot \frac{r}{c_n}} = \sqrt{r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, on montre par ailleurs que $c_{n+1} \leqslant \sqrt{r} + \frac{c_1}{2^n}$. Donc $\sqrt{r} \leqslant c_{n+1} \leqslant \sqrt{r} + \frac{c_1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la proposition 6 (f) on en déduit que $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \sqrt{r}$.

Remarque : Grâce à la suite (c_n) on peut approcher la valeur d'une racine carrée à l'aide d'une calculatrice.

A

Approximation des racines carrées

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pour $|q| < 1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0 \quad (k \in \mathbb{N}, |q| < 1)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

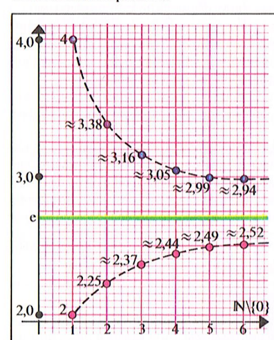
(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{Q}_+^*)$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

B

Valeurs limites importantes



I. La suite (a_n) définie par $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est convergente.

Preuve : On montre qu'elle est majorée et croissante.
Par la formule du binôme

$$a_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Puis pour $n \geqslant 2$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geqslant \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{n}{n^2}\right) = 1,$$

en utilisant l'inégalité de Bernoulli $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$ valable pour $x \geqslant -1$, $\alpha \geqslant 1$.
La suite (a_n) converge donc. Sa limite notée e est le nombre de NEPER.

II. $([a_n, b_n])$ avec $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ est une suite de segments emboîtés contenant e.

Preuve : D'après I., (a_n) est croissante. De même on montre que (b_n) est décroissante. La suite $(b_n - a_n)$ des longueurs des intervalles tend vers 0, car :
$0 < b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < 3 \cdot \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Remarque : Ces intervalles emboîtés ne sont pas très adaptés au calcul numérique du nombre e, car ce procédé « ne converge que lentement ». Dans la pratique on utilise le développement en série entière de l'exponentielle (page 309).

C

Nombre de NEPER e

(1) $\sum\limits_{v=1}^{n} (a_1 + (v-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ *série arithmétique finie*

(2) $\sum\limits_{v=1}^{n} a_1 q^{v-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$ *série géométrique finie*

(3) $\sum\limits_{v=1}^{n} v = \frac{n}{2}(n+1)$

(4) $\sum\limits_{v=1}^{n} v^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

(5) $\sum\limits_{v=1}^{n} v^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$

(6) $\sum\limits_{v=1}^{n} (a_v \pm b_v) = \sum\limits_{v=1}^{n} a_v \pm \sum\limits_{v=1}^{n} b_v$

(7) $\sum\limits_{v=1}^{n} a \cdot a_v = a \cdot \sum\limits_{v=1}^{n} a_v \quad (a \in \mathbb{R})$

(8) $\sum\limits_{v=1}^{n} a = n \cdot a \quad (a \in \mathbb{R})$

D

Exemples de séries finies, règles de calcul

Limite inférieure, limite supérieure d'une suite

Dans le cas d'une suite convergente, on peut approcher la valeur limite avec autant de précision que l'on veut. Pour une suite bornée, on peut aussi approcher toutes les valeurs d'adhérence grâce à des sous-suites. Si H est l'ensemble des valeurs d'adhérence de (a_n), il admet une borne supérieure et une borne inférieure appelées également *limites supérieure* et *inférieure* de la suite (notées $\overline{\lim}\, a_n$ et $\underline{\lim}\, a_n$). Ces valeurs satisfont aux conditions suivantes : quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

(1) $a_n < \overline{\lim}\, a_n + \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$,

(2) $\overline{\lim}\, a_n - \varepsilon < a_n$ pour une infinité d'indices n,

(3) $\underline{\lim}\, a_n - \varepsilon < a_n$ pour tout $n \geq n_0$,

(4) $a_n < \underline{\lim}\, a_n + \varepsilon$ pour une infinité d'indices n.

Rem. : Dans le cas de suites convergentes, la limite supérieure, la limite inférieure et la valeur limite de la suite s'identifient.

Critères de monotonie

Les graphes de suites bornées et monotones semblent indiquer que ces suites convergent toujours. On montre effectivement :

Prop. 5 : *Une suite bornée, monotone croissante (monotone décroissante) converge vers la borne supérieure (inférieure) de l'ensemble des images de la suite.*

Pour le prouver, on utilise la «prop. de la borne supérieure (inférieure)» (prop. 2, p. 275).
Application : ill. C, I.

Propriétés des valeurs limites

Souvent on parvient à trouver les limites de certaines suites à partir de suites déjà étudiées. Pour cela, on peut utiliser les prop. suivantes :

Prop. 6 : Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. On a alors :

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *si* $b_n \neq 0$ *pour tout n et si* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, *si* $a_n \geq 0$ *pour tout n,*

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} a_n|$,

(f) *Si les deux suites* (a_n) *et* (b_n) *convergent toutes deux vers a, toute suite* (c_n) *telle que* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *pour tout* $n \geq n_0$ *converge vers a.*

(g) *Si* (a_n) *converge vers 0 et si* (b_n) *est bornée, alors* $(a_n \cdot b_n)$ *converge vers 0.*

Comme on peut décrire la suite $(a \cdot a_n)$ comme la suite produit de la suite constante $(a, a, \ldots)$ et de la suite (a_n), on obtient immédiatement pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour toute suite convergente (a_n) :

$$\lim_{n\to\infty}(a \cdot a_n) = a \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Ex. d'application : ill. A et B_2, p. 276. Quelques valeurs limites importantes sont données par le tab. B.

Intervalles emboîtés

Déf. 6 : Une suite $([a_n, b_n])$ d'intervalles fermés s'appelle *suite d'intervalles emboîtés* si (a_n) croît strictement, si (b_n) décroît strictement, et si la suite des longueurs des intervalles $(b_n - a_n)$ converge vers 0.

Si l'on applique la prop. 5, on montre que (a_n) et (b_n) convergent. Comme $(b_n - a_n)$ converge vers 0, leurs limites sont égales. La limite commune est le seul nombre réel qui appartienne à tous les intervalles. Toute suite d'intervalles emboîtés définit ainsi un nombre réel unique.
Exemple : ill. C, II.

Critère de convergence de CAUCHY

La preuve de la convergence d'une suite sans que l'on connaisse la valeur de la limite est rendue possible par la prop. suivante :

Prop. 7 (critère de convergence de CAUCHY) : *Une suite* (a_n) *est convergente si, et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|a_n - a_m| < \varepsilon$ *pour tous* $m, n \geq n_0$.

Rem. : On retrouve ici que $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ est complet.

Séries

La somme d'une suite finie $(a_1, \ldots, a_n)$, notée

$s_n = \sum\limits_{v=1}^{n} a_v = a_1 + \ldots + a_n$, s'appelle *série finie*.

L'ill. D contient des exemples de séries et des règles de calcul utiles.
Si l'on choisit une suite infinie (a_n), alors la somme de la suite $a_1 + a_2 + \ldots$ n'est pas définie algébriquement, car le nombre de termes est infini. Pour obtenir une déf. correcte, on définit la suite des *sommes partielles* (s_n), avec
$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$
Ainsi :

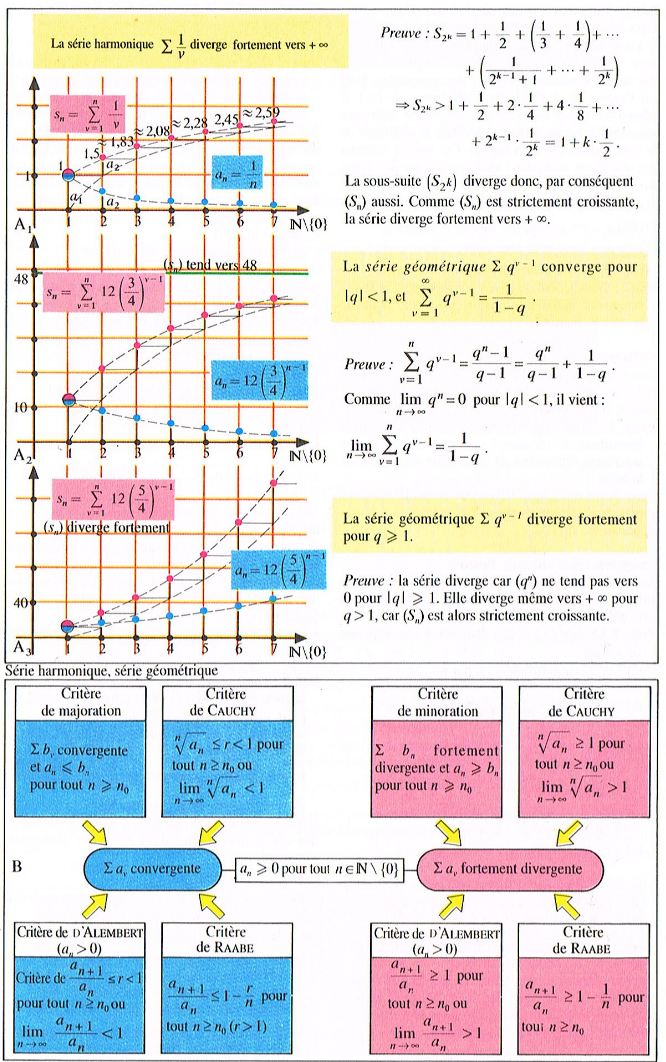
Déf. 7 : La suite des sommes partielles (s_n) associée à la suite (a_n) se nomme *série infinie* (ou *série*). On peut noter à la place de (s_n) $a_1 + a_2 + \ldots$ ou simplement $\Sigma\, a_v$. Si la suite (s_n) *converge*, alors sa limite est nommée *somme de la série* et est notée $\sum\limits_{v=1}^{\infty} a_v$. On dit alors que la suite (a_n) est *sommable*.

Outre les séries convergentes, il existe évidemment des séries divergentes dont certaines divergeant fortement.
Exemples : p. 280, ill. A.
Comme la théorie des suites est également applicable aux séries, on peut écrire d'après la prop. 7 :

Prop. 8 (critère principal de convergence) : $\Sigma\, a_v$ *converge si, et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_0$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Une conséquence directe de la prop. 8 est $(k = 0)$:

Prop. 9 : *Si la série* $\Sigma\, a_v$ *converge,* (a_n) *converge vers* 0.
Cette prop. donne une condition *nécessaire* mais *non suffisante* pour la convergence des séries (comparer avec la série harmonique, p. 280, ill. A_1).



Série harmonique, série géométrique

Critères de convergence pour séries à termes positifs

La preuve de la convergence d'une série à l'aide de la prop. 8 est souvent complexe, d'où le développement de critères de convergence suffisants pour des séries particulières.

Critères pour des séries à termes positifs

Pour des séries à termes tous positifs, (s_n) est strictement croissante, c.-à-d. que $\Sigma\, a_\nu$ est soit convergente, soit fortement divergente vers $+\infty$. A l'aide de la prop. 5, on obtient :

Prop. 10 : *Une série à termes positifs converge si, et seulement si, (s_n) est majorée.*

Application : $\sum \frac{1}{\nu!}$ converge car

$$s_n \le 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} < 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Une méthode importante pour montrer la convergence ou la divergence d'une série est la *comparaison des séries*. On utilise le **critère de majoration** ou **de minoration** (ill. B).

Ainsi, par exemple, en comparant la *série harmonique généralisée* $\sum \frac{1}{\nu^r}$ à la série harmonique $\sum \frac{1}{\nu}$ qui est fortement divergente (ill. A_1), on montre qu'elle diverge fortement pour $r \le 1$. Par contre, elle converge pour $r > 1$ d'après :

Prop. 11 (suites spéciales de CAUCHY) : *Si (a_n) est une suite strictement décroissante positive, alors $\Sigma\, a_\nu$ converge si, et seulement si, $\Sigma\, 2^\nu a_{2^\nu}$ converge.*

De la comparaison d'une série avec la série géométrique on déduit le **critère de la racine nième de CAUCHY** et **le critère du quotient de D'ALEMBERT** (ill. B). On notera que le cas $r = 1$ n'est pas indiqué car il ne permet pas de conclure.

De la comparaison d'une série avec la série harmonique généralisée on déduit le **critère de RAABE** (ill. B).

Rem. : Le *critère intégral de CAUCHY* est aussi très utile (p. 341).

Séries alternées

Si (a_n) est une suite de termes alternativement positifs et négatifs, alors la série correspondante est dite *alternée*.

Prop. 12 (critère de LEIBNIZ) : *Une série alternée converge si $(|a_n|)$ décroît et tend vers* 0.

Application : $\sum (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\nu}$ converge.

Séries absolument convergentes

Pour des séries plus générales (termes de signes quelconques), on cherche à se ramener aux propositions concernant les séries à termes positifs pour étudier la convergence. Cela revient donc à s'intéresser à la série $\Sigma\, |a_\nu|$, car

Prop. 13 : *Si $\Sigma\, |a_\nu|$ converge, alors $\Sigma\, a_\nu$ aussi.*

Dans le cas où $\Sigma\, |a_\nu|$ converge, on dit que $\Sigma\, a_\nu$ est *absolument convergente*. Les séries absolument convergentes sont aussi convergentes, mais l'inverse est faux, car la série $\sum (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\nu}$ converge alors que la série harmonique ne converge pas (ill. A_1).

La prop. 13 permet d'étendre les critères de la racine nième et du quotient (ill. B), simplement en écrivant $\sqrt[n]{|a_n|}$ et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ à la place de $\sqrt[n]{a_n}$ et de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ respectivement. Le résultat reste également valable dans le cas de la divergence.

Règles de calcul pour les séries convergentes

Si $\Sigma\, a_\nu$ et $\Sigma\, b_\nu$ convergent, alors :

(1) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu + b_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$

(2) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a \cdot a_\nu) = a \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \; (a \in \mathbb{R})$

(3) $\sum_{\nu=p+1}^{\infty} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu - (a_1 + \ldots + a_p)$

(4) $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu = c_1 + \ldots + c_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ *si* $\forall\, n, c_{p+n} = a_n$

(5) $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ si $c_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1}$,

$c_2 = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}$, $c_3 = a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3}$, …

Rem. : D'après la règle (5), on peut à volonté regrouper des ensembles *finis* de termes d'une série convergente. Par contre, il faut faire très attention lorsqu'on enlève des parenthèses dans une série quelconque : ainsi, $(1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$ avec $a_n = 1 - 1$ converge alors que $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ avec $a_n = (-1)^n$ diverge.

(6) $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ si $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^*$ est une série issue de $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ par permutation des termes et si $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ converge absolument.

Rem. : Les séries absolument convergentes sont les seules pour lesquelles l'ordre des termes de la série n'a pas d'importance. Par contre, il est toujours possible de réordonner les termes des séries convergentes non absolument convergentes afin de faire converger la série finale vers n'importe quel réel fixé à l'avance (théorème de réarrangement de RIEMANN).

(7) $\sum_{\lambda=1}^{\infty} p_\lambda = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu$ si (p_n) est une suite de tous les produits $a_\nu \cdot b_\mu$ ($\nu, \mu \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$) pris dans un ordre quelconque et si $\Sigma\, a_\nu$ et $\Sigma\, b_\mu$ convergent absolument (*théorème du produit de CAUCHY*).

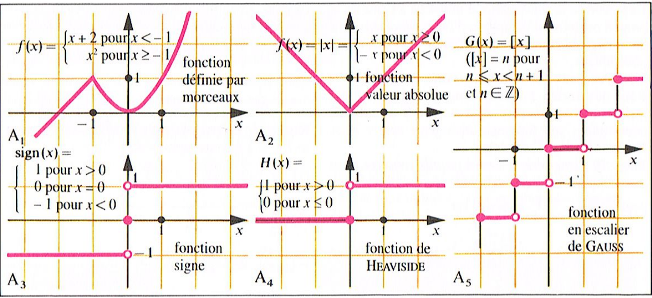
Produits infinis

Si (a_n) est une suite de termes strictement positifs, alors la suite (p_n) des produits finis

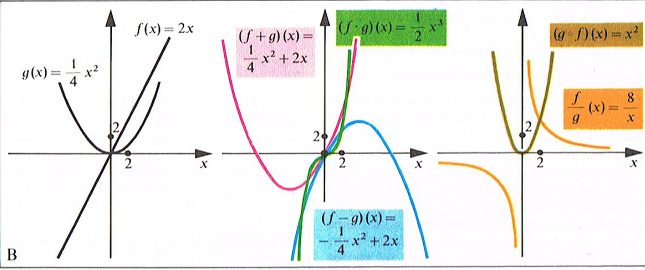
$p_n = \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu$ s'appelle produit infini $\prod a_\nu$.

Ce *produit* est dit convergent si la suite (p_n) converge vers une limite non nulle. On a alors :

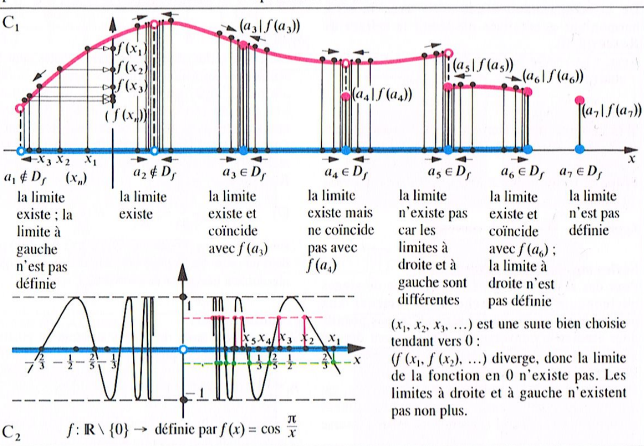
Prop. 14 : *$\Pi\, a_\nu$ converge (vers $\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$) si, et seulement si, $\Sigma \ln a_\nu$ converge.*



Fonctions réelles particulières



Opérations rationnelles entre fonctions et composition de fonctions



Valeur limite d'une fonction

Exemples de fonctions réelles

Déf. 1 : Une fonction $f : D_f \to W$ définie par $x \mapsto f(x)$ avec $D_f \subseteq \mathbb{R}$ et $W \subseteq \mathbb{R}$ s'appelle *fonction réelle*. $f(x)$ est la *valeur de la fonction* au point x, D_f est l'*ensemble de définition*, W l'*ensemble d'arrivée*, $f(D_f) = W_f = \{f(x) | x \in D_f\}$ l'*ensemble des images*.

Le *graphe* $\{(x, f(x)) | x \in D_f\}$ d'une fonction réelle f est en général représenté dans un système de coordonnées.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ $(a_\nu \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$

s'appelle *fonction polynomiale* d'ordre n si $a_n \neq 0$. Comme cas particuliers on peut citer les fonctions constantes, linéaires, quadratiques et cubiques pour n variant de 0 à 3 et les fonctions puissances de degré n définies par $f(x) = a\,x^n$. La fonction linéaire $f(x) = x$ est la *fonction identité* $1_{\mathbb{R}}$.

$f : \mathbb{R} \setminus B \to \mathbb{R}$ avec

$$x \to f(x) = \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu\right) \cdot \left(\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu\right)^{-1}$$

$(a_\nu, b_\mu \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N})$ s'appelle *fonction rationnelle* (B est l'ensemble des solutions de $\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu = 0$).

Si g et h sont des fonctions réelles avec $D_g \cap D_h = \varnothing$, alors $f : D_g \cup D_h \to \mathbb{R}$ définie

par $x \to f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ pour } x \in D_g \\ h(x) \text{ pour } x \in D_h \end{cases}$ est une *fonction définie par morceaux.*

Ex. : fig. A.

On utilise souvent la *restriction* $f_{|M}$ d'une fonction f à un sous-ensemble M de D_f (p. 33).

Déf. 2 : $f : D_f \to \mathbb{R}$ est *croissante* si $\forall (x_1, x_2)$, $(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$.
$f : D_f \to \mathbb{R}$ est *strictement croissante* si $\forall (x_1, x_2)$, $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.
$f : D_f \to \mathbb{R}$ est *décroissante* si $\forall (x_1, x_2)$, $(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.
$f : D_f \to \mathbb{R}$ est *strictement décroissante* si $\forall (x_1, x_2)$, $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.
$f : D_f \to \mathbb{R}$ est *monotone* si elle est croissante resp. décroissante.
$f : D_f \to \mathbb{R}$ est *majorée* (*minorée*) si l'ensemble des images $f(D_f)$ possède une borne supérieure (inférieure). Une fonction majorée et minorée est dite *bornée*.

Opérations algébriques et composition

On peut obtenir de nouvelles fonctions à partir d'autres fonctions grâce à l'utilisation d'opérations algébriques ou grâce aux règles de composition des fonctions.

Déf. 3 : $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ étant données, on définit leur *somme* ou leur *différence* $f \pm g : D_{f \pm g} \to \mathbb{R}$ par $x \mapsto f \pm g(x) = f(x) \pm g(x)$ avec $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$. On peut également définir leur *produit*
$f \cdot g : D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ par
$x \mapsto f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$.

La fonction *quotient* $\frac{f}{g} : D_{f/g} \to \mathbb{R}$ définie sur

$D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{x | g(x) = 0\}$ est donnée par

$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Enfin, on définit leur *composée* $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ par $x \mapsto g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, dans le cas où $f(D_f) \subseteq D_g$.

On écrit une fonction constante définie par $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ plus simplement c.

Pour une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$, on définit $cf : D_f \to \mathbb{R}$ par $f \to cf(x) = c \cdot f(x)$, ce qui peut aussi être considéré comme le produit de f par la fonction constante c. Si $c = -1$, on écrit simplement cette fonction produit $-f$.

On note f^n $(n \in \mathbb{N})$ la fonction produit $f \cdot \ldots f$ (n facteurs), avec la convention $f^0 = 1$ (c.-à-d. la fonction constante égale à 1, et non la fonction identité $1_{\mathbb{R}}$).

On remarque alors que l'on peut noter les fonctions polynômiales et les fonctions rationnelles resp. sous

les formes $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (1_{\mathbb{R}})^\nu$ et $\dfrac{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (1_{\mathbb{R}})^\nu}{\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu (1_{\mathbb{R}})^\mu}$

Valeur limite d'une fonction

Pour caractériser le comportement d'une fonction f au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ (a est un point d'accumulation de $D_f \setminus \{a\}$, cf. rem.), on peut introduire les suites (x_n) avec $x_n \in D_f \setminus \{a\}$ (nommées *suites de base*) qui convergent vers a, et étudier les suites correspondantes des valeurs de la fonction $(f(x_n))$. Dans le cas où $a \in D_f$, le problème est de savoir comment $f(a)$ est approché par les valeurs de la fonction au voisinage de a. On en déduit le concept de la limite d'une fonction (ill. C_1).

Déf. 4 : $l \in \mathbb{R}$ est la *valeur limite* de la fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$ lorsque pour toute suite de base (x_n) avec $x_n \in D_f \setminus \{a\}$ et $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, on a

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$. On écrit alors simplement

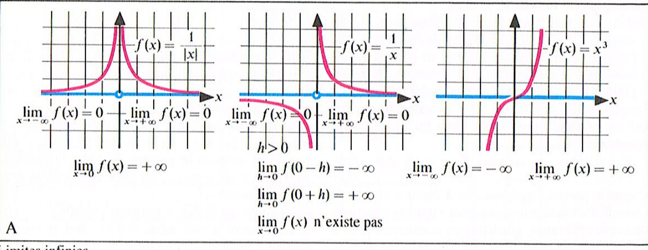
$\lim_{x \to a} f(x) = l$ (limite de f lorsque x tend vers a).

Rem. : On a conservé la condition $x_n \in D_f \setminus \{a\}$ dans la déf. pour ne définir la notion de valeur limite que lorsque a est point d'accumulation de $D_f \setminus \{a\}$, car on ne peut définir cette notion pour un point isolé de D_f.

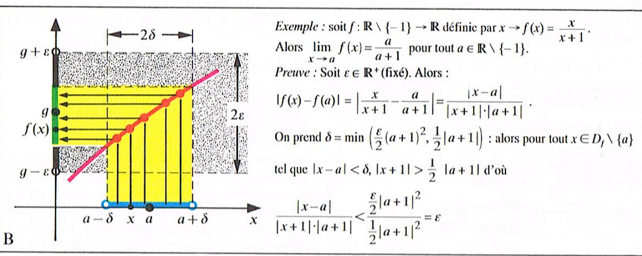
Au lieu de $\lim_{x \to a} f(x)$, on peut s'intéresser à $\lim_{h \to 0} f(a+h)$ avec $h \neq 0$ et $a + h \in D_f$, ce qui ne change pas la déf. On peut alors se limiter à $h > 0$ (*limite à droite*) ou à $h < 0$ (*limite à gauche*). Quelquefois, seule une de ces deux limites existe alors que l'autre n'existe pas (fig. C_1).

Si la limite à gauche et la limite à droite existent et ont la même valeur, alors cette valeur est la valeur limite de la fonction.

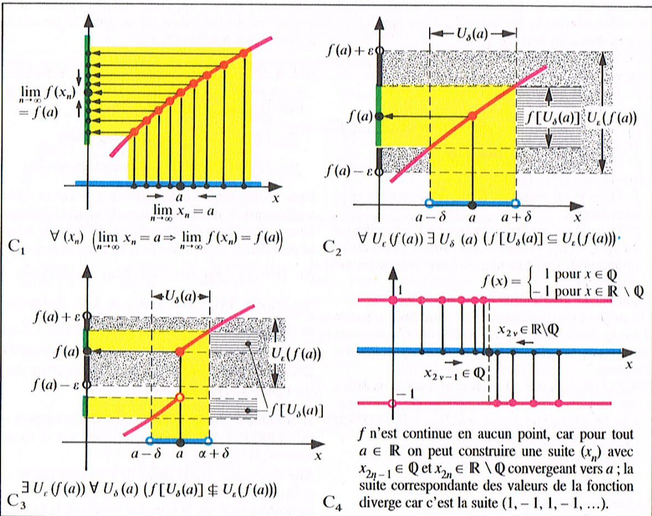
Afin de prouver que la limite de f n'existe pas en un point a, il suffit de trouver une suite de base particulière telle que la suite des valeurs de la fonction correspondante ne converge pas (fig. C_2).



Limites infinies



Application de la proposition 2



Continuité, non continuité

Limites infinies

Si pour toutes les suites de base de $D_f \setminus \{a\}$ convergeant vers $a \in \mathbb{R}$, les valeurs correspondantes de la fonction f divergent fortement vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), on écrit symboliquement

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$).

Si D_f n'est pas borné à droite (à gauche), alors on peut étudier le comportement de la fonction « à l'infini » en prenant des suites d'éléments de D_f divergeant fortement vers $+\infty$ ($-\infty$), et en regardant les valeurs de la fonction correspondantes. Si pour toutes ces suites (x_n), $(f(x_n))$ tend toujours vers la même valeur l, alors on écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ($\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$).

Si par contre, pour toutes ces suites (x_n), $(f(x_n))$ tend fortement vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), on écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$)

resp. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ($\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$). Ex. : ill. A.

Propriétés des valeurs limites

Les propriétés suivantes sont utiles pour déterminer des valeurs limites.

Prop. 1 : *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\lim_{x \to a} f(x) = r$ et $\lim_{x \to a} g(x) = s$. Alors :*

(a) $\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = r \pm s$

(b) $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = r \cdot s$

(c) *si $g(x) \neq 0$ et $s \neq 0$,* $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{r}{s}$

(d) $\lim_{x \to a} |f|(x) = \lim_{x \to a} |f(x)| = |r|$

(e) *si $f(x) \leq g(x)$ ou $f(x) < g(x)$ dans un voisinage de a, alors $r \leq s$.*

Pour prouver ce qui précède, on utilise la prop. 6 de la p. 279.

Dans la pratique, on montre l'existence de la valeur limite d'une fonction grâce à la prop. suivante :

Prop. 2 : *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation de $D_f \setminus \{a\}$. Alors $l \in \mathbb{R}$ est valeur limite de f en a si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \setminus \{a\}$ satisfaisant à $|x - a| < \delta$, on ait $|f(x) - l| < \varepsilon$.* (ill. B).

Continuité, fonctions continues

On définit ici la notion fondamentale de continuité d'une fonction :

Déf. 5 : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $a \in D_f$ tel que a soit point d'accumulation de $D_f \setminus \{a\}$. Alors f *est continue en* a si la valeur limite de f en a existe et vaut $f(a)$, c.-à-d. si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Notons que cela permet d'approcher $f(a)$ grâce aux suites de base convergeant vers a (fig. C_1).

Au lieu de considérer $\lim_{x \to a} f(x)$, on peut aussi étudier $\lim_{h \to 0} f(a+h)$ avec $h \neq 0$ et $a + h \in D_f$. Si la limite à droite (à gauche) $\lim_{h \to 0} f(a+h)$ avec $h > 0$ ($\lim_{h \to 0} f(a-h)$ avec $h > 0$) existe et vaut $f(a)$, f est dite *continue à droite* (*continue à gauche*). Une fonction f continue à droite et à gauche en un point a est continue en a.

La notion de continuité n'a été définie que pour des points d'accumulation a de $D_f \setminus \{a\}$. Reste à traiter le cas des points *isolés* de D_f. On utilise la déf. suivante :

Déf. 6 : $f : D_f \to \mathbb{R}$ est dite *continue* en tout *point isolé* de D_f.

Déf. 7 : $f : D_f \to \mathbb{R}$ est dite *fonction continue* si elle est continue en tout point de D_f.

Grâce à la prop. 2, nous pouvons maintenant énoncer une caractérisation pratique de la continuité.

Prop. 3 : $f : D_f \to \mathbb{R}$ *est continue en $a \in D_f$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$ satisfaisant à $|x - a| < \delta$, on ait $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Rem. : Noter l'utilisation de $x \in D_f$ qui permet de traiter les points isolés.

Si l'on utilise le concept de voisinage pour la topologie induite sur D_f (p. 219), alors la prop. précédente peut être reformulée :

Prop. 3* : $f : D_f \to \mathbb{R}$ *est continue en $a \in D_f$ si pour tout voisinage $W(f(a))$ de $f(a)$, il existe un voisinage $V(a)$ de a (pour la topologie induite sur D_f) tel que $f[V(a)] \subseteq W(f(a))$.*

Cette déf. est équivalente à la déf. topologique de continuité formulée p. 219. Souvent, on décrit les fonctions continues comme « conservant les limites », c.-à-d. que pour toute suite (x_n) d'éléments de D_f tendant vers a, on a :

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right).$$

Si cette propriété est vérifiée, alors on peut en déduire la continuité de f en a. Comme le montre la prop. suivante, on peut même se passer de la connaissance de la valeur à la limite :

Prop. 4 : $f : D_f \to \mathbb{R}$ *est continue en $a \in D_f$ si pour toutes les suites (x_n) d'éléments de D_f tendant vers a, les suites $f(x_n)$ convergent.*

Rem. : La valeur limite des suites $f(x_n)$ est forcément $f(a)$ puisque la suite $(a \ldots a \ldots)$ est autorisée, et puisque la limite de ces suites est un réel unique (raisonner en mélangeant deux suites distinctes (x_n) et (y_n) pour obtenir $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots)$.

Non-continuité

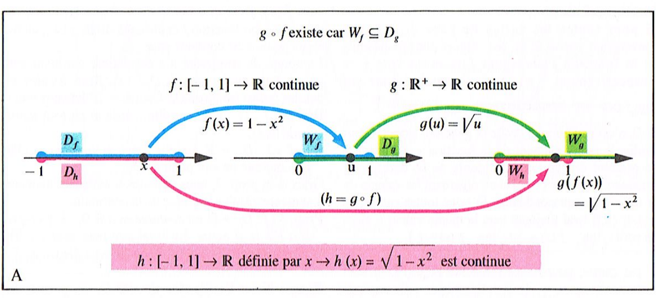
De la prop. 4 on déduit que $f : D_f \to \mathbb{R}$ n'est pas continue en a s'il existe une suite (x_n) d'éléments de D_f tendant vers a telle que $f(x_n)$ ne converge pas.

Rem. : Si $f(x_n)$ converge vers une limite différente de $f(a)$, il suffit de considérer la suite $(x_1, a, x_2, a, x_3, a, \ldots)$ pour pouvoir appliquer ce qui précède : f n'est pas continue en a.

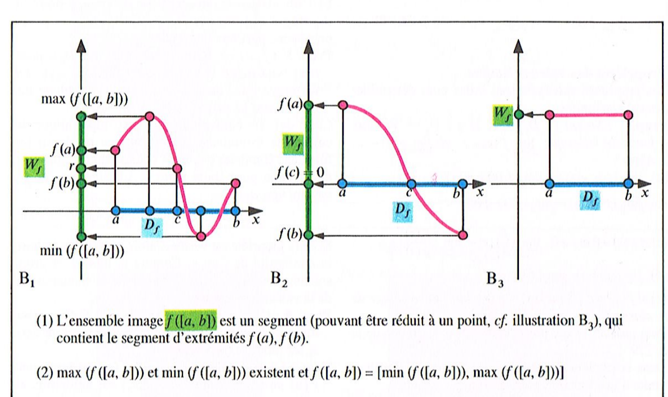
Si en $a \in D_f$, f admet une limite à droite et une limite à gauche différentes, f n'est pas continue en a. Si l'une de ces deux limites coïncide avec $f(a)$, on parle d'un *saut* de la fonction f en a (fig. C_1, p. 282, point a_5).

De même, on déduit de la prop. 3* que f n'est pas continue en a s'il existe un voisinage $W(f(a))$ de $f(a)$ tel que, pour tout voisinage $V(a)$ de a, $f[V(a)] \not\subset W(f(a))$ (fig. C_3).

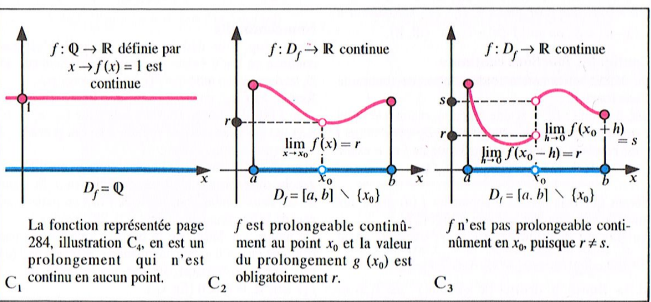
Rem. : Il existe des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui ne sont continues en aucun point (fig. C_4).



Composition de fonctions continues



Propriétés des fonctions continues



Prolongement continu

Exemples de fonctions continues

Dans les ex. de l'ill. A, p. 282, les fonctions représentées en A_1 et A_2 sont continues, alors que celles en A_3 et en A_4 ont un point de discontinuité unique. La fonction représentée sur la figure A_5 admet même une infinité de points de discontinuité.

Grâce à la prop. 4, on montre facilement que *toute fonction constante* et que *la fonction identité* $1_{\mathbb{R}}$ sont continues. Grâce à ces fonctions, on peut engendrer une classe importante de fonctions continues, celle des fonctions rationnelles (voir plus haut). Par ailleurs, la *fonction racine* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et les *fonctions trigonométriques* sont aussi continues.

Opérations rationnelles sur les fonctions et composition de fonctions continues

Toute fonction rationnelle est engendrée par les fonctions constantes et par la fonction identité $1_{\mathbb{R}}$ (cf. p. 283). Ces fonctions étant continues, cela implique la continuité des fonctions rationnelles car la continuité est conservée lors de l'utilisation d'opérations rationnelles sur les fonctions, comme le montre :

Prop. 5 : *Si f et g sont continues en un point $a \in D_f \cap D_g$, alors $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ sont aussi continues en a, et si $a \in D_f \cap D_g \setminus \{x | g(x) = 0\}$, $\frac{f}{g}$ l'est également.*

Rem. : Cette prop. peut être prouvée à l'aide de la prop. 1.

On en déduit immédiatement l'énoncé suivant :

Prop. 6 : *Toute fonction rationnelle est continue.*

Souvent, on peut considérer une fonction h comme une composée de deux fonctions continues f et g : $h = g \circ f$ (ex. : fig. A). Alors h est aussi continue, d'après la prop. suivante :

Prop. 7 : *Si $f(D_f) \subseteq D_g$ et si f est continue en $a \in D_f$ et g est continue en $f(a) \in D_g$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Voici des corollaires de cet énoncé :

(1) Pour toute fonction f continue en $a \in D_f$, alors la fonction $|f| : D_f \to \mathbb{R}$ définie par $x \to |f(x)|$ est continue. En effet $|f|$ est la composée de f et de la fonction valeur absolue, qui est une fonction continue (p. 282, figure A_1).

(2) Pour toute fonction f continue en $a \in D_f$ et tout sous-ensemble M de D_f tel que $a \in M$, la *restriction* de f à M, notée $f_{|M}$ est continue puisqu'elle peut s'écrire comme composée $f \circ i$ de deux fonctions continues, i étant l'injection $i : M \to D_f$ (p. 33).

Propriétés des fonctions continues

Les prop. des fonctions continues définies sur un segment $[a, b]$ ont une grande importance. En effet les prop. topologiques des segments de $\mathbb{R}$ sont très fortes : ce sont les seuls sous-ensembles non vides, connexes, fermés et bornés de $\mathbb{R}$, c.-à-d. en fait les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}$ à la fois compacts et connexes.

On obtient alors (voir ill. B) :

Prop. 8 (th. du transport des intervalles) : *Si f est une fonction définie sur un segment $[a, b]$ et continue sur cet intervalle, alors l'ensemble image $f([a,b])$ est un segment.*

Cet énoncé contient en fait deux prop. différentes qui sont souvent utilisées séparément :

Prop. 9 (th. de la valeur intermédiaire) : *Si $f : D_f \to W$ est une fonction continue et si D_f contient un segment $[a, b]$, alors pour tout réel r compris entre $f(a)$ et $f(b)$ supposés distincts ($f(a) < r < f(b)$ ou $f(b) < r < f(a)$), il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = r$. r est dit valeur intermédiaire.*

Prop. 10 : *Soit f une fonction continue définie sur un segment $[a, b]$. Alors* max $(f[a, b])$ *et* min $(f[a, b])$ *existent.*

Rem. 1 : On peut étendre la prop. 8. Si l'on remplace le segment par un intervalle quelconque, l'ensemble image est encore un intervalle. Cela vient du transport des propriétés de connexité par les applications continues (cf. p. 223) et du fait que les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}$ connexes et non vides sont ses intervalles (cf. p. 213).

Rem. 2 : Si dans la prop. 9, on a de plus $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(b) < 0 < f(a)$, on obtient l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$ (fig. B_2). Une conséquence de cette propriété est qu'une fonction polynomiale de degré impair s'annule en au moins un point, c.-à-d. que son graphe coupe l'axe des abscisses en au moins un point.

Rem. 3 : Le maximum, resp. le minimum de l'ensemble image peut être atteint en l'une des bornes du segment (fig. B_2). Remarquons que l'hypothèse de *segment* est fondamentale car la prop. 10 n'est plus valable dans le cas d'intervalles quelconques. Par exemple, la fonction trigonométrique tangente (tan) est continue sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ et n'est pas bornée.

Prolongement continu d'une fonction

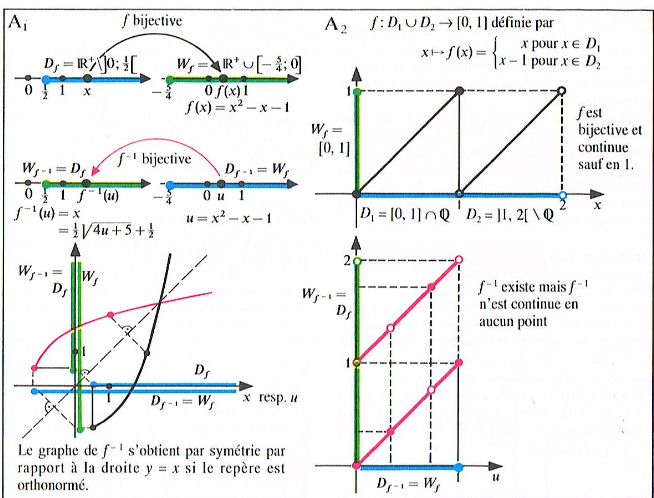
D'après la seconde conséquence de la prop. 7, la continuité est conservée lors d'une restriction d'une fonction continue, mais il n'en est plus de même en général lors d'un prolongement d'une fonction continue (cf. p. 33).

Déf. 8 : $f : D_f \to \mathbb{R}$ est dite *prolongeable continûment en $a \notin D_f$* s'il existe $g : D_g \to \mathbb{R}$ avec $D_f \subset D_g$, $a \in D_g$, $g_{|D_f} = f$, g continue en a. On notera que si g est continue sur D_g, f est également continue sur D_f. f est la restriction de g à D_f, g est un *prolongement continu* de f à D_g.

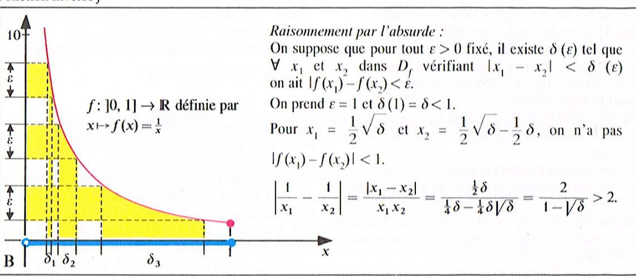
Si a n'appartient pas à l'adhérence de D_f, f est prolongeable continûment en a d'une infinité de façons. Si a est un point d'accumulation de D_f sans lui appartenir, on ne peut prolonger f continûment en a que si $\lim_{\substack{x \to a, \\ x \in D_f}} f(x)$ existe et est choisie comme valeur pour le prolongement continu de f en a.

Prop. 11 : *Si $x_0 \in [a, b]$, si $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ est continue, on pourra prolonger f en fonction continue sur $[a, b]$ à la seule condition que $L = \lim_{\substack{x \to x_0, \\ x \in [a, b] \setminus \{x_0\}}} f(x)$ existe.*

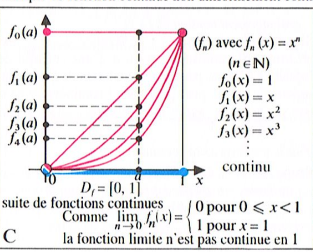
Alors le prolongement est unique : $f(x_0) = L$.



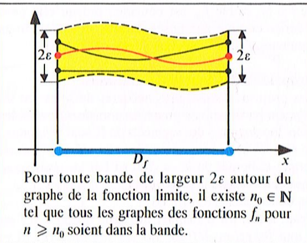
Fonction inverse f^{-1}



Exemple de fonction continue non uniformément continue



Suite de fonctions continues



Convergence uniforme

Inversibilité et continuité

A une fonction f bijective on peut associer une *fonction inverse*, notée f^{-1} (cf. p. 33). Ex. : fig. A_1.

Si f est bijective et continue en $a \in D_f$, f^{-1} existe bien mais rien ne garantit que f^{-1} soit continue en $f(a)$ (fig. A_2). Par contre, les résultats suivants sont vérifiés :

Prop. 12 : *Si f est une fonction définie sur un intervalle, bijective et continue, alors la fonction inverse f^{-1} est continue.*

Prop. 13 : *Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle, strictement monotone, alors la fonction inverse f^{-1} existe et est continue.*

Pour prouver cette propriété, on utilise le fait qu'une fonction strictement monotone est continue lorsque l'ensemble des images est un intervalle.

Continuité uniforme

Pour une fonction continue f, on peut approcher sa valeur en un point $a \in D_f$ en se plaçant suffisamment près de a, comme l'exprime la prop. 3. En effet, la continuité implique pour n'importe quel $\varepsilon > 0$ l'existence d'un $\delta > 0$ (dépendant de a et de ε) tel que $\forall x \in D_f$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Il faut cependant noter que la qualité de l'approximation (c.-à-d. la relation entre δ et ε) dépend du point a considéré. Il est donc intéressant d'étudier si une approximation indépendante de a peut être étendue à tout D_f, c.-à-d. si δ peut n'être fonction que de ε.

Cette propriété n'étant pas valable pour toutes les fonctions continues, il faut donc définir des fonctions continues particulières.

Déf. 9 : Une fonction $f : D_f \to W$ est dite *uniformément continue*, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que *pour tous $a \in D_f$ et $x \in D_f$*, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

On en déduit immédiatement :

Prop. 14 : *Toute fonction uniformément continue est continue.*

L'inverse étant faux en général, on a cependant sous certaines hypothèses un énoncé réciproque :

Prop. 15 : *Une fonction continue définie sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue.*

Rem. : La propriété décisive utilisée dans la justification de cette propriété est la compacité de $[a, b]$.

Suites de fonctions, convergence uniforme

A tout $x \in \mathbb{R}$ on peut associer une suite de nombres réels, comme par ex. la suite $\left(x,\ x - \frac{x^3}{3!},\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \ldots\right)$.

Dans le cas où ces suites convergent, l'ensemble des limites permet de définir une appl. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cependant on peut aussi considérer que l'on s'intéresse à une suite de fonctions $(f_1(x), f_2(x), \ldots)$.

Dans notre ex., on aurait $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, etc.

On appelle alors la fonction obtenue comme ensemble des limites *fonction limite*. Dans l'ex., la fonction limite est $\sin(x)$ (p. 308, ill. D). On dit alors que la suite de fonctions donnée converge vers la fonction sinus.

Déf. 10 : Une suite (f_n) de fonctions $f_n : D_{f_n} \to \mathbb{R}$ (avec $n \in \mathbb{N}$) est dite *convergente en $a \in D$* avec $D = \bigcap_{\nu=0}^{\infty} D_{f_\nu}$ si $(f_n(a))$ est une suite convergente.

(f_n) est dite *convergente* sur D vers $f : D \to \mathbb{R}$ si en tout point a de D, $f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a)$ existe. On appelle alors f la *fonction limite* de la suite (f_n).

Rem. : Dans le cas où (f_n) ne converge pas en un point $a \in D$, on dit que la suite de fonctions est *divergente* sur D.

On peut maintenant se demander si une limite de fonctions continues est continue. En général, cette propriété n'est pas vérifiée (ill. C). Pour obtenir un résultat positif, on introduit :

Déf. 11 : (f_n) est dite *uniformément convergente* vers f sur D, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in D$ et tout $n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (ill. D).

Prop. 16 : *Une suite de fonctions continues uniformément convergente sur D converge vers une fonction continue sur D.*

Rem. : Il existe cependant des suites de fonctions continues convergeant vers une fonction continue sans pour autant converger uniformément.

Séries de fonctions, séries entières

Le concept de série de fonctions est construit par analogie avec les séries de réels (p. 279).

Déf. 12 : La suite (s_n) que l'on associe à une suite (f_n) par $\forall n, s_n = f_0 + \ldots + f_n = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu$ s'appelle *série de fonctions*. Quand la série converge, on note sa fonction limite $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$. On peut donc représenter la fonction sin par

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(1_{\mathbb{R}})^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \text{ c.-à-d. } \sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

Il s'agit donc d'une « fonction polynomiale infinie », ou *série entière*.

Déf. 13 : $p = \Sigma\, a_\nu (1_{\mathbb{R}})^\nu$, soit $p(x) = \Sigma\, a_\nu x^\nu$ est dite *série entière*.

Une série entière ne converge pas en général sur tout $\mathbb{R}$.

Prop. 17 : *Si une série entière converge ailleurs qu'en 0 mais ne converge pas sur tout $\mathbb{R}$, alors il existe un réel $r > 0$ tel que la série converge pour tout $|x| < r$ et diverge pour tout $|x| > r$. On peut prouver que :* $r = \dfrac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}}$.

r s'appelle *rayon de convergence* de la série, et $]-r, r[$ l'intervalle de convergence.

On ne donne dans cette prop. aucun détail sur la situation en $x = \pm r$. Il existe des séries qui convergent ou qui divergent en ces points.

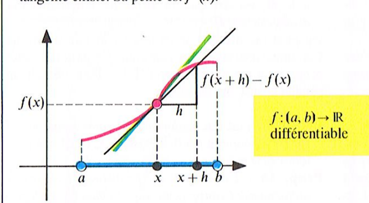
Rem. : Si la série ne converge que pour $x = 0$ on écrit par extension $r = 0$.

Applications : p. 299 et suivantes.

Problème de la tangente

À quelle condition suffisante doit satisfaire la fonction f pour qu'une sécante passant par $(x, f(x))$ et $(x + h, f(x + h))$ admette une position limite appelée tangente, lorsque h tend vers 0 ?

On peut énoncer : si f est dérivable en x, la tangente existe. Sa pente est $f'(x)$.



L'accroissement relatif de f à partir du point x correspond approximativement à $f'(x)$, soit :

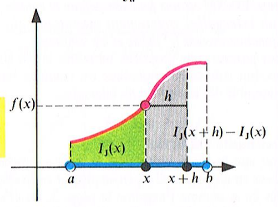
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \approx f'(x)$$

pour h suffisamment petit.

Problème de l'aire

À quelle condition suffisante doit satisfaire la fonction positive f pour que la partie limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x, les parallèles à Oy d'abscisses resp. a et y admette une aire ?

On peut énoncer : si f est RIEMANN-intégrable, cette aire existe et vaut $\int_a^x f(t)\,dt$



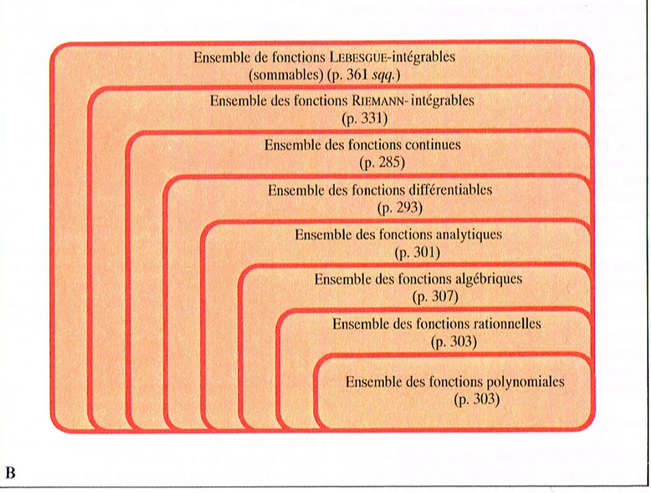
L'accroissement relatif de I_f à partir du point x correspond approximativement à $f(x)$, soit :

$$\frac{I_f(x+h)-I_f(x)}{h} \approx f(x)$$

pour h suffisamment petit.

A

Lien entre les problèmes de tangente et d'aire



B

Classification des fonctions réelles de la variable réelle

Introduction

L'analyse et ses différents domaines constituent l'une des plus vastes disciplines mathématiques. L'objet fondamental de l'analyse est l'obtention de valeurs limites à partir de fonctions au moyen de *procédés infinitésimaux,* dont les plus importants sont la *différentiation* et l'*intégration* des fonctions.

Les domaines de l'analyse qui traitent de ces problèmes fondamentaux sont le **calcul différentiel** et le **calcul intégral**, que l'on réunit aussi sous le nom de *calcul infinitésimal*. Les autres domaines auxquels touche l'analyse, présupposant la connaissance du calcul infinitésimal, sont l'**analyse fonctionnelle**, la **théorie des équations différentielles**, la **géométrie différentielle** et la **théorie des fonctions**.

Dans la suite on traitera le calcul différentiel avant le calcul intégral, mais il serait possible de faire l'inverse. On examinera d'abord le cas particulier des fonctions f réelles de la variable réelle pour lesquelles d'une part les deux notions de dérivabilité et de différentiabilité sont équivalentes, et d'autre part les deux opérations de différentiation et d'intégration ont un lien remarquable. Les finalités de ces deux opérations sont pourtant bien différentes au premier abord : le calcul différentiel recherche la pente d'une tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$, le calcul intégral vise à évaluer l'aire d'une surface limitée par cette même courbe.

Le calcul infinitésimal doit d'abord préciser les notions de pente et d'aire ; on en tire alors les notions respectives de *différentiabilité* et d'*intégrabilité* de f (fig. A).

Il y a entre celles-ci un lien très important. La pente $f'(x)$ du graphe d'une fonction différentiable $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ en un point d'abscisse x et l'aire $I_f(x)$ de la surface située sous la courbe mais au-dessus de l'axe des x, entre les abscisses a fixée et x variable, peuvent être interprétées comme les valeurs en x de deux fonctions f' et I_f. Le rôle joué par f vis-à-vis de f' est semblable à celui que joue I_f vis-à-vis de f : la variation de la valeur de la première fonction pour une variation h de son argument à partir de x est approximativement donnée par la valeur de la seconde fonction en x multipliée par h, et ce avec d'autant plus de précision que h est petit (fig. A).

Les fonctions différentiables f sont toutes intégrables, la réciproque est fausse. L'ensemble des fonctions intégrables contient donc celui des fonctions différentiables. Entre les notions de différentiabilité et d'intégrabilité se place celle de *continuité*, qui peut d'ailleurs être introduite directement par la notion de valeur limite (p. 285). Avec d'autres notions structurelles introduites par le calcul infinitésimal, apparaît ainsi la possibilité d'une classification des fonctions (tab. B).

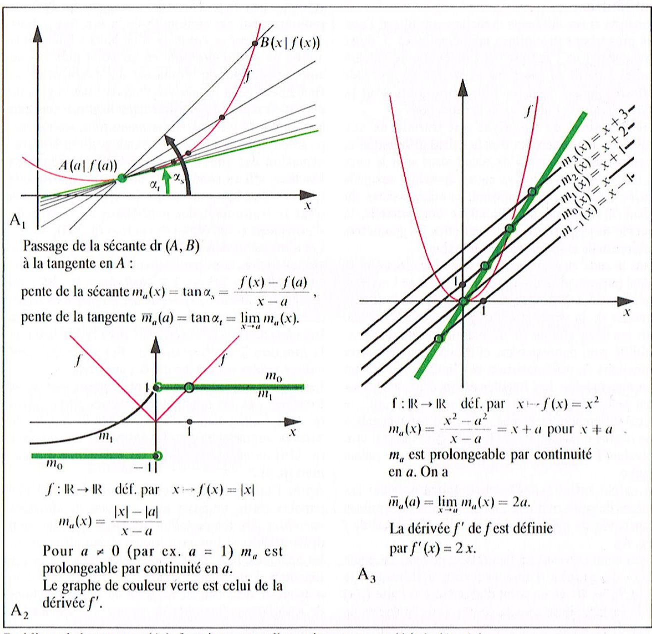
La construction du calcul différentiel dans les pages suivantes part du *problème de la tangente* (p. 293) ; le prolongement par continuité de la fonction « taux d'accroissement au voisinage d'un point » introduit la notion de *différentiabilité* en un point puis sur un sous-ensemble du domaine de définition, et finalement celle de *dérivée*. Suivent des règles de dérivation et des th. fondamentaux liant une fonction à sa ou ses dérivées (*accroissements finis*, *monotonie,* p. 297, *développements de* TAYLOR, p. 299). L'approximation des fonctions différentiables par des fonctions affines conduit à la notion de *différentielle* (p. 297). Plus loin sont établis des *critères* importants pour le traitement des *problèmes de recherche d'extremums* et des *études de courbes* (p. 303).

Les résultats obtenus sont ensuite appliqués à l'étude de classes de fonctions particulières. Après les *fonctions rationnelles* (p. 303 *sqq.*) et *algébriques* (p. 307), on considère la *fonction exponentielle*, les *fonctions trigonométriques hyperboliques* et *circulaires* ainsi que leurs *fonctions réciproques*, mais aussi la *fonction* Γ et la *fonction* ζ *de* RIEMANN (p. 309 *sqq.*) qui sont indispensables pour la théorie des nombres.

Les études suivantes concernent l'*approximation* de fonctions par des fonctions de classes particulières (p. 313), l'*interpolation* d'un ensemble de couples de valeurs numériques par des fonctions appropriées (p. 315) ou encore la *résolution numérique d'équations* (p. 317).

Après l'étude des fonctions différentiables d'une variable réelle, on passe aux *fonctions de plusieurs variables*. On dit de telles fonctions qu'elles sont différentiables si l'on peut les approcher affinement ; les analogies sont alors nombreuses avec le cas des fonctions d'une seule variable. Si l'on considère un n-uplets de réels comme un point de $\mathbb{R}^n$, m fonctions de n variables s'interprètent comme une application d'un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$ dans un ensemble de points de $\mathbb{R}^m$ (*fonctions de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$, p. 319 *sqq.*). De nombreux problèmes physiques, qui font intervenir de tels espaces vectoriels réels, peuvent ainsi être traités par l'analyse. Autre problème important, l'*inversion* d'un système de fonctions (ou d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$) : elle implique l'inversion de son système d'approximations linéaires, et cette condition s'avère suffisante, du moins pour l'inversion locale. Dans ce contexte se placent aussi les *fonctions implicites* et leurs *problèmes de recherche d'extremums locaux* (p. 325).

Lors du passage des fonctions d'une variable aux fonctions de plusieurs variables, des généralisations ultérieures sont annoncées. Ainsi l'analyse fonctionnelle tente de transposer les résultats du calcul infinitésimal à des espaces vectoriels plus généraux, tandis que la théorie des fonctions pose des problèmes semblables pour des fonctions définies sur — et à valeur dans — des espaces vectoriels complexes.



Problème de la tangente (A_1), fonction « taux d'accroissement » et dérivée (A_2, A_3)

Soit $g : D_g \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par récurrence sur l'ensemble D_g de tous les nombres rationnels $x\in\mathbb{R}$ de la forme $x = \dfrac{m}{3^n}$ avec $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ par :

(I) $g\left(\dfrac{m}{3^0}\right) = 0$,

(II) $$g\left(\frac{3m+1}{3^{n+1}}\right) = g\left(\frac{3m+2}{3^{n+1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{m}{3^n}\right) + g\left(\frac{m+1}{3^n}\right)\right), & \text{si } g\left(\frac{m}{3^n}\right) \neq g\left(\frac{m+1}{3^n}\right), \\ g\left(\frac{m}{3^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}, & \text{si } g\left(\frac{m}{3^n}\right) = g\left(\frac{m+1}{3^n}\right). \end{cases}$$

Le dessin représente les valeurs prises par la fonction pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. g est uniformément continue sur D_g, car

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}, \forall x', x'' \in D_g / |x'-x''| \leqslant \frac{1}{3^n}\right) \Rightarrow \left(|g(x') - g(x'')| \leqslant \frac{1}{2^n}\right).$$

Donc g est continue sur D_g mais $\forall a\in D_g$, $m_a(x)$ n'est pas borné sur D_g. Donc g n'est dérivable en aucun point de D_g. Comme D_g est dense dans $\mathbb{R}$ et que g est uniformément continue sur D_g, g est prolongeable en une fonction f uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$, mais f n'est dérivable en aucun point $\left(\text{on étudie } \dfrac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}, x' < a < x'', x''-x' \to 0\right)$.

B

Exemple d'une fonction continue et nulle part différentiable

Problème de la tangente

Le problème géométrique de la construction de la tangente en un point à une courbe donnée débouche sur le calcul différentiel (Leibniz). Pour obtenir la tangente en un point A d'une courbe $y = f(x)$, on prend sur cette courbe un point B distinct de A, on trace la droite dr (A, B) (appelée sécante), puis on déplace le point B sur la courbe en direction de A. S'il existe pour la sécante une position limite qui ne dépend pas du côté par lequel on s'approche du point A, on définit la tangente par cette position limite (fig. A_1).

Différentiabilité et dérivabilité

Comme la courbe est le graphe d'une fonction $f: D_f \to \mathbb{R}$, ce problème peut se poser dans les termes suivants : on cherche à savoir si la pente de la sécante a une valeur limite ou diverge fortement (tangente parallèle à l'axe des y), la *pente* d'une droite étant, dans r.o.n, la tangente de son *angle d'inclinaison* α par rapport à l'axe des abscisses (fig. A_1).

Pour $A(a, f(a))$ et $B(x, f(x))$ avec $a\in D_f$ et $x\in D_f \setminus \{a\}$, la pente de la sécante est

$m_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Si a est un point d'accumulation de D_f (c'est bien le cas si D_f est un intervalle), l'existence de $\lim_{x\to a} m_a(x)$ équivaut à celle d'un prolongement par continuité en a de la *fonction « taux d'accroissement en a »* $m_a : D_f \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto m_a(x)$ (fig. A_2, A_3) : si $\overline{m}_a : D_f \to \mathbb{R}$ est ce prolongement continu en a, on a :

$\overline{m}_a / D_f \setminus \{a\} = m_a$ et $\overline{m}_a(a) = \lim_{x\to a} m_a(x)$.

On note souvent h ou Δx la différence $x - a$, le taux d'accroissement s'écrivant alors

$m_a(a+h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$; la lettre Δ rappelle qu'il s'agit de la différence entre les valeurs d'une même coordonnée (abscisse au dénominateur, ordonnée au numérateur) au point A et au point B.

Déf. 1 : La fonction $f: D_f \to \mathbb{R}$ est dite *différentiable en* $a\in D_f$ (au point $a\in D_f$) si a est un point d'accumulation de D_f et s'il existe $p_a\in\mathbb{R}$ tel que $f(x) - f(a) - (x-a)\,p_a = (x-a)\,\varepsilon_a(x)$ où $\varepsilon_a(a) = 0$ et $\varepsilon_a(x)$ est continue en a.

Si p_a existe, on montre facilement qu'il est unique.

Déf. 2 : La fonction $f: D_f \to \mathbb{R}$ est dite *dérivable en* $a \in D_f$ si a est un point d'accumulation de D_f et si la fonction « taux d'accroissement en a », m_a, est prolongeable par continuité en a ; $\overline{m}_a(a)$ est alors appelé *dérivée de f au point a*.

Pour une fonction réelle de la variable réelle, les notions de différentiabilité et de dérivabilité sont équivalentes (si p_a existe, $\overline{m}_a(a)$ existe et vaut p_a et réciproquement).

Si $D_{f'}$ est l'ensemble des $a\in D_f$ où f est dérivable, la fonction $f': D_{f'} \to \mathbb{R}$ définie par :

$a \mapsto f'(a) = \lim_{x\to a} m_a(x)$ est appelée *dérivée de f*.

En pratique on écrit la dérivée f' comme une fonction de x, en remplaçant a par x. Au lieu de $f'(x)$ on utilise aussi la notation de Leibniz $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ représentant symboliquement la limite du quotient $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Les *différentielles* $\mathrm{d}f(x)$ et $\mathrm{d}x$ ne sont pas en revanche les limites de $\Delta f(x)$ et Δx, qui sont toutes deux nulles (voir plus loin p. 297). Si l'on pose $y = f(x)$, on trouve aussi pour la dérivée de f l'écriture $y' = f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Rem. : Si D_f est un intervalle, il suffit que f soit différentiable en $a\in D_f$ pour que la courbe $y = f(x)$ admette une tangente en $A\,(a, f(a))$. Mais ce n'est pas nécessaire : ainsi la courbe $y = \sqrt[3]{x}$ $(D_f = \mathbb{R})$ admet une tangente en $(0, 0)$ mais n'est pas différentiable en $x = 0$.

Différentiabilité et continuité

Th. 1 : *Toute fonction* $f: D_f \mapsto \mathbb{R}$ *différentiable en* $a \in D_f$ *est continue en ce point.*

D'après la déf. de $\overline{m}_a(x)$, pour toute fonction f différentiable en $a\in D_f$, on a :

$\forall x\in D_f$, $f(x) = f(a) + (x-a)\,\overline{m}_a(x)$.

De la continuité de $\overline{m}_a(x)$ en a on déduit d'après le th. 5 p. 287 la continuité de f en a.

La réciproque du th. 1 est fausse : par ex. la fonction « valeur absolue » définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$ est continue mais non différentiable en $x = 0$ (fig. A_2). Il existe même des fonctions partout continues mais nulle part différentiables (fig. B).

Règles de dérivation

Les dérivées des fonctions simples se calculent facilement d'après la déf. 1.

Th. 2 : *Pour la fonction constante* $f: \mathbb{R} \to \{c\}$ *on a* $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = 0$.

Th. 3 : *Pour la fonction identité* $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *définie par* $x \mapsto x$ *on a* $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = 1$.

En effet, $\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $m_a(x) = 0$ pour le th. 2 et $m_a(x) = 1$ pour le th. 3.

La dérivation d'une fonction construite à partir d'opérations rationnelles (p. 283) sur des fonctions différentiables est l'objet du th. 5 ; elle nécessite l'usage de la *règle de restriction* suivante :

Th. 4 : *Si la fonction* $f: D_f \to \mathbb{R}$ *est restreinte à* $E \subset D_f$ *et si a est un point d'accumulation de E appartenant à* $D_{f'}$ *alors on a* $(f_{/E})'(a) = f'(a)$.

$f_{/E}$ peut être dérivable en un point sans que f le soit ; par ex., les restrictions de la fonction « valeur absolue » à $\mathbb{R}^+$, resp. $\mathbb{R}^-$ sont dérivables en $x = 0$ mais la fonction « valeur absolue » ne l'est pas (on parle de *dérivabilité à gauche* ou *à droite*).

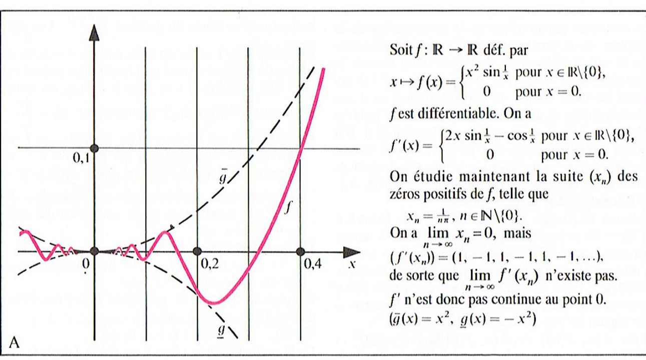
Th. 5 : *Si f et g sont deux fonctions dérivables, on a dans l'intersection des domaines de déf. des fonctions considérées :*
- *la règle d'addition :* $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- *la règle du produit :* $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,
- *la règle du quotient :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}\,(g(x) \neq 0).$$

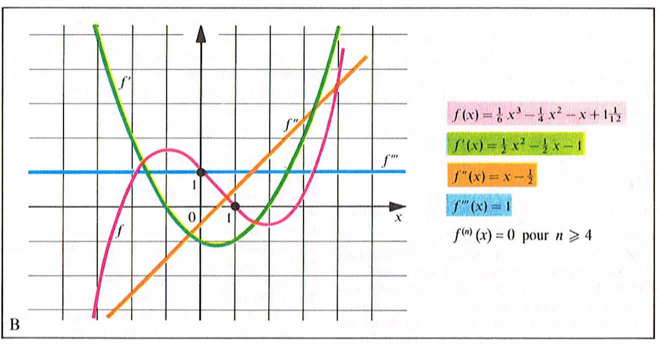
Conséquences :

(1) La règle des puissances : $\forall n\in\mathbb{Z}$ *la dérivée de la fonction puissance* $x \mapsto f(x) = x^n$ *est* $f'(x) = n\,x^{n-1}$ *(démonstration par récurrence).*

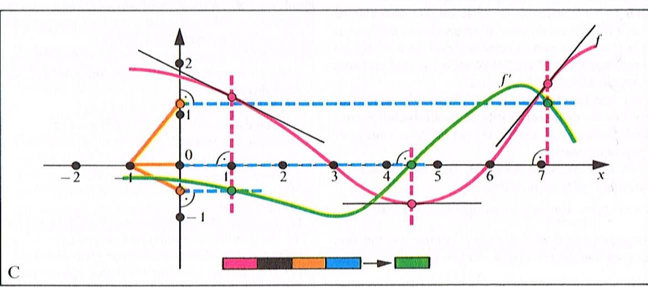
(2) Un facteur constant n'est pas affecté par la différentiation : $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$.



Exemple d'une fonction différentiable, mais non continûment différentiable



Graphe d'une fonction et de ses dérivées



Différentiation graphique

Composition de fonctions différentiables

On peut obtenir de nombreuses fonctions par composition de fonctions plus simples. Par ex., si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies resp. par $x \mapsto f(x) = 3x^2 + 5x - 7$ et $u \mapsto g(u) = u^{12}$, la composée $h = g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $x \mapsto h(x) = g(f(x)) = (3x^2 + 5x - 7)^{12}$. f, g, h sont différentiables ; on peut calculer h' en développant d'abord h puis en dérivant terme à terme le polynôme obtenu, mais au prix d'un fastidieux travail que l'application du th. suivant permet d'éviter.

Th. 6 (règle de composition) : *Si f et g sont différentiables resp. en $a \in D_f$ et $f(a) \in D_g$, alors $g \circ f$ est aussi différentiable en a et*
$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$, *soit* $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$.

Pour montrer ce résultat on considère les prolongements continus resp. $\overline{m}_a$ et $\overline{n}_{f(a)}$ des fonctions « taux d'accroissement » de f et de g. De

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + (f(x) - f(a)) \cdot \overline{n}_{f(a)}(f(x))$$
$$= (g \circ f)(a) + (x - a) \cdot (\overline{m}_a \cdot (\overline{n}_{f(a)} \circ f))(x)$$

il résulte que $\overline{m}_a \cdot (\overline{n}_{f(a)} \circ f)$ est un prolongement de la fonction « taux d'accroissement » de $g \circ f$; produit de fonctions continues, ce prolongement est continu en a, donc $g \circ f$ est différentiable en a et possède en ce point la dérivée annoncée.

En appliquant la règle de composition à l'ex. introductif, de $f'(x) = 6x + 5$ et $g'(u) = 12u^{11}$ on déduit $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 12(3x^2 + 5x - 7)^{11}(6x + 5)$.

Rem. : En adoptant la notation de LEIBNIZ, avec $y = g(u)$ et $u = f(x)$ d'où $y = g(f(x))$, la règle de composition prend une formulation très simple dont la trivialité n'est qu'apparente : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Différentiation des fonctions réciproques

On sait que certaines fonctions sont inversibles, c.-à-d. admettent une fonction réciproque ou inverse (p. 289) ; dans le cas d'une fonction inversible f, on peut se demander si les propriétés éventuelles de continuité ou de différentiabilité de f restent valables pour f^{-1}. Dans le cas général ce n'est vrai ni pour la continuité, ni pour la différentiabilité (voir l'ex. fig. A_2, p. 288) ; pour la différentiabilité de f^{-1} on dispose du th. suivant :

Th. 7 : *Soit f inversible, différentiable en a, soit f^{-1} sa réciproque. Si $f'(a) \neq 0$ et si f^{-1} est continue en $f(a)$, alors f^{-1} est aussi différentiable en $f(a)$ et*
$(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$, *soit* $(f^{-1})' \circ f = \dfrac{1}{f'}$.

L'ex. rappelé plus haut montre que la continuité de f^{-1} en $f(a)$, qui est nécessaire, ne découle pas forcément de la différentiabilité de f en a ; le th. 12 p. 289 assure que f^{-1} est continue en $f(a)$ si f est continue sur un intervalle ouvert contenant a.

Avec la notation de LEIBNIZ, la règle de différentiation du th. 7 s'écrit : $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

On considère par ex. la fonction réciproque de $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $x \mapsto x^2$. Alors $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ et $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ (les variables sur lesquelles portent f et f^{-1} sont notées différemment dans un seul souci de clarté).

Dérivées successives

La dérivée f' d'une fonction f peut elle-même être différentiable, mais elle ne l'est pas toujours. Par ex. la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x \cdot |x|$ est différentiable en tout point alors que sa dérivée $f'(x) = 2 \cdot |x|$ ne l'est pas en $x = 0$. Si $D_{f''}$ est l'ensemble des points $x \in D_{f'}$ où f' est différentiable, la dérivée $f'': D_{f''} \to \mathbb{R}$ de f' est appelée *dérivée seconde* de f ; de même on définit de façon plus générale la *dérivée $n^{ième}$* de f. On appelle ainsi f' *dérivée première* de f et par convention la dérivée à l'ordre zéro de f est f. L'ordre de la dérivée est représenté, en exposant, par des traits obliques ou par un entier placé entre parenthèses : $f^{(n)}$ symbolise la dérivée $n^{ième}$ de f, et par déf. $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ si $n > 0$.

La notation de LEIBNIZ pour la dérivée $n^{ième}$ est $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Déf. 3 : Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f: D_f \to \mathbb{R}$ est dite *n-fois différentiable en a* (*sur E*) si $a \in D_{f^{(n)}}$ ($E \subseteq D_{f^{(n)}}$). Si $D_{f^{(n)}} = D_f$, f est dite *n-fois différentiable.*

Dans de nombreux cas la propriété suivante s'avère également utile :

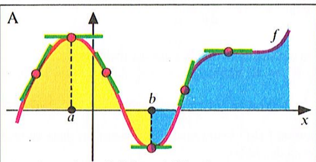
Déf. 4 : Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f: D_f \to \mathbb{R}$ est dite *n-fois continûment différentiable en a* (*sur E, sur D_f*) si d'une part elle est n-fois différentiable en a (sur E, sur D_f), et si d'autre part $f^{(n)}$ est continue en a (sur E, sur D_f).

L'ex. de la fig. A montre qu'une fonction différentiable n'est pas toujours continûment différentiable. Les fonctions n-fois différentiables pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont dites *indéfiniment différentiables*. C'est le cas par ex. de toutes les fonctions rationnelles sur leur domaine de déf. (fig. B).

Différentiation graphique

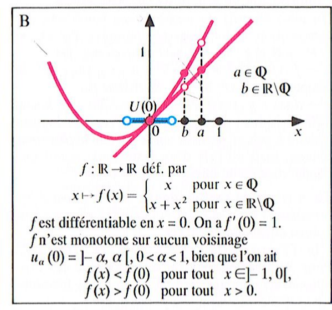
En pratique on a souvent à étudier des graphes, relevés sur feuilles, de fonctions différentiables dont on ne connaît aucune autre propriété ; il est alors impossible de calculer leurs dérivées. Mais si le relevé est soigné, on peut tracer des tangentes à vue d'œil avec une bonne précision, et construire ainsi graphiquement, point par point, les dérivées désirées. La fig. C montre le procédé utilisé : on mène par le point $(-1, 0)$ la parallèle à la tangente à la courbe en $(x, f(x))$, qui coupe l'axe des ordonnées en $(0, f'(x))$.

A



La fonction différentiable f est monotone strictement croissante pour $x < a$, avec $f'(x) > 0$; elle est monotone strictement décroissante pour $a < x < b$, avec $f'(x) < 0$; elle est monotone croissante pour $x > b$, avec $f'(x) \geqslant 0$.
Pour $x = a$, f admet un maximum local ;
pour $x = b$, f admet un minimum local.
On a : $f'(a) = f'(b) = 0$.

Propriétés de monotonie et dérivée

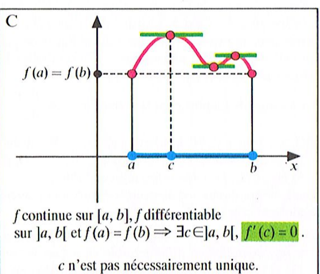


$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déf. par

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in \mathbb{Q} \\ x + x^2 & \text{pour } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

f est différentiable en $x = 0$. On a $f'(0) = 1$.
f n'est monotone sur aucun voisinage $u_\alpha(0) =]-\alpha, \alpha[$, $0 < \alpha < 1$, bien que l'on ait
$f(x) < f(0)$ pour tout $x \in]-1, 0[$,
$f(x) > f(0)$ pour tout $x > 0$.

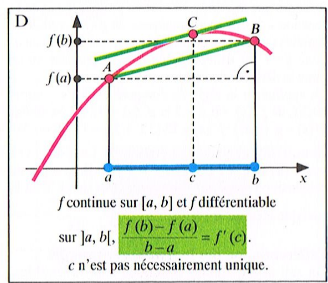
Fonction différentielle en 0 mais non monotone



f continue sur $[a, b]$, f différentiable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.

c n'est pas nécessairement unique.

Théorème de ROLLE

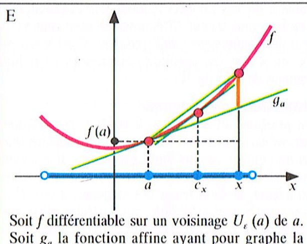


f continue sur $[a, b]$ et f différentiable sur $]a, b[$, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

c n'est pas nécessairement unique.

Théorème des accroissements finis

E

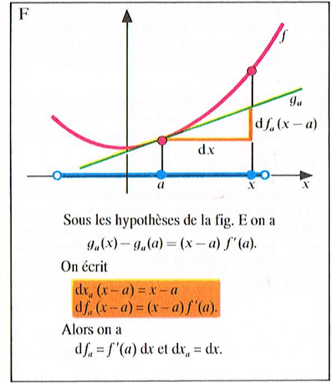


Soit f différentiable sur un voisinage $U_\varepsilon(a)$ de a. Soit g_a la fonction affine ayant pour graphe la tangente en $(a, f(a))$ au graphe de f.
Alors f est approchée par g_a. De

$f(x) = f(a) + (x - a)\, f'(c_x)$ avec $x \in U_\varepsilon(a)$,
$g_a(x) = f(a) + (x - a)\, f'(a)$ on déduit
$f(x) - g_a(x) = (x - a)\,(f'(c_x) - f'(a))$,

c.-à-d. que l'approximation est d'autant meilleure que $x - a$ et $f'(c_x) - f'(a)$ sont petits.

Approximation



Sous les hypothèses de la fig. E on a
$g_a(x) - g_a(a) = (x - a)\, f'(a)$.
On écrit
$dx_a(x - a) = x - a$
$df_a(x - a) = (x - a)\, f'(a)$.
Alors on a
$df_a = f'(a)\, dx$ et $dx_a = dx$.

Différentielle

Extremums locaux, théorème de ROLLE

La différentiabilité d'une fonction f est une propriété locale, cependant il existe un lien étroit entre la dérivée d'une fonction en un point a et ses variations au voisinage de a (fig. A). Dans certaines conditions on peut même exprimer la valeur d'une fonction sur l'ensemble de son domaine de déf. à l'aide de ses dérivées successives en un seul point (p. 301).

Th. 1 : *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en a ;*
si f est monotone croissante sur un voisinage $U_\varepsilon(a)$ alors $f'(a) \geq 0$,
si f est monotone décroissante sur un voisinage $U_\varepsilon(a)$ alors $f'(a) \leq 0$.

Par contre, si $f'(a) \neq 0$ on ne peut pas en déduire la monotonie de f sur un voisinage de a, comme le montre l'ex. fig. B. On dispose cependant du th. suivant :

Th. 2 : *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en a ; si $f'(a) > 0$, il existe un voisinage $U_\varepsilon(a)$ tel que $\forall x \in U_\varepsilon(a)$, $(x < a \Rightarrow f(x) < f(a))$ et $(x > a \Rightarrow f(x) > f(a))$.*

On déduit facilement un th. analogue pour une valeur négative de la dérivée. Pour conclure sur une éventuelle monotonie, il faut des conditions plus restrictives (*cf.* th. 7).

Déf. : $f : D_f \to \mathbb{R}$ admet en $c \in D_f$ un *extremum local* s'il existe un voisinage $U_\varepsilon(c)$ tel que :
$f(c) = \max\left(f\left(U_\varepsilon(c)\right)\right)$ ou
$f(c) = \min\left(f\left(U_\varepsilon(c)\right)\right)$. Si $\forall x \in U_\varepsilon(c) \setminus \{c\}$, $f(x) \neq f(c)$ l'extremum est dit *strict*.

Th. 3 : *Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ admet en $c \in D_f$, un extremum local, alors $f'(c) = 0$.*

La réciproque de ce th. est fausse, comme le montre l'ex. de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^3$, considérée au point $x = 0$: on a bien $f'(0) = 0$ mais il n'y a pas d'extremum local. Par ailleurs, le fait qu'une fonction définie et continue sur un segment atteigne son maximum et son minimum permet d'aller plus loin :

Th. 4 (th. de ROLLE) : *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, différentiable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Rem. : En pratique un cas particulier est très important :
En prenant $f(a) = f(b) = 0$, le th. de ROLLE montre qu'entre deux zéros d'une fonction remplissant les conditions requises, il existe toujours un point d'annulation de sa dérivée.

Th. des accroissements finis

Le th. de ROLLE amène d'importantes généralisations.

Th. 5 (th. des accroissements finis) : *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et si elle est différentiable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Sur le graphe de la fonction, il existe donc un point C situé entre $A\,(a, f(a))$ et $B\,(b, f(b))$ tel que la tangente à la courbe en C soit parallèle à la droite dr (A, B) (fig. D).

Th. 6 (th. des accroissements finis généralisé) : *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues, si elles sont différentiables sur $]a, b[$, si $g(a) \neq g(b)$ et si $\forall x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Pour démontrer le premier (resp. second) de ces th., on considère la fonction auxiliaire $h_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $x \to h_1(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$ (resp. $h_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto h_2(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$ à laquelle on applique le th. de ROLLE. Le th. 5 donne un critère de monotonie pour une fonction :

Th. 7 : *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, si elle est différentiable sur $]a, b[$ et si $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$), alors f est monotone croissante (resp. strictement croissante).*

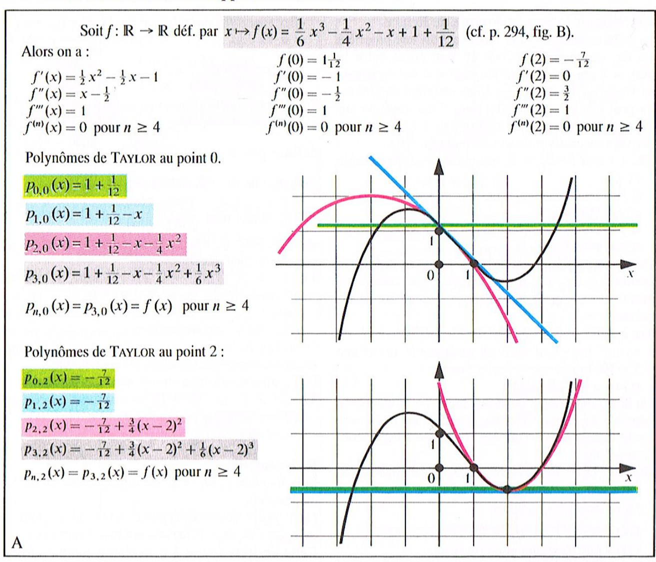
On déduit facilement un th. analogue pour la décroissance (ou décroissance stricte) d'une fonction.
Le th. suivant constitue un important cas particulier :

Th. 8 : *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, si elle est différentiable sur $]a, b[$ et si $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$, alors f est constante.*

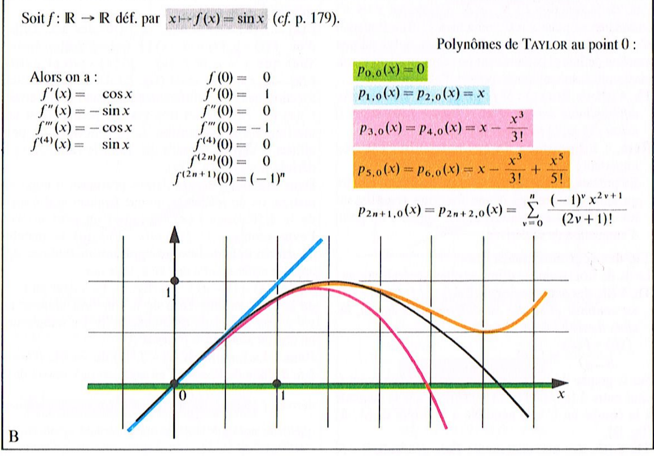
Différentielle

Si la fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in D_f$, on peut écrire
$f(x) - f(a) = (x - a)\,\overline{m}_a(x) = (x - a)\,[f'(a) + \varepsilon_a(x)]$
où $\varepsilon_a(x) = \overline{m}_a(x) - f'(a)$ est continue et nulle en a.
Cette écriture incite à considérer comme approximation affine de f sur un voisinage de a la fonction $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_a(x) = f(a) + (x - a)\, f'(a)$.
Si f est différentiable sur un intervalle ouvert contenant a, on peut écrire
$f(x) = f(a) + (x - a)\, f'(c_x)$ (th. des acc. finis),
d'où $f(x) - g_a(x) = (x - a)\,[f'(c_x) - f'(a)]$.
Tant que $x - a$ et $f'(x) - f'(a)$ restent petits, $f(x) - g_a(x)$ l'est aussi (fig. E). Dans le cas d'une fonction deux fois différentiable, quand la différence $f'(x) - f'(a)$ devient trop grande, pour obtenir une meilleure approximation de la fonction, on peut utiliser la dérivée seconde qui décrit la variation de la dérivée première (p. 299).
Dans beaucoup de problèmes pratiques d'approximation, on ne recherche qu'une évaluation grossière de la différence $f(x) - f(a)$ et on peut utiliser l'expression $g_a(x) - f(a) = (x - a)\, f'(a)$. Le membre de droite définit ici une application linéaire df_a, appelée *différentielle* de f en a, telle que
$df_a(x - a) = (x - a)\, f'(a)$ (fig. F). La valeur en $x - a$ de la différentielle en a de la fonction identité est $x - a$; on note cette différentielle dx. En remplaçant, on obtient alors $df_a = f'(a)\, dx$.

Rem. : La formule $df(x) = f'(x)\, dx$ semble pouvoir être déduite de l'écriture en notation de LEIBNIZ de la dérivée $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ (p. 293) ; on a vu plus haut que cette notation était en fait purement symbolique : l'écriture de la dérivée sous forme de quotient de différentielles n'était due qu'à des raisons historiques.



Polynômes de Taylor d'une fonction polynomiale



Polynômes de Taylor de la fonction sinus

Polynômes et restes de Taylor

Pour approcher une fonction f différentiable au voisinage d'un point a, on peut comme en p. 297 utiliser l'expression $f(a) + (x-a)f'(a)$. L'ex. des fonctions polynomiales montre qu'on peut améliorer la précision de l'approximation si l'on connaît les valeurs des dérivées d'ordre supérieur en a. Si une telle fonction est définie par $x \mapsto f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ alors $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2!\,a_2$, …, $f^{(n)}(0) = n!\,a_n$ et l'on peut écrire

$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$. Plus généralement, pour un point a quelconque on prouve que :

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu.$$

L'erreur commise lors de l'approximation peut ici être annulée : la fonction est entièrement déterminée par les valeurs de ses dérivées en un seul point a.

Les valeurs des dérivées au point a d'une fonction quelconque étant connues jusqu'à l'ordre n, on peut se demander si la somme définie ci-dessus est une approximation convenable de la fonction au voisinage de a.

Déf. 1 : Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ est n-fois différentiable au point $a \in D_f$ $(n \in \mathbb{N})$, on appelle :

$$p_{n,a}(x) := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$$

$n^{\text{ième}}$ polynôme de Taylor de f développée au point a, et $r_{n,a}(x) := f(x) - p_{n,a}(x)$ *$n^{\text{ième}}$ reste de Taylor de f développée au point a.*

Le polynôme d'approximation $f(a) + (x-a)f'(a)$ introduit plus haut est ainsi le premier polynôme de Taylor de f. La fig. A donne un ex. de polynômes de Taylor d'une fonction polynomiale. Le $n^{\text{ième}}$ reste de Taylor définit une fonction s'annulant en a et continue en a.

En fait il possède une propriété plus forte :

Th. 1 : *Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ est n-fois différentiable au point $a \in D_f$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, si a est un point intérieur à D_f et si f est $(n-1)$-fois différentiable sur un voisinage de a, alors* $\lim_{x \to a} \frac{r_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$.

On dit alors aussi que le $n^{\text{ième}}$ reste de Taylor est *un infiniment petit d'ordre strictement supérieur à n* en a, ou encore que $p_{n,a}(x)$ est *une approximation de $f(x)$ d'ordre strictement supérieur à n* en a.

Le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Taylor est donc en général une approximation d'autant meilleure que n est grand (ex. fig. B). Pour obtenir des énoncés d'approximation plus précis, il faut étudier le $n^{\text{ième}}$ reste de Taylor. Dans le cas des fonctions $(n+1)$-fois différentiables, cette étude est facilitée grâce aux résultats suivants issus de l'application du th. des accroissements finis :

Th. 2 : *Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ est $(n+1)$-fois différentiable sur un intervalle ouvert contenant a $(n \in \mathbb{N})$, alors pour tout x de cet intervalle :*

$$r_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{n!}(1-\vartheta)^n (x-a)^{n+1}$$

(écriture de Cauchy du reste de Taylor),

$$r_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \bar{\vartheta}(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(écriture de Lagrange du reste de Taylor),
où $\vartheta, \bar{\vartheta} \in]0, 1[$.

Rem. : Si $a = 0$, on obtient les cas particuliers suivants :

$$r_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{n!}(1-\vartheta)^n x^{n+1},$$

$$r_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{\vartheta} x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Le th. suivant montre que le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Taylor associé à une fonction (satisfaisant aux conditions précisées ci-dessous) peut être caractérisé comme l'unique polynôme de degré n approchant cette fonction à un ordre $> n$:

Th. 3 : *Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ est n-fois différentiable au voisinage du point $a \in D_f$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et s'il existe un polynôme de degré n, $p(x)$, tel que $\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n}$ définisse une fonction continue vérifiant*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n} = 0, \text{ alors } p(x) = p_{n,a}(x).$$

Par contre, si l'on se donne d'autres critères d'approximation (par ex. convergence uniforme d'une suite de polynômes vers la fonction sur un intervalle), on obtient des polynômes différents (*cf.* p. 313).

Application aux extremums locaux

On a trouvé plus haut (p. 297) une condition *nécessaire* pour qu'une fonction différentiable f admette un extremum au point c : $f'(c) = 0$.

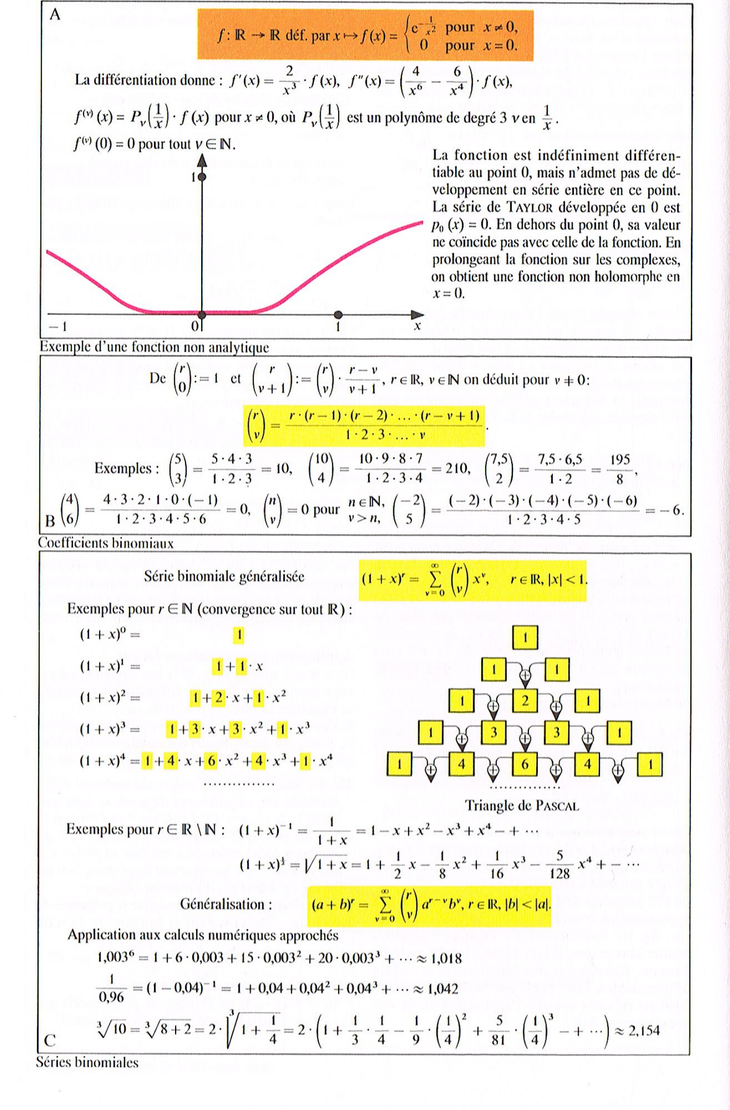
Si l'on connaît de plus les dérivées d'ordre supérieur au point c, on peut formuler des conditions *suffisantes* qui garantissent que $f'(x)$ change de signe au point c.

Th. 4 : *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ n-fois continûment différentiable sur un voisinage du point c, telle que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $f^{(k)}(c) = 0$ et $f^{(n)}(c) \neq 0$. Si n est pair et $f^{(n)}(c) > 0$ alors f admet en c un minimum local strict. Si n est pair et $f^{(n)}(c) < 0$ alors f admet en c un maximum local strict. Si n est impair, f n'admet pas d'extremum local en c.*

Pour montrer ce résultat, on considère le polynôme de Taylor $p_{n-1,c}(x) = f(c)$ et le reste de Taylor

$$r_{n-1,c}(x) = f(x) - f(c) = \frac{f^{(n)}(c + \vartheta(x-c))}{n!}(x-c)^n$$

et l'on remarque que sur un voisinage de c $f^{(n)}(c + \vartheta(x-c))$ est du signe de $f^{(n)}(c)$ tandis que $(x-c)^n$ ne change de signe en c que si n est impair.



Exemple d'une fonction non analytique

Coefficients binomiaux

Séries binomiales

Séries de TAYLOR

Toute fonction au moins une fois différentiable peut être approchée par un de ses polynômes de TAYLOR ; on peut se demander si, dans le cas d'une fonction indéfiniment différentiable, l'approximation par $p_{n,a}(x)$ peut être améliorée à volonté, c.-à-d. si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et tout intervalle I de D_f contenant a, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in I$, $|r_{n,a}(x)| < \varepsilon$. On verra que cette propriété, non vérifiée en général, caractérise une classe particulièrement importante de fonctions.

Déf. 2 : Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ est indéfiniment différentiable au point $a \in D_f$, on appelle

$$p_a(x) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu \quad \textit{série de } \text{TAYLOR}$$

de f développée au point a.

Le polynôme de TAYLOR $p_{n,a}(x)$ représente pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme partielle de la série de TAYLOR.

La série de TAYLOR converge évidemment vers $f(a)$ en $x = a$, mais elle n'est pas nécessairement convergente ailleurs. D'autre part, si elle converge en x, ce n'est pas toujours vers $f(x)$ comme le montre l'ex. suivant :

soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pour } x \neq 0 \quad \text{(fig. A).} \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

f est indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(\nu)}(0) = 0$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$. La série de TAYLOR développée au point $a = 0$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers la valeur 0, donc $p_0(x) \neq f(x)$ pour tout $x \neq 0$. $r_{n,0}(x)$ coïncide ici avec $f(x)$ pour tout x et ne converge donc pas vers 0 quand n croît indéfiniment.

Fonctions analytiques

Pour caractériser les fonctions qui n'ont pas un tel comportement singulier, il faut d'abord remarquer que les séries de TAYLOR sont des séries entières (déf. 13, p. 289).

Déf. 3 : En rappelant que D_f° désigne l'intérieur de D_f, $f : D_f \to \mathbb{R}$ est dite *analytique en* $a \in D_f^\circ$ si f est développable en série entière autour du point a,

c.-à-d. s'il existe une série entière $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x-a)^\nu$ convergeant vers $f(x)$ sur un voisinage de a. f est dite *analytique sur* D_f° si f est analytique en tout point $a \in D_f^\circ$.

Si f est analytique en a, la série entière en $(x-a)$ qui développe f autour de a a une somme qui coïncide avec f sur un intervalle ouvert J contenant a, J étant inclus à la fois dans D_f° et dans l'intervalle de convergence de la série. On peut montrer qu'en tout point de J, f est analytique.

Th. 5 : *Une série entière* $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (x-a)^\nu$ *dont le rayon de convergence n'est pas nul définit une fonction différentiable f, telle que :*

$$f'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu (x-a)^{\nu-1}.$$

Les deux séries ont le même rayon de convergence.

Une fonction analytique est donc différentiable, sa dérivée s'obtient en *dérivant terme à terme* sa série entière, et c'est encore une fonction analytique. Finalement, toute fonction analytique est indéfiniment différentiable, et on peut donc lui associer sa série de TAYLOR en tout point $a \in D_f^\circ$. On a le théorème d'unicité suivant :

Th. 6 : *Le développement en série entière d'une fonction analytique f autour d'un point* $a \in D_f^\circ$ *coïncide avec son développement en série de* TAYLOR *au point a.*

Pour une fonction analytique, un comportement singulier analogue à celui de l'ex. de la fig. A est ainsi exclu. Cette dernière fonction n'est sûrement pas analytique au point $x = 0$ bien qu'elle y soit indéfiniment différentiable. Elle est pourtant analytique en tout autre point $a \in \mathbb{R}$, mais le rayon de convergence de la série entière correspondante est $|a|$ de sorte que le point $x = 0$ se trouve à la frontière de l'intervalle de convergence. Ce comportement ne peut être expliqué de façon satisfaisante que par l'étude des fonctions complexes (théorie des fonctions, p. 437). L'analyse réelle fournit cependant des conditions suffisantes d'analyticité d'une fonction, par ex. :

Th. 7 : *Si les dérivées successives d'une fonction f indéfiniment différentiable sur un intervalle* $[a, b]$ *sont uniformément minorées, c.-à-d. s'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $f^{(n)}(x) > m$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in [a, b]$, *alors f est analytique sur* $]a, b[$.

Les hypothèses sont en particulier vérifiées si toutes les dérivées sont positives. On énonce un th. analogue dans le cas d'une majoration uniforme.

Séries binomiales

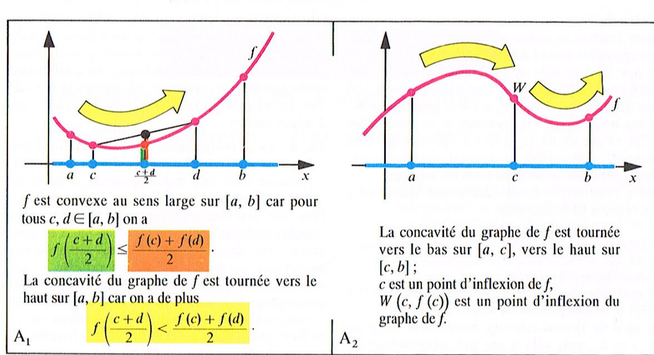
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto (1+x)^n$ se développe facilement en série entière autour de 0 pour $n \in \mathbb{N}$. On a $(1+x)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n}{\nu} x^\nu$.

Les *coefficients binomiaux* $\binom{n}{\nu}$ sont définis inductivement par $\binom{n}{0} := 1$, $\binom{n}{\nu+1} := \binom{n}{\nu} \cdot \frac{n-\nu}{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

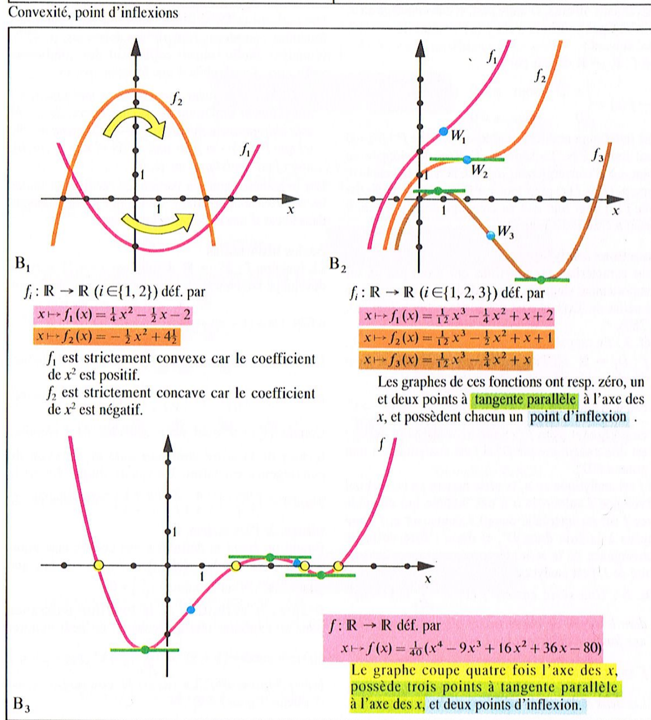
Comme $\binom{n}{\nu} = 0$ pour $\nu > n$, seuls les $n+1$ premiers termes de la série sont non nuls et le rayon de convergence est infini. Un calcul simple établit la propriété $\binom{n}{\nu} + \binom{n}{\nu+1} = \binom{n+1}{\nu+1}$, illustrée par le triangle de PASCAL (tab. C).

Quand on étend la définition des coefficients binomiaux à tout nombre réel r (tab. B), on constate que pour $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ on a toujours $\binom{r}{\nu} \neq 0$.

D'après la définition de la fonction puissance pour un exposant réel quelconque, on peut montrer qu'on a encore $(1+x)^r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{r}{\nu} x^\nu$ pour $|x| < 1$ *(série binomiale)*. Le rayon de convergence est d'ailleurs 1 pour $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.



Convexité, point d'inflexions



Graphes de fonctions polynomiales

Fonctions polynomiales

Parmi les fonctions élémentaires on trouve les *fonctions polynomiales* définies sur $\mathbb{R}$ par

$f = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (1_\mathbb{R})^\nu$ (p. 283). Si $a_n \neq 0$, n est appelé *degré de la fonction*. Les fonctions constantes non nulles sont donc de degré 0, le degré de la fonction 0 (fonction nulle) étant indéfini.

Le graphe d'une fonction polynomiale du $n^{\text{ième}}$ degré est appelé *parabole du $n^{\text{ième}}$ ordre*.

Une fonction polynomiale est différentiable : de

$f = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (1_\mathbb{R})^\nu$, on tire $f' = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu (1_\mathbb{R})^{\nu-1}$

si $n \in \mathbb{N}^*$, $f' = 0$ si $n = 0$. On remarque que la dérivée est elle-même une fonction polynomiale, de sorte qu'une fonction polynomiale est indéfiniment différentiable.

Zéros et extremums locaux

L'écriture explicite $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ relative à une fonction polynomiale justifie la qualification de celle-ci et permet de faire appel aux propriétés des polynômes de $\mathbb{R}[x]$. Si l'on définit les *zéros de f* comme les solutions de l'équation $f(x) = 0$, le th. 7 p. 96 assure alors qu'une fonction polynomiale du $n^{\text{ième}}$ degré admet au plus n zéros. Plus précisément, si l'on a $n > 0$, le second membre se décompose en un produit de facteurs affines ou quadratiques irréductibles, et si n est impair f admet au moins un zéro (p. 67).

La dérivée d'une fonction polynomiale f du $n^{\text{ième}}$ degré $(n > 0)$ est de degré $n - 1$. Ses zéros sont les abscisses des points à tangente horizontale du graphe de f, parmi lesquels figurent les extremums locaux de f ; f possède donc au plus $n - 1$ extremums locaux. Si n est pair, on montre aisément qu'il existe au moins un extremum local.

Points d'inflexion

La dérivée seconde fournit également des renseignements importants sur les graphes des fonctions.

Déf. 1 : $f : D_f \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* sur l'intervalle $[a, b] \subseteq D_f$ si f est continue sur $]a, b[$ et si

$$\forall c, d \in [a, b], f\left(\frac{c+d}{2}\right) \leqslant \frac{f(c)+f(d)}{2} \text{ (fig. } A_1\text{)}.$$

Si l'on remplace l'inégalité large par une inégalité stricte pour $c \neq d$, on exclut le cas des fonctions affines ; on dit que la fonction est *strictement convexe* et que la *concavité* de son graphe est *tournée vers le haut*. Si l'on change le sens de l'inégalité, la fonction est dite *concave* (resp. *strictement concave, concavité tournée vers le bas*).

Th. 1 : *Si une fonction f est continue sur $[a, b]$ et deux fois différentiable sur $]a, b[$, alors les trois énoncés suivants sont équivalents :*
(1) f est convexe sur $[a, b]$
(2) f' est croissante sur $]a, b[$
(3) f'' est positive sur $]a, b[$.

On déduit facilement un th. analogue pour la concavité.

Si une fonction est strictement convexe (concavité du graphe tournée vers le haut) d'un côté d'un point c de son ensemble de définition et strictement concave (concavité du graphe tournée vers le bas) de l'autre côté, c $\left(\text{resp. } \left(c, f(c)\right)\right)$ est appelé *point d'inflexion* de la fonction (resp. du graphe de la fonction) (fig. A_2).

Th. 2 : *Une condition nécessaire pour que $c \in D_f^\circ$ soit un point d'inflexion d'une fonction f deux fois différentiable est que $f''(c) = 0$. Si f est trois fois différentiable, une condition suffisante est que $f''(c) = 0$ et $f'''(c) \neq 0$.*

Une fonction polynomiale du $n^{\text{ième}}$ degré $(n > 1)$ possède au plus $n - 2$ points d'inflexion. Une fonction quadratique définie par $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ne possède pas de point d'inflexion, elle est strictement convexe si $a_2 > 0$, strictement concave si $a_2 < 0$ (fig. B_1).

Comportement pour x grand

Pour $x \neq 0$, on peut écrire $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ sous la forme $f(x) = x^n g(x)$

avec $g(x) = \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + a_n$, de sorte que

$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = a_n$. En utilisant la fonction sgn(x) (voir fig. A_3 p. 282), on obtient ainsi le th. suivant :

Th. 3 : *Pour une fonction polynomiale f du $n^{\text{ième}}$ degré, on a :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \operatorname{sgn}(a_n) \cdot (+\infty)$$

pour n pair,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\lim_{x \to -\infty} f(x) = \operatorname{sgn}(a_n) \cdot (+\infty)$$

pour n impair.

Fonctions rationnelles

Les *fonctions rationnelles* sont définies comme quotients de fonctions polynomiales (p. 283). Une fonction rationnelle f s'écrit donc :

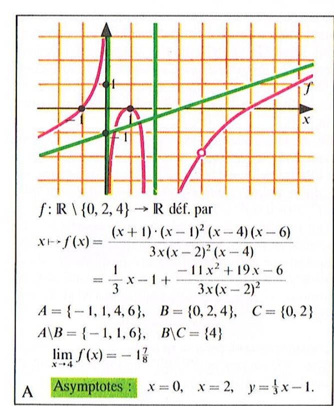
$f = \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (1_\mathbb{R})^\nu\right) \cdot \left(\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu (1_\mathbb{R})^\mu\right)^{-1}$ et son domaine de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus B$ où B est l'ensemble des zéros du dénominateur. D'après la règle du quotient (p. 293), f est différentiable sur D_f et sa dérivée est encore une fonction rationnelle.

Si A est l'ensemble des zéros du numérateur, $A \setminus B$ est l'ensemble des zéros de f. Si c est un zéro d'ordre p $(p \in \mathbb{N}^*)$ du dénominateur qui n'annule pas le numérateur ou qui est un zéro d'ordre au plus $p - 1$ $(p \neq 1)$ du numérateur, alors on a :

$\lim_{x \to c} |f(x)| = +\infty$ et c est appelé *pôle* de f. Si C est l'ensemble des pôles de f, alors $C \subseteq B$.

Suivant que les valeurs de f gardent ou non le même signe sur un voisinage épointé de c suffisamment petit, on distingue les pôles *sans changement de signe* et les pôles *avec changement de signe* (fig. A, p. 304).

f est continûment prolongeable en tout point de $B \setminus C$, comme le montre une décomposition en facteurs irréductibles du numérateur et du dénominateur suivie d'une simplification de la fraction.



$f : \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 4\} \to \mathbb{R}$ déf. par

$$x \mapsto f(x) = \frac{(x+1)\cdot(x-1)^2\,(x-4)\,(x-6)}{3x(x-2)^2\,(x-4)}$$
$$= \frac{1}{3}\,x - 1 + \frac{-11\,x^2 + 19\,x - 6}{3x(x-2)^2}$$

$A = \{-1, 1, 4, 6\}, \quad B = \{0, 2, 4\}, \quad C = \{0, 2\}$

$A \setminus B = \{-1, 1, 6\}, \quad B \setminus C = \{4\}$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -1\tfrac{7}{8}$

A Asymptotes : $x = 0, \quad x = 2, \quad y = \tfrac{1}{3}x - 1.$

Graphe d'une fonction rationnelle avec ses asymptotes

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x}{1} = 2$

(2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{2x + 2} = \infty$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{\cos x} = 1$

(5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 6x}{3x^2 - 4x - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{6x - 6}{6x - 4} = \dfrac{3}{4}$

(6) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{-x}}{3x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-e^{-x}}{3} = 0$

(7) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\left|x - \frac{\pi}{2}\right|}{\tan x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-2\cos x \sin x}{1} = 0$

B

Applications de la règle DE L'HOSPITAL

Pour $f(x) = \dfrac{x + 15}{(x+3)(x-1)}$ on écrit la décomposition

$$f(x) = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + b(x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{(a+b)\,x + (-a+3b)}{(x+3)(x-1)}.$$

Le système d'équations $a + b = 1 \wedge -a + 3\,b = 15$ admet le couple $(-3, 4)$ pour solution, de sorte que $f(x) = -\dfrac{3}{x+3} + \dfrac{4}{x-1}$.

Par des décompositions analogues conformes au th. 6, on obtient par ex. :

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{(x-1)^2\,(x+1)\,(x-6)}{3x(x-2)^2} = \frac{1}{3}\,x - 1 - \frac{1}{2x} - \frac{19}{6(x-2)} - \frac{2}{(x-2)^2} \quad (\textit{cf. fig. A})$$

$$\frac{15x - 26}{(x-4)(x^2+1)} = \frac{2}{x-4} + \frac{7-2x}{x^2+1}$$

C

Décompositions en éléments simples

fonction en numérateur	fonction en dénominateur	exemple le plus simple d'une telle fonction
constante	puissance impaire d'une fonction polynomiale du 1er degré	$f_1(x) = \dfrac{1}{x}$
constante	puissance paire d'une fonction polynomiale du 1er degré	$f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$
constante	puissance d'une fonction polynomiale du 2e degré sans zéro réel	$f_3(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
fonction polynomiale 1er degré		$f_4(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

f_1 f_2 f_3 f_4 1 1 x

D

Types de fonctions rationnelles obtenues dans la décomposition en éléments simples

Asymptotes

Le comportement d'une fonction rationnelle au voisinage d'un pôle c se caractérise par le fait qu'un point de son graphe dont l'abscisse tend vers c se rapproche indéfiniment de la perpendiculaire en $(c, 0)$ à l'axe des abscisses tout en s'éloignant indéfiniment de celui-ci. Plus généralement, on peut observer un tel comportement de graphe de fonction vis-à-vis de droites non perpendiculaires à l'axe des abscisses.

Déf. 2 : Une droite est appelée *asymptote* du graphe d'une fonction f si elle remplit l'une des deux conditions suivantes :

(1) elle est perpendiculaire à l'axe, des abscisses au point $(a, 0)$ et $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$ (*asymptote verticale*).

(2) elle est le graphe d'une fonction affine l telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} (f - l)(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} (f - l)(x) = 0$$

(*asymptote oblique*, ou *horizontale* si l est constante).

Rem. : D'un point de vue projectif, une asymptote peut être considérée comme une tangente au graphe en un point à l'infini du graphe.

Le graphe d'une fonction rationnelle f peut comporter, outre les asymptotes verticales en chaque pôle, une asymptote oblique ou horizontale (fig. A). En étudiant le comportement de f pour x grand comme on l'a fait précédemment avec les fonctions polynomiales (p. 303), on obtient :

si $n < m$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$;

si $n = m$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_m}$;

si $n > m$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty$.

Dans le premier cas, l'axe des abscisses est une asymptote horizontale ; dans le deuxième cas la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point $\left(0, \dfrac{a_n}{b_m}\right)$ est une asymptote horizontale ; dans le dernier cas on effectue la division euclidienne polynomiale $\dfrac{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu}{\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu} = r(x) + \dfrac{\sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu x^\nu}{\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu}$, où $r(x)$ définit une fonction polynomiale de degré $n - m$. Si $n = m + 1$, le graphe de r est une asymptote oblique du graphe de f puisque le dernier terme de l'équation précédente tend vers 0 quand $|x|$ croît indéfiniment. Si $n > m + 1$, le graphe de r est une courbe d'approximation parabolique du graphe de f.

Règles de DE L'HOSPITAL

On a vu p. 303 dans quelle mesure on pouvait prolonger continûment un quotient de fonctions polynomiales en un zéro commun au numérateur et au dénominateur, en utilisant les décompositions en facteurs irréductibles des polynômes. Dans le cas d'un quotient de fonctions quelconques on dispose des deux règles suivantes en général très efficaces :

Th. 4 : *Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, c]$ et différentiables sur $]a, c[$. On suppose que $f(c) = g(c) = 0$ et que $g'(x) \neq 0$ sur $]a, c[$. Alors $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f}{g}(x) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'}{g'}(x)$ si cette seconde limite existe.*

Si f et g sont continûment différentiables en c avec $g'(c) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'}{g'}(x)$ existe et vaut $\dfrac{f'}{g'}(c)$ (tab. B (1) à (4)). Pour trouver $\dfrac{f'}{g'}(c)$ on peut appliquer de nouveau le même procédé si les fonctions s'y prêtent (tab. B (5)).

Par ailleurs, on peut généraliser ce th. : par ex., si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ et si $g'(x) \neq 0$ pour x assez grand, alors $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f}{g}(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'}{g'}(x)$ si cette seconde limite existe.

Th. 5 : *Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, c]$ et différentiables sur $]a, c[$. On suppose que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$ et que $g'(x) \neq 0$ sur $]a, c[$. Alors $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f}{g}(x) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'}{g'}(x)$ si cette seconde limite existe (tab. B (5), (6)).*

Décomposition en éléments simples

Le graphe d'une fonction rationnelle est un cas particulier de courbe algébrique (p. 307). Pour en simplifier l'étude, on peut procéder à une *décomposition en éléments simples* de la fonction. Par ex., la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{3x - 5}{(x-1)(x-2)}$ peut s'écrire sous la forme

$f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$ pour tout $x \in D_f$ si l'on prend $a = 2$ et $b = 1$. Une telle écriture est toujours possible si le dénominateur est décomposable en produit de fonctions affines indépendantes deux à deux ; sinon des dénominateurs de degré supérieur à un vont intervenir dans la décomposition en éléments simples (tab. C).

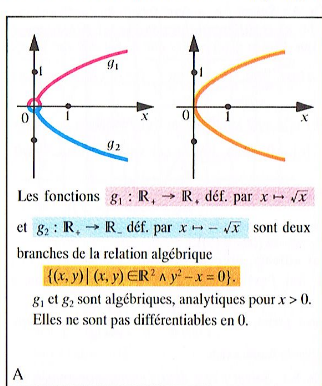
Th. 6 : *Si le dénominateur d'une fonction rationnelle f irréductible s'écrit :*

$$\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu = \prod_{\rho=1}^{t} l_\rho(x)^{c_\rho} \cdot \prod_{\sigma=1}^{s} q_\sigma(x)^{d_\sigma} \quad \textit{où les}$$

fonctions non constantes l_ρ affines et q_σ quadratiques $\mathbb{R}$-irréductibles sont indépendantes deux à deux, alors il existe une fonction polynomiale r et des réels $A_{\rho\nu}$, $B_{\sigma\nu}$, $C_{\sigma\lambda}$ avec $\rho \in \{1, \ldots, t\}$, $\nu \in \{1, \ldots, c_\rho\}$, $\sigma \in \{1, \ldots, s\}$, $\lambda \in \{1, \ldots, d_\sigma\}$, tels que :

$$f(x) = r(x) + \sum_{\rho=1}^{t} \sum_{\nu=1}^{c_\rho} \frac{A_{\rho\nu}}{l_\rho(x)^\nu} + \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\lambda=1}^{d_\sigma} \frac{B_{\sigma\lambda} + C_{\sigma\lambda}\,x}{q_\sigma(x)^\lambda}.$$

Les termes de cette somme, dits *éléments simples*, ont des graphes faciles à étudier (fig. D).



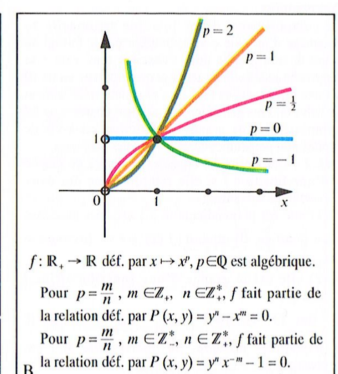
Les fonctions $g_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ déf. par $x \mapsto \sqrt{x}$ et $g_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$ déf. par $x \mapsto -\sqrt{x}$ sont deux branches de la relation algébrique

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y^2 - x = 0\}$.

g_1 et g_2 sont algébriques, analytiques pour $x > 0$. Elles ne sont pas différentiables en 0.

A

Relations algébriques et fonctions



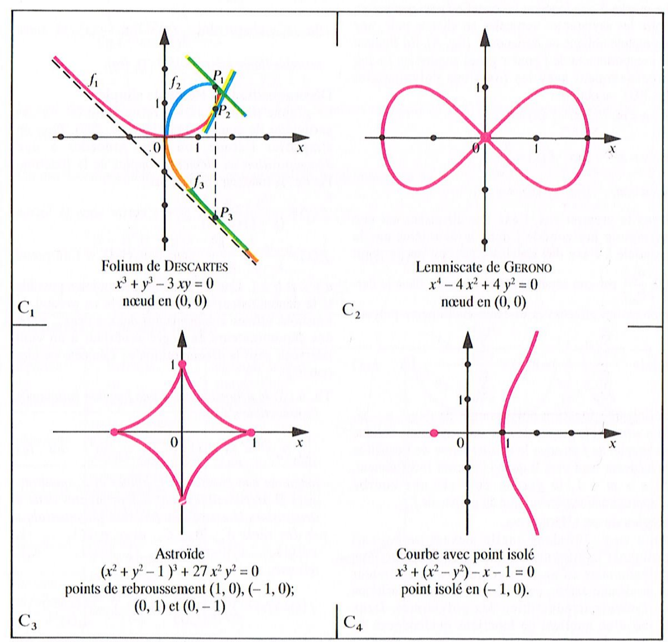
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ déf. par $x \mapsto x^p$, $p \in \mathbb{Q}$ est algébrique.

Pour $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}^*_+$, f fait partie de la relation déf. par $P(x, y) = y^n - x^m = 0$.

Pour $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}^*_-$, $n \in \mathbb{Z}^*_+$, f fait partie de la relation déf. par $P(x, y) = y^n x^{-m} - 1 = 0$.

B

Fonctions puissances rationnelles



Folium de DESCARTES
$x^3 + y^3 - 3xy = 0$
nœud en (0, 0)

C_1

Lemniscate de GERONO
$x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0$
nœud en (0, 0)

C_2

Astroïde
$(x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0$
points de rebroussement (1, 0), (– 1, 0); (0, 1) et (0, – 1)

C_3

Courbe avec point isolé
$x^3 + (x^2 - y^2) - x - 1 = 0$
point isolé en (– 1, 0).

C_4

Courbes algébriques

Relations et fonctions algébriques

Outre les fonctions rationnelles, de nombreuses fonctions non rationnelles jouent un rôle dans les mathématiques pures et leurs applications. Les plus simples sont les fonctions réciproques de fonctions rationnelles.

Ainsi la fonction $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$ définie par $x \mapsto x^2$ admet pour réciproque la fonction $g_1 : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$ définie par $x \mapsto \sqrt{x}$. Tout couple (x, y) vérifiant $y = g_1(x)$ satisfait à l'équation $y^2 - x = 0$, qui définit une relation sur $\mathbb{R}$ contenant en particulier la fonction g_1 mais aussi d'autres fonctions, par ex. $g_2 : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_-$ telle que $g_2(x) = -\sqrt{x}$ ou $h : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{pour } x \in \mathbb{Q}^*_+ \\ -\sqrt{x} & \text{pour } x \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \mathbb{Q}^*_+ \end{cases}.$$

Alors que h est discontinue en tout point et donc d'un intérêt limité, g_1 et g_2 sont différentiables en tout point, avec, d'après le th. 7 p. 295 :

$$g_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g_2'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Au-delà de cet exemple relativement simple, il convient de remarquer qu'une fonction réciproque de fonction rationnelle ne peut pas toujours être explicitée à l'aide des quatre opérations usuelles complétées par les exponentiations rationnelles. En fait, on est amené à définir une nouvelle classe de fonctions plus générale.

Déf. 1 : Si $P(x, y)$ est un polynôme de $\mathbb{R}[x, y]$, alors l'ensemble $\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge P(x, y) = 0\}$ est appelé *relation algébrique* sur $\mathbb{R}$. Une fonction analytique (p. 301) qui est un sous-ensemble d'une relation algébrique est appelée *fonction algébrique*.

Les fonctions g_1 et g_2 introduites plus haut sont algébriques, mais h ne l'est pas. La fonction valeur absolue, non différentiable en $x = 0$ (p. 293), n'est pas non plus algébrique bien qu'elle soit contenue dans la relation algébrique $y^2 - x^2 = 0$.

Une relation algébrique peut être vide comme le montre l'ex. : $\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 + 1 = 0\}$.

Toutes les fonctions rationnelles sont algébriques. En effet, si la fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est rationnelle avec $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont des polynômes que l'on prendra premiers entre eux, alors $P(x, y) = yq(x) - p(x) = 0$ pour tout couple $(x, f(x))$ tel que $x \in D_f$. $P(x, y)$ est ici du premier degré en y ; en général, si $P(x, y)$ est du $n^{\text{ième}}$ degré $(n \in \mathbb{N}^*)$ en y, la relation algébrique peut contenir jusqu'à n fonctions algébriques différentes définies sur un même intervalle. On les appelle *branches* de la relation algébrique, et l'on dit qu'elles sont définies *implicitement* par $P(x, y) = 0$.

Différentiation implicite

Si f est définie implicitement par $P(x, y) = 0$, alors $x \mapsto P(x, f(x))$ définit une fonction nulle sur D_f, dont la dérivée est donc également nulle sur D_f. La différentiation de cette fonction à l'aide de la règle de composition fournit ainsi une équation en x, $f(x)$ et $f'(x)$, qui est linéaire en $f'(x)$ et peut en général être résolue en $f'(x)$. Par ce procédé appelé *différentiation implicite*, on peut évaluer f' en un point x sans connaître explicitement f en fonction de x.

Ex. : L'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ définit une relation algébrique. Son graphe est appelé *folium de* DESCARTES (fig. C_1). Par différentiation implicite, on a $3x^2 + 3[f(x)]^2 \cdot f'(x) - 3xf'(x) - 3f(x) = 0$,

d'où, $f'(x) = \frac{f(x) - x^2}{[f(x)]^2 - x}$ si $[f(x)]^2 - x \neq 0$.

Cette formule est valable pour les trois fonctions algébriques f_1, f_2 et f_3 définies implicitement par cette relation algébrique, et permet donc le calcul de $f_\nu'(x)$, $\nu \in \{1, 2, 3\}$ pour tout couple $(x, f_\nu(x)) \in f_\nu$.

Par ex., pour $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}(\sqrt{5} - 1)\right) \in f_1$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \in f_2$

et $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}(-\sqrt{5} - 1)\right) \in f_3$ on trouve :

$$f_1'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{7}{10}\sqrt{5} \approx 2{,}065, \quad f_2'\left(\frac{3}{2}\right) = -1,$$

$$f_3'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{10}\sqrt{5} \approx -1{,}065.$$

Fonctions puissances à exposants rationnels

La relation algébrique définie par $y^n - x^m = 0$ $(n \in \mathbb{Z}^*, m \in \mathbb{N})$ définit implicitement une fonction algébrique $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$ telle que $x \mapsto f(x) = x^{\frac{m}{n}}$. La différentiation implicite donne $f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}$.

La *règle des puissances* de la p. 293 est donc encore valable pour des exposants *rationnels* quelconques. La fig. B montre des ex. de graphes de telles fonctions.

Rem. : En différenciant la série binomiale, on montre que la *règle des puissances* est en fait valable pour tout exposant *réel*.

Courbes algébriques

Déf. 2 : Le graphe d'une relation algébrique est appelé *courbe algébrique*. Si le polynôme définissant la relation s'écrit :

$$P(x, y) = \sum_{\nu=0}^{i} \sum_{\mu=0}^{k} a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu,$$

$n = \max(\{\nu + \mu \mid a_{\nu\mu} \neq 0\})$ est appelé *ordre* ou *degré* de la courbe algébrique.

Pour l'étude des courbes algébriques, on peut se limiter aux courbes *irréductibles* pour lesquelles le polynôme $P(x, y)$ est indécomposable.

La fig. C montre quelques courbes algébriques intéressantes. On remarque en particulier les différents points singuliers qui interviennent, que l'on peut définir et classer à l'aide des dérivées partielles de la fonction $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto P(x, y)$.

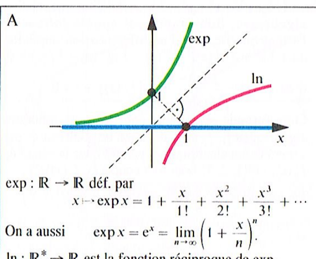
Déf. 3 : (a, b) est appelé *point singulier* de la courbe algébrique définie par $P(x, y) = 0$ si $P(a, b) = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b) = 0$. Un point singulier pour lequel les dérivées secondes ne sont pas toutes nulles est appelé :

$$\begin{cases} \textit{nœud} & (\text{fig. } C_1, C_2) \\ \textit{point de rebroussement} & (\text{fig. } C_3) \\ \textit{point isolé} & (\text{fig. } C_4) \end{cases} \quad \text{si}$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right)^2\right)(a, b) \begin{cases} < 0 \\ = 0. \\ > 0 \end{cases}$$

Rem. : La généralisation aux nombres complexes des fonctions et courbes algébriques (p. 453) permet une meilleure compréhension de leurs propriétés.

A



exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déf. par

$$x \mapsto \exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

On a aussi $\exp x = e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

ln : $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de exp.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots, \quad -1 < x \leq 1$$

(p. 336, fig. C)

$$\ln x = 2 \cdot \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right], \quad x > 0.$$

Fonctions exponentielle et logarithme naturel

B

π
Arccos
Arccotan
$\frac{\pi}{2}$
Arcsin
Arctan
−1
1
x
$-\frac{\pi}{2}$

Graphes des fonctions circulaires

Les nombres de BERNOULLI B_n ($n \in \mathbb{N}$) sont déf. par récurrence par

$$B_0 := 1, \quad B_{n+1} := -\frac{1}{n+2} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+2}{\nu} B_\nu, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

On a en particulier

$$B_1 = -\frac{1}{2} B_0 = -\frac{1}{2}$$

$$B_2 = -\frac{1}{3}(B_0 + 3B_1) = \frac{1}{6}$$

$$B_3 = -\frac{1}{4}(B_0 + 4B_1 + 6B_2) = 0$$

$$B_4 = -\frac{1}{5}(B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3) = -\frac{1}{30}$$

$$B_5 = -\frac{1}{6}(B_0 + 6B_1 + 15B_2 + 20B_3 + 15B_4) = 0$$

Hormis B_1, tous les nombres de BERNOULLI d'indice impair sont nuls. Valeurs suivantes :

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

C

Nombres de BERNOULLI

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} \cdot 2^{2\nu} \cdot (2^{2\nu}-1) \cdot B_{2\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{cotan}\, x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \cdots = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cdot 2^{2\nu} \cdot B_{2\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu-1}, \quad 0 < |x| < \pi$$

$$\text{Arcsin}\, x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots = x + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2\nu-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2\nu} \cdot \frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}, \quad |x| \leq 1$$

$$\text{Arctan}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \cdot x^{2\nu+1}, \quad |x| \leq 1$$

(p. 336, tab. C)

La dernière série permet le calcul numérique de π.

De Arctan $1 = \frac{\pi}{4}$ il vient $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$ (LEIBNIZ).

On obtient des séries bien plus rapidement convergentes en développant Arctan 1 à l'aide du th. d'addition valable modulo π :

Arctan x_1 + Arctan x_2 = Arctan $\frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}$; par ex. on a $\frac{\pi}{4} = 4 \,\text{Arctan}\, \frac{1}{5} - \text{Arctan}\, \frac{1}{239}$ (MACHIN),

D $\frac{\pi}{4} = 8 \,\text{Arctan}\, \frac{1}{10} - 4 \,\text{Arctan}\, \frac{1}{515} - \text{Arctan}\, \frac{1}{239}$ (MEISSEL).

Développements en série entière des fonctions circulaires et de leurs réciproques, calcul de π.

Fonctions exponentielle et logarithme

Si l'on exige d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qu'elle coïncide en tout point avec sa dérivée f', elle doit alors coïncider avec toutes ses dérivées successives $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Sa série de TAYLOR développée en 0 est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers $f(x)$ car le $n^{\text{ième}}$ reste de TAYLOR tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$: en effet, $f^{(n)} = f$ est bornée sur tout segment S par sup $\{|f(x)| \mid x \in S\}$ du fait de la continuité de f. On a donc : $f(x) = f(0) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$.

Si l'on choisit $f(0) = 1$, la fonction f est appelée *exponentielle naturelle*. On la note exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \exp x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$. Le réel :

$$e := \exp 1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} = 2{,}718\,281\,828\,459\,045 \ldots$$

est appelé *nombre d'*EULER. Il est transcendant.

D'après le tab. 3, p. 278, on a aussi :

$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. La fonction exp est non algébrique et possède la propriété suivante :

$\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Pour cette dernière propriété, on montre que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \exp(x_1 + x_2 - x) \cdot \exp x$ est constante car de dérivée nulle ; $g(0) = g(x_2)$ fournit alors l'égalité recherchée. En conséquence, pour tout entier naturel n on a $\exp n = (\exp 1)^n = e^n$, et on montre facilement que cette relation est encore vraie pour tous les rationnels. De la continuité de la fonction exp et d'après la déf. 4, p. 63, des puissances avec un exposant réel quelconque, on déduit finalement que $\exp x = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'exponentielle naturelle est strictement monotone (croissante) et son ensemble image est $\mathbb{R}_+^*$. En vertu du th. 13, p. 289, exp possède donc une fonction réciproque continue appelée *logarithme naturel*, notée ln : $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. D'après le th. 7, p. 295, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Les graphes et développements en séries des fonctions exp et ln sont présentés dans le tab. A.

Généralisant l'exponentielle naturelle, on appelle *exponentielle* toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $x \mapsto a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. La propriété évidente $a = e^{\ln a}$ conduit à la formule $a^x = e^{x \ln a}$ dont on déduit pour l'exponentielle des propriétés comparables à celles de l'exponentielle naturelle, en particulier $f' = \ln a \cdot f$; si a > 1 (resp. $a = 1$, $0 < a < 1$), alors $\ln a > 0$ (resp. $\ln a = 0$, $\ln a < 0$) donc f est strictement croissante (resp. constante, strictement décroissante) (th. 7 et 8, p. 297). La fonction réciproque de l'exponentielle, qui existe si $a \neq 1$, est appelée *logarithme*, notée $\log_a$, et vérifie $\log_a'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$.

Fonctions circulaires

Les développements en séries des *fonctions circulaires sinus* et *cosinus* (p. 179) peuvent être obtenus en considérant simplement quelques-unes de leurs propriétés. Si un couple (f, g) de fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ vérifie les trois propriétés suivantes, également vérifiées par le couple (sin, cos) :

(P1) $f(x_1 - x_2) = f(x_1)\,g(x_2) - g(x_1)\,f(x_2)$,

(P2) $g(x_1 - x_2) = g(x_1)\,g(x_2) + f(x_1)\,f(x_2)$,

(P3) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, alors de (P3) on déduit immédiatement que f n'est pas nulle, mais que $f(0) = 0$. En donnant à x_2 la valeur 0 dans (P1), on obtient $g(0) = 1$. En écrivant les fonctions taux d'accroissement de f et de g, on montre d'abord que g est dérivable en 0 $(g'(0) = 0)$, puis que f et g sont partout différentiables avec $f' = g$ et $g' = -f$. Ceci prouve également l'existence des dérivées d'ordre quelconque et l'analyticité des deux fonctions (th. 7, p. 301) puisque f et g, continues, sont bornées sur tout segment. f et g sont alors parfaitement déterminées sur $\mathbb{R}$ grâce à leurs développements en série de TAYLOR en 0 (tab. D), qui sont de rayons infinis, d'où l'on déduit que $f = \sin$ et $g = \cos$.

Beaucoup de propriétés connues des fonctions circulaires se déduisent uniquement de leurs développements en séries. Par ex., on montre que $g(0) > 0$, mais que $g(2) < 0$. g admet donc au moins un zéro sur]0, 2[. Par ailleurs, $f = -g'$ ne s'annule pas sur]0, 2[, donc d'après le th. de ROLLE g possède exactement un zéro sur]0, 2[. En utilisant les propriétés (P1) et (P2), on montre que le quadruple de ce zéro est la période des fonctions f et g. De (P2), on déduit que $f^2(x) + g^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $\{(f(x), g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Par le calcul intégral, on peut enfin prouver que la période de ces fonctions est le périmètre 2π du cercle unité.

On définit deux autres fonctions circulaires, *tangente* et *cotangente*, par $\tan := \frac{\sin}{\cos}$ et $\text{cotan} := \frac{\cos}{\sin}$ (p. 179). Ces fonctions sont définies et analytiques sur $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des zéros de leur dénominateur. On a :

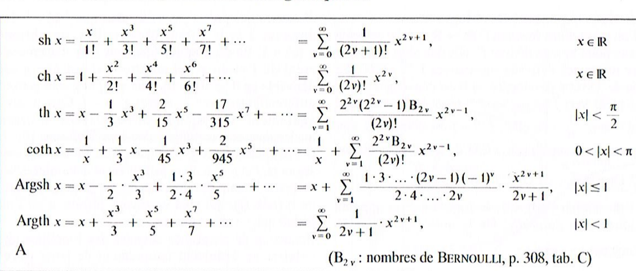
$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} \quad \text{et} \quad \text{cotan}' = -\frac{1}{\sin^2}.$$

À l'aide de la règle du quotient, on peut calculer leurs dérivées successives à un ordre arbitrairement grand. La série de TAYLOR développée en 0 de la fonction tangente (tab. D) est plus compliquée que pour sin et cos. Dans le calcul des coefficients interviennent les *nombres de* BERNOULLI (tab. C).

Pour la fonction cotangente, un tel développement en 0 est impossible puisque 0 n'appartient pas à l'ensemble de définition (pôle de la fonction). Mais la fonction $\text{cotan}\, x - \frac{1}{x}$, définie pour $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, est prolongeable par continuité en 0, et son développement en série entière autour de 0 conduit à un développement en série de cotan (tab. D) qui n'est pas un développement en série de TAYLOR.

Fonctions circulaires réciproques

Les fonctions circulaires ne sont pas inversibles du fait de leur périodicité, mais leurs restrictions à des intervalles convenables peuvent l'être. Si l'on restreint sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cos à $[0, \pi]$, tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et cotan à $]0, \pi[$, ces fonctions sont inversibles et leurs fonctions réciproques, désignées en faisant précéder le nom de la fonction circulaire par le mot « Arc », sont appelées *fonctions circulaires réciproques*, ou plus précisément *fonctions circulaires réciproques principales* pour les distinguer des fonctions réciproques obtenues par restriction des fonctions circulaires à des intervalles différents. La fig. B montre leurs graphes.



$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)!} x^{2\nu}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + - \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)\,B_{2\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu-1}, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 - + \cdots = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu-1}, \qquad 0 < |x| < \pi$$

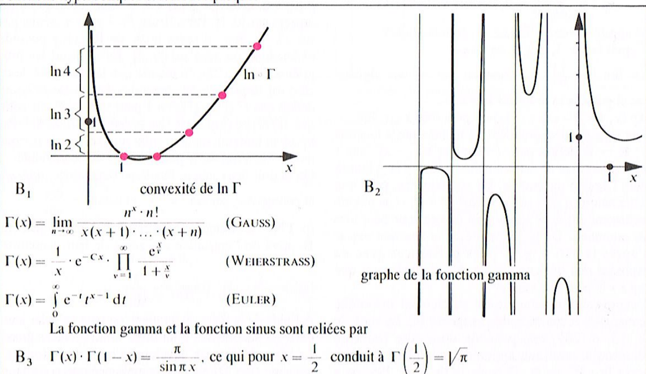
$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - + \cdots = x + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)(-1)^{\nu}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu}\cdot\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}, \qquad |x| \le 1$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1}\cdot x^{2\nu+1}, \qquad |x| < 1$$

A

($B_{2\nu}$: nombres de BERNOULLI, p. 308, tab. C)

Fonctions hyperboliques et leurs réciproques



B_1 convexité de ln Γ

B_2 graphe de la fonction gamma

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} \qquad \text{(GAUSS)}$$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\cdot e^{-Cx}\cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}} \qquad \text{(WEIERSTRASS)}$$

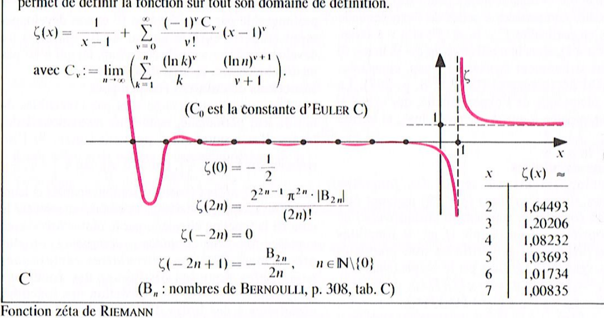
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \qquad \text{(EULER)}$$

La fonction gamma et la fonction sinus sont reliées par

B_3 $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$, ce qui pour $x = \dfrac{1}{2}$ conduit à $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Fonction gamma

$\zeta : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ est déf. pour $x > 1$ par $x \mapsto \zeta(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^x}$. Pour $x = 1$ la série est divergente (série harmonique, p. 280, tab. A_1). $\zeta(x) - \frac{1}{x-1}$ peut en tout point être développé en série entière, ce qui permet de définir la fonction sur tout son domaine de définition.



$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} C_{\nu}}{\nu!}(x-1)^{\nu}$$

$$\text{avec } C_{\nu} := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln k)^{\nu}}{k} - \frac{(\ln n)^{\nu+1}}{\nu+1}\right).$$

(C_0 est la constante d'EULER C)

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}\cdot|B_{2n}|}{(2n)!}$$

$$\zeta(-2n) = 0$$

$$\zeta(-2n+1) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \qquad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

x	$\zeta(x) \approx$
2	1,64493
3	1,20206
4	1,08232
5	1,03693
6	1,01734
7	1,00835

C

(B_n : nombres de BERNOULLI, p. 308, tab. C)

Fonction zéta de RIEMANN

Les fonctions circulaires réciproques sont analytiques en tous les points intérieurs à leurs intervalles de définition. En utilisant le th. 7, p. 295, on obtient pour leurs dérivées :

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad\text{et}\quad \operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pour $|x| < 1$,

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \operatorname{Arccotan}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Les développements en séries entières de Arcsin et Arctan figurent dans le tab. D, p. 308. La série Arctan permet un calcul numérique rapidement convergent du nombre π (tab. D, p. 308).

Fonctions hyperboliques

Si l'on remplace la propriété (P2) de la p. 309 par :

(P2*) $g(x_1 - x_2) = g(x_1)\,g(x_2) - f(x_1)\,f(x_2)$,

(P1), (P2*) et (P3) caractérisent un nouveau couple de fonctions appelées *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique* et notées sh et ch (p. 185). Du fait de la relation $g^2(x) - f^2(x) = 1$, ces fonctions jouent vis-à-vis de l'hyperbole le même rôle que les fonctions circulaires vis-à-vis du cercle. On a sh′ = ch et ch′ = sh, d'où l'on déduit les développements en séries de TAYLOR donnés dans le tab. A qui convergent sur tout $\mathbb{R}$ mais ne représentent pas des fonctions périodiques à la différence des fonctions circulaires. On définit ensuite les fonctions *tangente hyperbolique* et, pour $x \neq 0$, *cotangente hyperbolique*

par $\operatorname{th} x := \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ et $\operatorname{coth} x := \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

On a alors $\operatorname{th}' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$ et $\operatorname{coth}' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2}$.

On obtient les développements en séries des tangente et cotangente hyperboliques par les mêmes méthodes que pour leurs homologues circulaires (tab. A).

Fonctions hyperboliques réciproques

Alors que sh, th et coth sont inversibles, il faut restreindre ch pour en définir une réciproque : par convention cette restriction s'effectue sur $\mathbb{R}_+$. Leurs fonctions réciproques, désignées en faisant précéder le nom de la fonction hyperbolique par le mot « argument », sont appelées *fonctions hyperboliques réciproques* et notées Argsh, Argch, Argth et Argcoth. Elles sont également analytiques en tous les points intérieurs à leurs intervalles de définition, et on obtient pour leurs dérivées :

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

pour $x > 1$,

$$\operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \operatorname{Argcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Les deux dernières expressions paraissent identiques, mais leurs domaines de définition, resp. $]-1, 1[$ et $\mathbb{R}\setminus[-1, 1]$, sont disjoints. Les développements en séries entières de Argsh et Argth figurent dans le tab. A.

Fonction gamma

Une autre fonction non algébrique importante apparaît lorsqu'on essaie de prolonger sur $\mathbb{R}$ la fonction factorielle $n \mapsto n!$ définie sur $\mathbb{N}$ (p. 21).

Si l'on exige d'une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qu'elle vérifie les propriétés :

(Q1) $f(x+1) = x f(x)$ et (Q2) $f(1) = 1$,

alors $f(2) = 1$, $f(3) = 2!$, $f(4) = 3!$ et plus généralement $f(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La généralisation recherchée de la factorielle serait donc $x! := f(x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$; mais les conditions (Q1) et (Q2) ne suffisent pas à définir de façon univoque une fonction. Pour formuler une condition supplémentaire qui achèverait la déf. de f, on considère $(\ln\circ f)(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$(\ln\circ f)(n+1) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n$.

Le graphe de $\ln\circ f$ pour les entiers naturels (fig. B_1) incite à exiger comme troisième propriété pour f :

(Q3) $\ln\circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. (L'existence de $\ln\circ f$ suppose donc que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.)

Les conditions (Q1), (Q2) et (Q3) définissent une fonction unique, la *fonction gamma* Γ.

On obtient ainsi la *formule d'*EULER :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

Cette formule est valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. La limite existe en fait pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$, ce qui permet de définir un prolongement de la fonction gamma sur $x \in \mathbb{R}_-\setminus\mathbb{Z}_-$ (fig. B_2) qui vérifie encore (Q1) et (Q2) ; par contre $(\ln\circ\Gamma)(x)$ n'est défini que sur certains intervalles puisque l'on peut avoir $\Gamma(x) < 0$.

En remplaçant n^x par $e^{x\ln n}$, on trouve :

$$\frac{n^x\, n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{e^{x\left(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right)} e^{\frac{x}{1}} e^{\frac{x}{2}} \ldots e^{\frac{x}{n}}}{x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)}.$$

C'est EULER qui, le premier, a montré que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \ln n\right) \text{ existe, et la limite}$$

C = 0,577 215 664 901 533 … est appelée *constante d'*EULER (on ne sait pas si C est rationnel ou irrationnel). On en déduit la *formule de* WEIERSTRASS :

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} e^{-Cx} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{\left(1+\frac{x}{\nu}\right)}.$$

Cette formule permet de montrer que $\ln\circ\Gamma$, quand cette fonction existe, puis Γ, sont indéfiniment différentiables. On a, pour $0 < x < 1$,

$$(\ln\circ\Gamma)'(x) = -C - \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x}{\nu(x+\nu)}$$
$$= -C - \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\nu^2}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{\nu}\right)^{\mu}\right).$$

On a le droit ici de regrouper les termes de la série double (absolument convergente) :

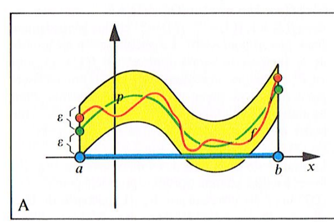
$$(\ln\circ\Gamma)'(x) = -C - \frac{1}{x} - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-x)^{\nu}\,\zeta(\nu+1),$$

soit par intégration terme à terme,

$$(\ln\circ\Gamma)(x+1) = -Cx + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\zeta(\nu)}{\nu} x^{\nu} + \lambda$$

où λ est la constante d'intégration.

En faisant tendre x vers 0, on constate que $\lambda = 0$. Ce développement en série entière de $\ln\circ\Gamma$ est en fait valable pour $x \in]-1, 1[$. On peut en déduire l'analyticité de $\ln\circ\Gamma$ et Γ partout où ces fonctions sont définies. Les expressions $\zeta(\nu)$ qui figurent dans les coefficients de la série sont des valeurs particulières d'une autre fonction non algébrique importante, la *fonction ζ de* RIEMANN (fig. C).

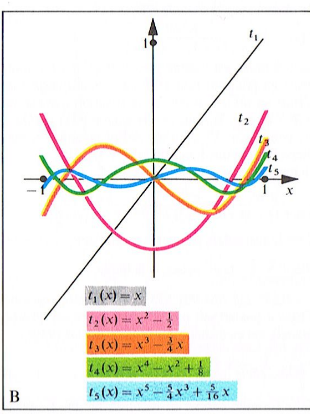


Étant donné une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et un réel positif ε, il s'agit d'approcher f par une fonction p d'un ensemble de fonctions particulier, en général celui des fonctions polynomiales, de telle sorte que l'on ait :

$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$.

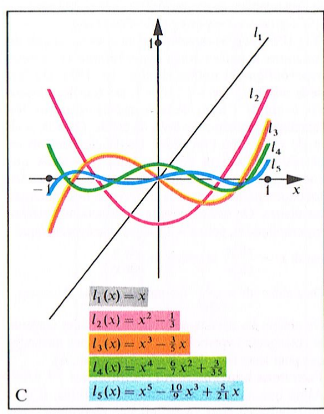
A

Approximation



B

Polynômes de Tchebychev



C

Polynômes de Legendre

Les m points (x_μ, y_μ), $\mu \in \{1, \ldots, m\}$ doivent être approchés du mieux possible (p. 313) par le graphe d'une fonction

$$\bar{f} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu g_\nu \quad (\alpha_\nu \in \mathbb{R},\ g_\nu \text{ fonctions linéairement indépendantes})$$

Dans le cas le plus simple de l'approximation par une fonction affine ($n = 2$ et $g_1(x) = 1$; $g_2(x) = x$), la condition

$\bar{f}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$

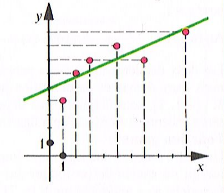
conduit à la solution

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} x_\mu^2 \cdot \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu - \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu \cdot \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu y_\mu}{m \cdot \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu^2 - \left(\sum_{\mu=1}^{m} x_\mu\right)^2};$$

$$\alpha_2 = \frac{m \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu y_\mu - \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu \cdot \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu}{m \cdot \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu^2 - \left(\sum_{\mu=1}^{m} x_\mu\right)^2}.$$

Exemple : Étant donné les 6 points (1, 4), (2, 6), (3, 7), (5, 8), (7, 7) et (10, 9), on obtient

$\alpha_1 = \frac{415}{86}$; $\alpha_2 = \frac{37}{86}$.



D

Méthode des moindres carrés

But de la théorie des approximations

La valeur en x d'une fonction f n-fois continûment différentiable sur $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ peut être approchée par $p_{n,a}(x)$ (p. 299). On a :

$\forall x \in I, |f(x) - p_{n,a}(x)| \leq 2 \frac{\alpha^n}{n!} M_n = \mu_n$,

où $M_n = \sup_I |f^{(n)}(x)|$.

L'erreur commise en remplaçant f par $p_{n,a}$ sur I est *uniformément* majorée par μ_n.

La théorie des approximations s'occupe du problème très général de l'approximation (avec ses différents sens) d'une fonction sur un intervalle.

Déf. 1 : On dit que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *uniformément approchable par des fonctions d'un ensemble F* si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $p \in F$ tel que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$.

On dit alors que p est une approximation uniforme de f sur $[a, b]$. On s'intéresse particulièrement à l'approximation par des fonctions polynomiales.

Th. 1 (th. d'approximation de Weierstrass) : *Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est uniformément approchable par des fonctions polynomiales.*

On commence par montrer ce résultat pour les fonctions f définies sur le segment [0, 1] en introduisant des fonctions d'approximation particulières $b_n(f)$ définies par :

$$b_n(f)(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \cdot \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

(*polynômes de Bernstein*), qui sont polynomiales et convergent uniformément vers f sur [0, 1].

Si f est maintenant définie sur le segment $[a, b]$, et si l'on définit $\varphi : [0, 1] \to [a, b]$ par $t \mapsto \varphi(t) = t(b - a) + a$, alors $f \circ \varphi$ est approchable par les fonctions $b_n(f \circ \varphi)$, donc f est approchable par les fonctions $b_n(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ qui vérifient $b_n(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}(x) = b_n(f \circ \varphi)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ et sont donc polynomiales.

Meilleures approximations

La convergence de la suite $b_n(f)$ vers f est assez lente ; on peut donc se demander s'il existe d'autres suites de fonctions polynomiales constituant de *meilleures* approximations de f. Pour comparer la précision des différentes approximations, il est préférable de placer le problème dans le cadre général d'un espace vectoriel normé (p. 365).

Déf. 2 : Soit $(V, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $U \subseteq V$. $\bar{f} \in U$ est appelée *meilleure approximation* de $f \in V$ relativement à U et $\|\ \|$ si $\|f - \bar{f}\| \leq \|f - g\|$ pour tout $g \in U$.

L'existence d'une meilleure approximation et son expression le cas échéant dépendent donc du choix du sous-ensemble U et de la norme $\|\ \|$. Le th. suivant donne une condition d'existence.

Th. 2 : *Si U est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $(V, \|\ \|)$, alors pour tout $f \in V$ il existe une meilleure approximation $\bar{f}$ de f relativement à U et $\|\ \|$.*

a) Polynômes de Tchebychev

Soit $C^0[a, b]$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues réelles définies sur [0, 1], sur lequel on définit la norme $\|\ \|_\infty$ par $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} (|f(x)|)$ (*norme de* Tchebychev).

Les fonctions polynomiales de degré au plus $(n - 1)$ constituant un sous-espace vectoriel G_{n-1} de $C^0[a, b]$ de dimension n, on peut se demander quelle est la meilleure approximation de la fonction puissance $f_n(x) = x^n$ relativement à G_{n-1} et $\|\ \|_\infty$. Si $\bar{f}_n$ est cette meilleure approximation de f_n, alors, de manière équivalente, $t_n := f_n - \bar{f}_n$ est, parmi toutes les fonctions g_n polynomiales de degré n dont le coefficient du monôme de degré n vaut 1, celle pour laquelle le maximum de $|g_n(x)|$ sur $[a, b]$ est le plus petit. Les expressions $t_n(x)$ sont appelées polynômes de Tchebychev, et l'on a :

$$t_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} \cos\left(n \cdot \operatorname{Arccos}\left(\frac{2x}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}\right)\right).$$

Le maximum de leur valeur absolue est $\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$.

En particulier, pour l'intervalle $[-1, 1]$ on a $t_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \cdot \operatorname{Arccos} x)$ (ex. fig. B).

Les t_n atteignent le maximum de leur valeur absolue aux extrémités de l'intervalle et en $(n - 1)$ points intérieurs. Leurs zéros jouent un rôle important dans la théorie des interpolations (p. 315).

b) Polynômes de Legendre

Si l'on utilise sur l'ensemble $C^0[a, b]$ non plus la norme de Tchebychev, mais la *norme euclidienne* définie par $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$, la méthode précédente conduit à la définition des polynômes de Legendre $l_n(x)$. l_n est, parmi toutes les fonctions g_n polynomiales de degré n dont le coefficient du monôme de degré n vaut 1, celle pour laquelle $\int_a^b [g_n(x)]^2 \, dx$ est le plus petit. En particulier, pour l'intervalle $[-1, 1]$ on a $l_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ (ex. fig. C).

Les normes resp. $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_2$ ne donnent donc pas le même résultat.

Méthode des moindres carrés

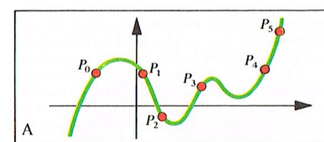
On considère un ensemble fini de points (x_μ, y_μ), $\mu \in \{1, \ldots, m\}$, représentant par ex. les résultats de m mesures. Une des tâches de la théorie des approximations est d'approcher au mieux le graphe de ces points dans un système de coordonnées cartésien par le graphe d'une fonction $\bar{f}$, où $\bar{f}$ doit être une combinaison linéaire de n fonctions linéairement indépendantes g_ν : $\bar{f} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu g_\nu$, $\alpha_\nu \in \mathbb{R}$.

Si l'on considère les m-uplets $(y_1, \ldots, y_m)$ et $\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu g_\nu(x_1), \ldots, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu g_\nu(x_m)\right)$, il est judicieux d'exiger de la meilleure approximation que ses coefficients α_ν minimisent la valeur de :

$$\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu g_\nu(x_\mu) - y_\mu\right)^2}.$$

D'après la p. 325, il est nécessaire pour cela que les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{\mu=1}^{m} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu g_\nu(x_\mu) - y_\mu\right)^2$ soient nulles pour soient nulles pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.

On obtient alors un système de n équations linéaires à n inconnues $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ qui admet en général une solution. Cette méthode est appelée *méthode des moindres carrés* (Gauss), car elle fait appel à la minimisation d'une somme de carrés. La droite ainsi construite en fig. D est appelée *droite de régression* (p. 477).



Étant donné $n + 1$ points $P_\mu (x_\mu, y_\mu)$, $\mu \in \{0, \ldots, n\}$, il s'agit de déterminer une fonction polynomiale p_n de degré au plus n dont le graphe passe par ces $n + 1$ points.

Interpolation polynomiale

Points donnés : $P_0(1, 3)$, $P_1(3, -2)$, $P_2(4, 5)$, $P_3(6, 10)$.

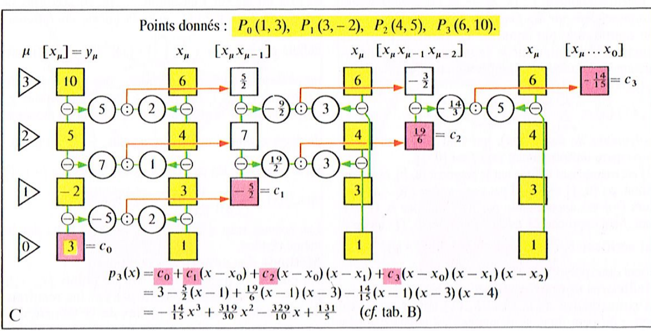
$$p_3(x) = \sum_{\nu=0}^{3} \prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{3} \frac{x - x_\mu}{x_\nu - x_\mu} \cdot y_\nu = \frac{x-3}{-2} \cdot \frac{x-4}{-3} \cdot \frac{x-6}{-5} \cdot 3 + \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-4}{-1} \cdot \frac{x-6}{-3} \cdot (-2) +$$

$$+ \frac{x-1}{3} \cdot \frac{x-3}{1} \cdot \frac{x-6}{-2} \cdot 5 + \frac{x-1}{5} \cdot \frac{x-3}{3} \cdot \frac{x-4}{2} \cdot 10$$

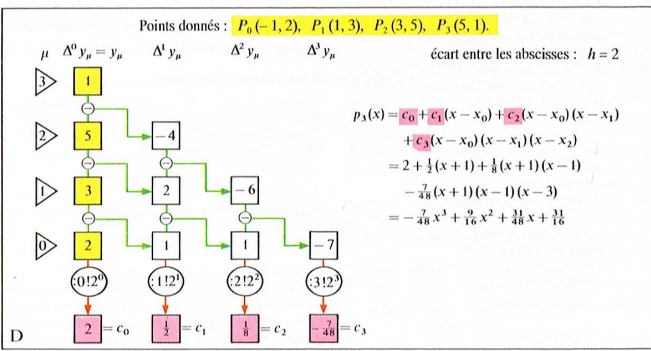
$$= -\frac{14}{15} x^3 + \frac{319}{30} x^2 - \frac{329}{10} x + \frac{131}{5} \quad (cf.\ \text{fig. C})$$

B

Méthode de LAGRANGE



Méthode de NEWTON-GREGORY (abscisses des points d'interpolation quelconques)



Méthode de NEWTON-GREGORY (abscisses des points d'interpolation équidistantes)

But de la théorie des interpolations

Étant donné $(n + 1)$ points $P_\mu (x_\mu, y_\mu)$, $(\mu \in \{0, \ldots, n\}$, abscisses x_μ deux à deux distinctes), il s'agit de trouver une fonction polynomiale p_n de degré au plus n qui prenne la valeur y_μ en chaque point x_μ. Il faut donc déterminer les coefficients α_ν de l'expression

$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu x^\nu$ pour que l'on ait $\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu x_\mu^\nu = y_\mu$

pour tout $\mu \in \{0, \ldots, n\}$.

Ce système d'équations linéaires aux inconnues $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ admet une solution unique. Soit en effet le système homogène associé :

$$\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu x_\mu^\nu = 0 \ (\mu \in \{0, \ldots, n\}),$$

qui correspond à $p_n(x_\mu) = 0$ $(\mu \in \{0, \ldots, n\})$. Si ce système admettait une solution $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$, le polynôme p_n posséderait $(n + 1)$ racines tout en n'étant pas identiquement nul, ce qui est impossible puisqu'il est de degré au plus n. Le système homogène n'admet donc que la solution triviale $(0, \ldots, 0)$, ce qui prouve que le déterminant de la matrice associée est non nul et démontre le résultat précédemment annoncé d'après le th. 1, p. 93.

Il existe plusieurs méthodes permettant de construire simplement des polynômes interpolateurs.

Méthode de LAGRANGE

Selon LAGRANGE, le polynôme d'interpolation associé aux points $P_\mu (x_\mu, y_\mu)$ peut s'écrire sous la forme :

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{n} \frac{x - x_\mu}{x_\nu - x_\mu} y_\nu \quad \text{(ex. tab. B)},$$

ce que l'on vérifie aisément.

En pratique, cette méthode est souvent assez longue à mettre en œuvre. Par ailleurs, si l'on rajoute de nouveaux points à l'ensemble à interpoler, il est nécessaire de reprendre entièrement tous les calculs, inconvénient que la méthode suivante évite.

Méthode de NEWTON-GREGORY

Si l'on adopte l'écriture suivante :

$$p_n(x) = c_0 + c_1 (x - x_0) + \ldots$$
$$+ c_n (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}),$$

alors les coefficients c_ν se calculent aisément à partir des équations $P_n(x_\mu) = y_\mu$, $\mu \in \{0, \ldots, n\}$.

En effet, $p_n(x_0) = y_0$ entraîne $c_0 = y_0$, et en résolvant successivement les équations après avoir remplacé les inconnues déjà déterminées par leurs valeurs, on trouve :

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad c_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}, \text{ etc.}$$

Formellement, si l'on définit par récurrence pour tous $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $\nu \leq \mu$:

$[x_\mu] := y_\mu$ (*accroissement d'ordre* 0),

$$[x_\mu x_{\mu-1}, \ldots, x_{\mu-\nu}] := \frac{[x_\mu x_{\mu-1}, \ldots, x_{\mu-\nu+1}] - [x_{\mu-1}, \ldots, x_{\mu-\nu}]}{x_\mu - x_{\mu-\nu}}$$

(*accroissement d'ordre* ν, $\nu > 0$), alors on obtient $c_\nu = [x_\nu x_{\nu-1}, \ldots, x_0]$ pour tout $\nu \in \{0, \ldots, n\}$.

On peut donc évaluer tous les coefficients à partir d'un schéma de calcul relativement simple (tab. C). Si l'on rajoute de nouveaux points à l'ensemble à interpoler, il suffit seulement de calculer les nouveaux coefficients. L'ordre des abscisses des points à interpoler ne joue aucun rôle. La méthode est particulièrement commode lorsque ces abscisses sont équidistantes. Si x_0 est la plus petite abscisse, et si $x_{\mu+1} - x_\mu = h$ pour tout $\mu \in \{0, \ldots, n - 1\}$, on écrit à la place des accroissements d'ordre ν les différences d'ordre ν définies par :

$\Delta^0 y_\mu := y_\mu$

$\Delta^\nu y_\mu := \Delta^{\nu-1} y_{\mu+1} - \Delta^{\nu-1} y_\mu$, $\nu > 0$.

Alors $c_\nu = [x_\nu x_{\nu-1}, \ldots, x_0] = \dfrac{1}{\nu!} \cdot \dfrac{\Delta^\nu y_0}{h^\nu}$ pour tout $\nu \in \{0, \ldots, n\}$ (tab. D).

Rem. : On obtient une formule d'interpolation analogue si, toujours dans le cas d'abscisses équidistantes, x_0 n'est non pas la plus petite mais la plus grande abscisse ou encore l'abscisse médiane.

Approximation par des polynômes d'interpolation

Pour approcher une fonction continue f, on peut choisir sur son graphe $n + 1$ points d'interpolation distincts deux à deux $(x_0 < \ldots < x_\nu < \ldots < x_n)$ et construire le polynôme interpolateur p_n correspondant. En chaque abscisse d'interpolation x_ν, on a alors $f(x_\nu) = p_n(x_\nu)$. Si de plus f est $(n + 1)$-fois différentiable, on peut estimer la précision de l'approximation pour une abscisse quelconque x. En effet, l'erreur commise lors de l'interpolation, soit $f(x) - p_n(x)$, s'écrit :

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0), \ldots, (x - x_n),$$

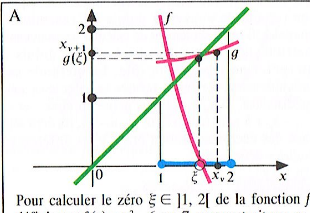
où ξ est une valeur appropriée appartenant à un intervalle contenant $[x_0, x_n]$ et $\{x\}$. Les polynômes de TAYLOR apparaissent ainsi comme des cas limites de polynômes interpolateurs, lorsque tous les points d'interpolation sont confondus.

On peut généraliser le principe de l'approximation par interpolation qui vient d'être exposé à des ensembles de points non nécessairement distincts deux à deux. Si k points sont confondus $(k > 1)$, pour définir un unique polynôme d'interpolation il faut se donner k conditions indépendantes qui seront obtenues en écrivant l'égalité des dérivées successives de la fonction à approcher et du polynôme interpolateur jusqu'à l'ordre $k - 1$.

Enfin, on peut se demander comment choisir judicieusement les abscisses d'interpolation sur un segment $[a, b]$ pour que l'approximation polynomiale d'une fonction donnée suffisamment différentiable soit la plus précise possible. La réponse dépend de la norme de l'espace de fonctions considérée.

Si l'on s'intéresse à la norme de TCHEBYCHEV, l'interpolation qui conduit à la meilleure approximation est celle qui utilise les abscisses des zéros du polynôme de TCHEBYCHEV $t_{n+1}(x)$ (p. 313). De même, pour la norme euclidienne, il faut utiliser les abscisses des zéros des polynômes de LEGENDRE $l_{n+1}(x)$ (p. 313).

A



Pour calculer le zéro $\xi \in]1, 2[$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 6x + 7$, on construit par ex. la fonction

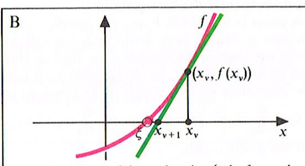
$$g(x) = x + \tfrac{1}{4} f(x) = \tfrac{1}{4}(x^2 - 2x + 7).$$

Le critère de convergence du th. de la p. 317 est alors vérifié.

En partant de $x_0 = 2$, on obtient par itération $x_1 = g(x_0) = 1{,}75$, $x_2 = g(x_1) = 1{,}641$, $x_3 = g(x_2) = 1{,}603, \ldots$, et l'on a $\xi = g(\xi) = \lim_{\nu \to \infty} x_\nu$

Méthode itérative simple

B



La valeur approchée x_ν du zéro ξ de f peut être améliorée en considérant l'abscisse du point d'intersection de la tangente en $(x_\nu, f(x_\nu))$ et de l'axe des abscisses :

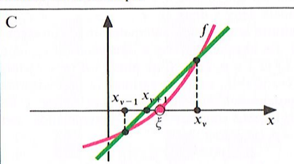
$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)}.$$

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Le critère de convergence est par ex. vérifié sur l'intervalle $\left[\frac{8}{5}, 2\right]$. En posant $x_0 = 2$, on obtient en trois itérations $x_1 = 1{,}889$, $x_2 = 1{,}87945$, $x_3 = 1{,}879385245$ exact, à la 8e décimale près.

Méthode de Newton-Raphson

C



Les valeurs approchées $x_{\nu-1}$ et x_ν encadrant le zéro ξ de f peuvent être améliorées en considérant l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des x de la sécante passant par $(x_{\nu-1}, f(x_{\nu-1}))$ et $(x_\nu, f(x_\nu))$:

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})} \cdot f(x_\nu).$$

Pour l'exemple de la fig. B, on obtient à partir de $x_0 = 1{,}8$ et $x_1 = 1{,}9$ les valeurs approchées suivantes $x_2 = 1{,}878$ et $x_3 = 1{,}879\,3$.

Interpolation linéaire

D

Exemple : $f_0(x) = x^3 - 3x - 1$

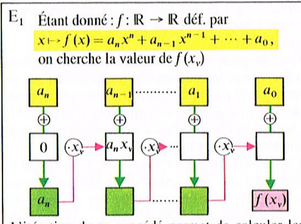
(voir fig. B et C)

$$f_1(x^2) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 1$$
$$f_2(x^4) = x^{12} - 18x^8 + 69x^4 - 1$$
$$f_3(x^8) = x^{24} - 186x^{16} + 4725x^8 - 1$$
$$f_4(x^{16}) = x^{48} - 25146x^{32} + 22325253x^{16} - 1$$

k	0	1	2	3	4
$\sqrt[2^k]{-\frac{a_{k2}}{a_{k3}}}$	0	2,449	2,060	1,9217	1,8838
$-\sqrt[2^k]{-\frac{a_{k1}}{a_{k2}}}$	–	– 1,225	– 1,399	– 1,4983	– 1,5281
$-\sqrt[2^k]{-\frac{a_{k0}}{a_{k1}}}$	$-\frac{1}{3}$	– 0,333	– 0,347	– 0,3473	– 0,3473

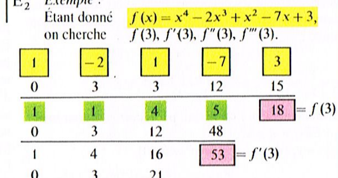
Méthode de Graeffe

E_1 Étant donné : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déf. par $x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, on cherche la valeur de $f(x_\nu)$



L'itération de ce procédé permet de calculer les coefficients $\frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(x_\nu)$ du développement de Taylor de f au point x_ν (p. 299).

E_2 *Exemple :*
Étant donné $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 7x + 3$, on cherche $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$, $f'''(3)$.



1	– 2	1	– 7	3	
0	3	3	12	15	
1	1	4	5	18	$= f(3)$
0	3	12	48		
1	4	16	53	$= f'(3)$	
0	3	21			
1	7	37	$= \frac{1}{2!} f''(3)$		
0	3				
1	10	$= \frac{1}{3!} f'''(3)$			

Schéma de Horner

Méthodes itératives simples

Un des principaux objectifs du calcul numérique est la résolution de l'équation $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

Si l'on pose $g(x) = x + c(x) \cdot f(x)$ où la fonction $c(x)$ peut être choisie arbitrairement pourvu qu'elle ne s'annule pas sur $[a, b]$, résoudre le problème précédent revient à résoudre l'équation $g(x) = x$, $x \in [a, b]$.

Pour approcher des solutions de ce type d'équation, on dispose d'une *méthode itérative.* On choisit une valeur initiale x_0, et l'on pose $x_{\nu+1} := g(x_\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$. Sous certaines conditions, la suite (x_ν) ainsi définie converge et sa limite ξ est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Th. : *Si $g : [a, b] \to [a, b]$ définie par $x \mapsto g(x)$ est continûment différentiable sur $[a, b]$, et si $|g'(x)| < 1$ pour tout $x \in [a, b]$ (critère de convergence), alors l'équation $g(x) = x$ admet exactement une solution ξ, et $\xi = \lim_{\nu \to \infty} x_\nu$ où la suite (x_ν) est définie par $x_0 \in [a, b]$ et $x_{\nu+1} := g(x_\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$* (ex. fig. A).

La rapidité de la convergence peut être évaluée dès la première itération grâce à l'inégalité :

$$|\xi - x_\nu| \le \frac{L^\nu}{1 - L} |x_1 - x_0| \quad \text{où } L = \sup_{x \in [a,b]} |g'(x)|.$$

Si f est continûment différentiable sur $[a, b]$, pour appliquer cette méthode à $f(x) = 0$ on prendra $g = 1_{\mathbb{R}} + f \cdot c$ où c est choisi de façon que le critère de convergence soit vérifié. Par ex. si $-2 < f'(x) < 0$ on prendra $c = 1$; si $0 < f'(x) < 2$, $c = -1$ convient.

Méthode de Newton-Raphson

On suppose que f' ne s'annule pas ; on veut choisir c de telle sorte que l'on ait $g'(\xi) = 0$.

De $g'(x) = 1 + c'(x) \cdot f(x) + c(x) \cdot f'(x)$, on déduit $c(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}$, et il paraît alors judicieux de choisir

$$c(x) = -\frac{1}{f'(\xi)}.$$

Dans le cas d'une fonction deux fois continûment différentiable, le critère de convergence d'une suite satisfaisant la relation de récurrence :

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} \quad \text{s'écrit} \quad \left| \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

pour tout $x \in [a, b]$.

Cette méthode admet une interprétation géométrique simple : si l'on trace la tangente au graphe de f au point $(x_\nu, f(x_\nu))$, $x_{\nu+1}$ est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses (fig. B).

Méthode d'interpolation linéaire

« regula falsi »

Si l'on remplace, dans la méthode de Newton-Raphson, la pente de la tangente $f'(x_\nu)$ par la pente de la sécante passant par les points $(x_\nu, f(x_\nu))$ et $(x_{\nu-1}, f(x_{\nu-1}))$, on obtient la relation de récurrence

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})} f(x_\nu) \text{ pour } \nu \ge 1.$$

$x_{\nu+1}$ est l'abscisse du point d'intersection de la sécante considérée avec l'axe des abscisses. Le coefficient devant $f(x_\nu)$ ne dépendant plus seulement de x_ν, les critères de convergence de cette méthode sont plus compliqués (fig. C).

Schéma de Horner

Pour évaluer numériquement les expressions $f(x_\nu)$ ou $f'(x_\nu)$ qui interviennent par ex. dans les méthodes précédentes, on peut dans le cas d'une fonction f polynomiale utiliser le *schéma de* Horner. Il repose sur la relation :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \Big(\big(\ldots (a_n x + a_{n-1}) x + \ldots + a_2\big) x + a_1\Big) x + a_0.$$

Le tab. E_1 explicite la méthode de calcul de $f(x_\nu)$, qui fait intervenir des additions et seulement n multiplications par x_ν.

La répétition de cette méthode permet de calculer $f'(x_\nu)$. En effet, les n premiers nombres de la sixième ligne du tab. E_1 sont les coefficients du polynôme définissant le prolongement continu de la fonction taux d'accroissement $m_{x_\nu}(x) = \frac{f(x) - f(x_\nu)}{x - x_\nu}$ (p. 293), qui vérifie $\overline{m}_{x_\nu}(x_\nu) = f'(x_\nu)$.

Rem. : L'itération de cette méthode permet plus généralement de calculer les coefficients $\frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(x_\nu)$ du développement de Taylor de f au point x_ν (p. 299).

Ex. numérique : tab. E_2.

Méthode de Graeffe

Si l'on considère une fonction polynomiale f_0 de degré n définie par $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ comme une fonction sur $\mathbb{C}$, le théorème fondamental de l'algèbre complexe (p. 67) assure que son expression se décompose en le produit d'une constante par n facteurs affines de la forme $a_n (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n)$. En développant ce produit et en identifiant les coefficients du polynôme obtenu avec ceux du polynôme de départ, on montre que, pour $1 \le m \le n$:

$$\sum_{\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m} (-\xi_{\nu_1})(-\xi_{\nu_2}) \ldots (-\xi_{\nu_m}) = \frac{a_{n-m}}{a_n}.$$

Cette propriété des racines, appelée parfois *th. de* Vieta, permet de les évaluer lorsque leurs valeurs absolues sont distinctes deux à deux. En effet, si par exemple $|\xi_1| > |\xi_2| > \ldots > |\xi_n|$, les valeurs absolues des racines étant éloignées les unes des autres, on a $\xi_\nu \approx -\frac{a_{n-\nu}}{a_{n-\nu+1}}$ pour tout $\nu \in \{1, \ldots, n\}$. Ce calcul approximatif n'est possible que si tous les coefficients a_ν sont non nuls. Sinon, ou si l'on veut améliorer la précision des résultats, on construit par récurrence

$$f_k(x^{2^k}) = (-1)^n \cdot f_{k-1}(x^{2^{k-1}}) \cdot f_{k-1}(-x^{2^{k-1}}) = a_{k,n} x^{2^k \cdot n} + a_{k,n-1} x^{2^k \cdot (n-1)} + \ldots + a_{k,0}.$$

Pour les valeurs de k suffisamment grandes, les coefficients $a_{k,\nu}$ sont tous non nuls, et l'on a :

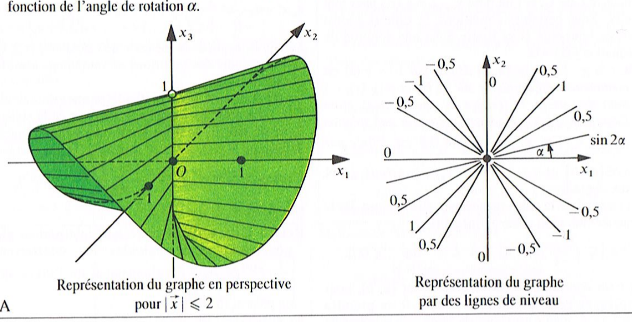
$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[2^k]{-\frac{a_{k,n-\nu}}{a_{k,n-\nu+1}}} = \pm \xi_\nu$$

pour tout $\nu \in \{1, \ldots, n\}$, avec un choix convenable du signe (tab. D).

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{pour } \vec{x} \neq \vec{0}, \\ 0 & \text{pour } \vec{x} = \vec{0}. \end{cases}$

Sur les droites passant par O d'équation $x_2 = x_1 \tan \alpha$, on a pour $\vec{x} \neq \vec{0}$:

$f(x) = \dfrac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha$. Le graphe peut donc être engendré en faisant tourner autour de l'axe des x_3 une droite rencontrant cet axe et parallèle au plan $Ox_1 x_2$, dont la cote croît et décroît périodiquement en fonction de l'angle de rotation α.

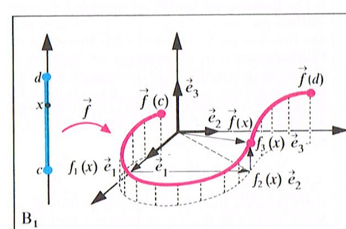


Représentation du graphe en perspective pour $|\vec{x}| \leqslant 2$

Représentation du graphe par des lignes de niveau

A

Exemple d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$



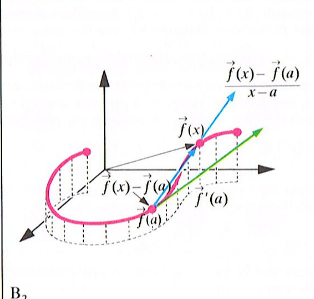
B₁

Une courbe dans l'espace est définie par une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, par ex.

$$\vec{f} : [c, d] \to \mathbb{R}^3.$$

$\vec{f}(x)$ et par conséquent $\vec{f}$ s'expriment à l'aide de leurs composantes.

$$\vec{f}(x) = \sum_{\mu=1}^{3} f_\mu(x)\vec{e}_\mu = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}; \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$



Pour définir la dérivée de $\vec{f}$ en a on considère le taux d'accroissement $\dfrac{\vec{f}(x) - \vec{f}(a)}{x - a}$, qu'il faut lire $\dfrac{1}{x-a} \cdot \left[\vec{f}(x) - \vec{f}(a)\right]$ (multiplication d'un vecteur par un scalaire). Si lorsque $x \to a$, ce taux a une limite, celle-ci est la dérivée de $\vec{f}$ en a. La dérivée existe en tout point où f_1, f_2, f_3 sont simultanément dérivables.

La fonction dérivée $\vec{f}'$ est définie par

$$\vec{f}' = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix}.$$

Son domaine de définition est $\bigcap_{\mu=1}^{3} D_{f_\mu'}$

B₂

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$

On s'intéresse ici aux fonctions $f : D_f \to \mathbb{R}^m$ où $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Il s'agit en particulier d'étudier les notions de continuité, de dérivabilité, de différentiabilité, et leurs applications. Certaines précautions s'imposent, comme on va le voir.

Propriétés de $\mathbb{R}^n$

L'espace $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est d'abord l'ensemble des n-uplets réels $(x_1, \ldots, x_n)$. Ces n-uplets sont appelés points de $\mathbb{R}^n$. D'après les pp. 87 et 204, $\mathbb{R}^n$ peut également être considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, dont les éléments sont alors des vecteurs-colonnes à n composantes. Au début, toutes les variables vectorielles seront notées surmontées d'une flèche. Bien que la représentation en lignes soit plus commode à écrire, on lui préférera la représentation en colonne, en particulier pour effectuer des calculs sur des éléments de $\mathbb{R}^n$. Le vecteur nul, dont toutes les composantes sont nulles, sera noté $\vec{0}$. Une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ ($m \neq 1$) sera également notée surmontée d'une flèche. Une fonction $\vec{f} : D_{\vec{f}} \to \mathbb{R}^m$ où $D_{\vec{f}} \subseteq \mathbb{R}^n$ sera appelée plus simplement *fonction de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$, sans rappeler chaque fois qu'elle n'est pas nécessairement définie sur $\mathbb{R}^n$ tout entier (ultérieurement on substituera souvent à la notation $\vec{u}$, la notation $\boldsymbol{u}$, que l'on rencontre de plus en plus dans la littérature mathématique). On munit $\mathbb{R}^n$ d'une topologie à l'aide de la métrique euclidienne (p. 217). On définit ainsi la norme de $\vec{x}$ par $|\vec{x}| := \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2}$, et la distance de $\vec{x}$ à $\vec{y}$ par $|\vec{x} - \vec{y}|$.

On donne ainsi un sens aux notions de « suite convergente » et de « fonction continue ». En particulier, les théorèmes de BOLZANO-WEIERSTRASS s'énoncent de la manière suivante dans $\mathbb{R}^n$:

Toute suite bornée dans $\mathbb{R}^n$ admet au moins une valeur d'adhérence (p. 277).

Tout sous-ensemble infini borné de $\mathbb{R}^n$ admet au moins un point d'accumulation (p. 229).

Exemple d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Pour comprendre les problèmes que peut poser la généralisation dans $\mathbb{R}^n$ des résultats du calcul différentiel dans $\mathbb{R}$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\vec{x} \to f(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{pour } \vec{x} \neq 0. \\ 0 & \text{pour } \vec{x} = 0 \end{cases}$$

Comme pour toutes les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, le comportement de cette fonction peut être représenté par son graphe, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D_f \wedge x_3 = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \right\}.$$

En tout point des axes des x_1 et des x_2, la fonction prend la valeur 0. Pourtant, la fonction n'est pas continue en $\vec{0}$: en effet, en tout point $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ de la droite $x_1 = x_2$ elle prend la valeur 1, ce qui assure que dans tout voisinage de $\vec{0}$ il existe des points pour lesquels la fonction vaut 1, alors que $f(\vec{0}) = 0$ (fig. A). Cette discontinuité peut paraître surprenante, car pour tout x_2 (resp. x_1) fixé la fonction de la seule variable x_1 (resp. x_2) correspondante est continue en tout point, y compris en 0, et même différentiable. Cette différentiabilité partielle (p. 321) ne permet donc pas de conclure à la continuité de la fonction, encore moins d'approcher les valeurs prises par la fonction au voisinage d'un point à l'aide des valeurs de la fonction et de ses dérivées partielles en ce point. Les propriétés des fonctions réelles de deux variables réelles ne peuvent donc pas se déduire de celles des fonctions d'une seule variable qu'on peut leur associer en fixant l'une des deux variables.

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$

Le cas le plus simple que l'on ait à envisager dans ce chapitre, et par lequel on commencera, est celui des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^m$ (fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$).

Les représentations paramétriques de courbes dans le plan ou dans l'espace (*cf.* p. 393 *sqq.*) se rangent dans cette catégorie (fig. B₁).

Toute valeur $\vec{f}(x)$ prise par une fonction $\vec{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ se décompose de manière unique sous la forme $\vec{f}(x) = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \vec{e}_\mu$ (p. 204). Les a_μ dépendent évidemment de x : a_μ est la valeur $f_\mu(x)$ d'une fonction réelle f_μ (*composante* de $\vec{f}$). On peut donc écrire la *représentation par composantes* :

$$\vec{f}(x) = \sum_{\mu=1}^{m} f_\mu(x)\,\vec{e}_\mu \quad \text{(fig. B}_1\text{)}.$$

Réciproquement, un m-uplet de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définit sur l'intersection de leurs domaines de définition une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$.

En se reportant à la notion de valeur limite d'une fonction introduite par la déf. 4 p. 283, on a :

$\lim_{x \to a} \vec{f}(x) = \vec{g}$ si et seulement si $\lim_{x \to a} f_\mu(x) = g_\mu$ pour tout $\mu \in \{1, \ldots, m\}$. On énonce un résultat similaire pour la continuité en un point a (*cf.* topologie-produit, p. 221).

La construction de la fonction taux d'accroissement au voisinage d'un point ne pose aucun problème, si bien que l'on peut énoncer les définitions suivantes :

Déf. 1 : Une fonction $\vec{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ est dite *différentiable* au point $a \in D_{\vec{f}}$ si a est un point d'accumulation de $D_{\vec{f}}$ et si $\lim_{x \to a} \dfrac{\vec{f}(x) - \vec{f}(a)}{x - a}$ existe (fig. B₂). La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ définie par :

$a \mapsto \lim_{x \to a} \dfrac{\vec{f}(x) - \vec{f}(a)}{x - a}$ est appelée *dérivée* $\vec{f}'$ de $\vec{f}$.

Th. 1 : *Une fonction $\vec{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ est différentiable au point a si, et seulement si, toutes les fonctions f_μ sont différentiables en ce point. On a :*

$$\vec{f}'(a) = \sum_{\mu=1}^{m} f_\mu'(a)\,\vec{e}_\mu .$$

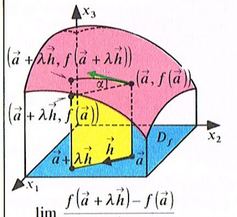
Ainsi, l'étude d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ est ramenée à l'étude de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$(\vec{x}, f(\vec{a}) + \mathrm{d}f_{\vec{a}}(\vec{x}-\vec{a}))$ — $(\vec{a}, f(\vec{a}))$ — $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ — $(\vec{x}, f(\vec{a}))$ — x_1, x_2, x_3 — D_f — $\vec{a} = (a_1, a_2)$ — $\vec{x} = (x_1, x_2)$

$f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, est différentiable en $\vec{a}$ intérieur à D_f, s'il existe au voisinage de $\vec{a}$ une approximation linéaire de $f(\vec{x}) - f(\vec{a})$.
Le graphe de la fonction aff.
$\vec{x} \to f(\vec{a}) + \mathrm{d}f_{\vec{a}}(\vec{x}-\vec{a})$ est le plan tangent en $(\vec{a}, f(\vec{a}))$ au graphe de f.

A

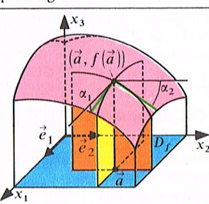
Différentiabilité, approximation linéaire, plan tangent



$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\vec{a}+\lambda\vec{h}) - f(\vec{a})}{\lambda}$$

s'appelle, pour un vecteur unitaire donné $\vec{h}$, la dérivée directionnelle de f en $\vec{a}$ pour la direction $\vec{h}$. Elle vaut ici tan α.

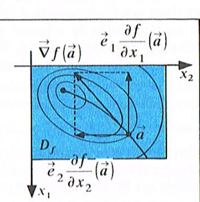
B$_1$



La dérivée directionnelle de f selon le $\nu^{ième}$ vecteur de base est appelée dérivée partielle de f selon x_ν ; on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) = \tan \alpha_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) = \tan \alpha_2.$$

B$_2$



Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{x} \to f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$, $\vec{N} = \vec{\nabla} f(\vec{a})$ est orth. en $\vec{a}$ à l'hypersurface $L\, f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = 0$.
Si $n = 2$, L est une courbe du plan $Ox_1\, x_2$, proj. de la section de $S(z = f(\vec{x}))$ par le plan $z = f(\vec{a})$.

B$_3$

Dérivée directionnelle, dérivée partielle, gradient

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\vec{x} \mapsto x_1^2 x_2 + x_2^3$ — Ex. numérique $(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(\vec{a}) = 39$

Dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = 2x_1 x_2$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2$ — $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) = 12$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) = 31$

Gradient : $\text{grad } f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ x_1^2 + 3x_2^2 \end{pmatrix}$ — $\text{grad } f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 12 \\ 31 \end{pmatrix}$

Matrice jacobienne (p. 323) : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{x}}(\vec{x}) = {}^t(\vec{\nabla} f)(\vec{x}) = (2x_1 x_2,\ x_1^2 + 3x_2^2)$

Différentielle : $\mathrm{d}f_{\vec{a}}(\vec{x}-\vec{a}) = 2a_1 a_2 (x_1 - a_1) + (a_1^2 + 3a_2^2)(x_2 - a_2)$

$\mathrm{d}f_{\vec{x}}(\mathrm{d}\vec{x}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{x}}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = 2x_1 x_2 \mathrm{d}x_1 + (x_1^2 + 3x_2^2)\mathrm{d}x_2$

Équation du plan tangent : $x_3 = f(\vec{a}) + \mathrm{d}f_{\vec{a}}(\vec{x}-\vec{a})$ — $x_3 = 12x_1 + 31x_2 - 78$

Dérivées partielles d'ordre 2 : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}) = 2x_2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) = 2x_1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{x}) = 6x_2$

Matrice jacobienne du 2e ordre : $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\vec{x}^2}(\vec{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vec{x}}\, {}^t\!\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{x}}\right)(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 6x_2 \end{pmatrix}$

Différentielle du 2e ordre :

$$\mathrm{d}^2 f_{\vec{x}}(\mathrm{d}\vec{x}) = {}^t(\mathrm{d}\vec{x}) \cdot \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\vec{x}^2}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x})(\mathrm{d}x_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x})\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{x})(\mathrm{d}x_2)^2$$
$$= 2x_2(\mathrm{d}x_1)^2 + 4x_1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + 6x_2(\mathrm{d}x_2)^2$$

C

Exemple de différentiation partielle

Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Après avoir étudié le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$, on s'intéresse maintenant à celui des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, appelées également fonctions réelles de n variables réelles, ou encore champs scalaires en physique si $n > 1$.

Ex. : Moyenne arithmétique de n nombres, champ des masses volumiques dans un solide, champ des températures dans un corps à un instant donné.

Le concept de continuité se généralise aisément à de telles fonctions. Par contre, on ne peut pas définir un taux d'accroissement au sens habituel du terme, car l'opération de division d'un réel par un vecteur n'est pas définie.

Différentiabilité

Si f est une fonction réelle de la variable réelle différentiable, on a par déf. :

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right) = 0, \text{ soit encore}$$

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x) - f(a) - \mathrm{d}f_a(x-a)}{x - a}\right) = 0 \text{ en utilisant}$$

l'application $\mathrm{d}f_a$ (différentielle de f en a, *cf.* p. 297). On peut généraliser cette dernière relation aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Déf. 2 : Une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite *différentiable* au point $\vec{a} \in D_f$ si $\vec{a}$ est un point intérieur à D_f et s'il existe une forme linéaire (voir p. 89) $\mathrm{d}f_{\vec{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, appelée *différentielle* de f en $\vec{a}$, telle que l'on ait :

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}}\left(\frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \mathrm{d}f_{\vec{a}}(\vec{x}-\vec{a})}{|\vec{x}-\vec{a}|}\right) = 0 \text{ (fig. A).}$$

Si $\mathrm{d}f_{\vec{a}}$ existe, elle est unique.

Comme dans le cas des fonctions réelles de la variable réelle, une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ différentiable en $\vec{a}$ est toujours continue en $\vec{a}$.

Rem. : L'unicité de la différentielle en $\vec{a} \in D_f$ ne serait pas assurée si $\vec{a}$ était simplement un point d'accumulation de D_f (seule condition imposée à a en dimension 1). Pour éviter toute discussion restrictive, on suppose dans la suite D_f ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Dérivées directionnelles

On s'intéresse au comportement d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ au voisinage d'un point $\vec{a}$ en lequel elle est différentiable, dans une direction donnée par un vecteur unitaire $\vec{h}$. Autrement dit, on se limite aux points $\vec{a} + \lambda\vec{h}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$). On a alors :

$$\frac{f(\vec{a}+\lambda\vec{h}) - f(\vec{a}) - \mathrm{d}f_a(\lambda\vec{h})}{|\lambda\vec{h}|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot \left(\frac{f(\vec{a}+\lambda\vec{h}) - f(\vec{a}) - \mathrm{d}f_a(\vec{h})}{\lambda}\right),$$

$$\text{d'où } \lim_{\lambda \to 0} = \frac{f(\vec{a}+\lambda\vec{h}) - f(\vec{a})}{\lambda} = \mathrm{d}f_a(\vec{h}).$$

La limite qui intervient dans le membre de gauche de cette relation peut encore exister pour certains vecteurs unitaires $\vec{h}$ lorsque la fonction f n'est pas différentiable. Elle est appelée *dérivée directionnelle de f au point $\vec{a}$ dans la direction $\vec{h}$* (fig. B$_1$).

Dérivées partielles

Les dérivées directionnelles dans les directions des vecteurs de base $\vec{e}_\nu$ sont particulièrement importantes.

Déf. 3 : Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite *partiellement différentiable* par rapport à x_ν au point $\vec{a}$ si $\frac{f(\vec{a}+\lambda\vec{e}_\nu) - f(\vec{a})}{\lambda}$ admet une limite finie quand λ tend vers 0. Cette limite est alors notée $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\vec{a})$, et la fonction qui à $\vec{a}$ associe $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\vec{a})$ est appelée *dérivée partielle de f par rapport à x_ν* (fig. B$_2$).

Une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ différentiable au point $\vec{a}$ est partiellement différentiable par rapport à toutes les variables x_ν en ce point. La réciproque n'est pas toujours vraie (*cf.* ex. p. 319), mais on dispose du th. suivant :

Th. 2 : *Si une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est partiellement différentiable par rapport à toutes les variables x_ν sur un sous-ensemble ouvert E de D_f, et si toutes les dérivées partielles sont continues sur E, alors f est différentiable sur E.*

Gradient

La différentielle $\mathrm{d}f_{\vec{a}}$ d'une fonction différentiable f peut être exprimée à l'aide des dérivées partielles de la fonction. On a :

$$\mathrm{d}f_{\vec{a}}(\vec{x}-\vec{a}) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\vec{a}) \cdot (x_\nu - a_\nu).$$

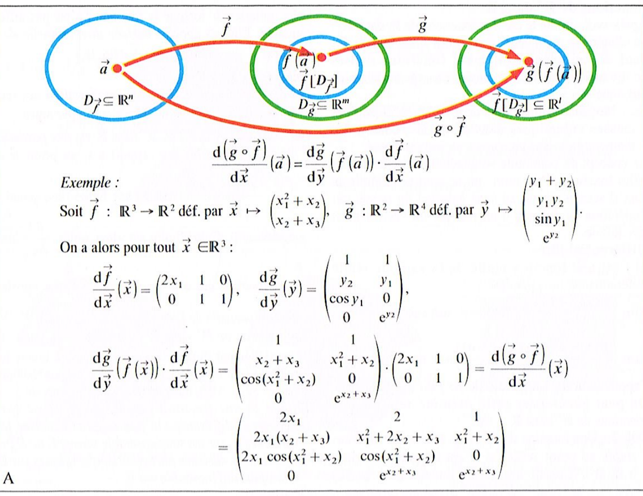
La différentielle de la fonction identité au point $\vec{a}$ est $\vec{x} - \vec{a}$, notée également $\mathrm{d}\vec{x}$. La somme précédente est alors le produit scalaire ($\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique) :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}, \mathrm{d}\vec{x} \right\rangle, \quad \text{où} \quad \mathrm{d}\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix}.$$

On définit ensuite le *gradient* d'une fonction :

Déf. 4 : Si une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable, on note $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$, qui à l'aide du symbole $\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ (*vecteur Nabla*) s'écrit aussi sous la forme $\vec{\nabla} f$ (fig. B$_3$).

Les dérivées partielles d'une fonction se calculent selon les mêmes règles que pour les fonctions d'une seule variable, en traitant comme des constantes toutes les variables à l'exception de celle par rapport à laquelle on effectue la dérivation (ex. tab. C).



Composition des fonctions

Une fonction $\vec f$ continûment différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est localement inversible au voisinage de $\vec a$ si

$$\det \frac{\mathrm{d}\vec f}{\mathrm{d}\vec x}(\vec a) \neq 0.$$

Exemple :

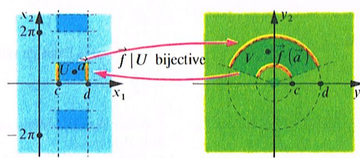
$\vec f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ déf. par $\vec x \to \begin{pmatrix} x_1 \cos x_2 \\ x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}$ admet pour matrice jabobienne

$\frac{\mathrm{d}\vec f}{\mathrm{d}\vec x}(\vec x) = \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}$, si bien que $\det \frac{\mathrm{d}\vec f}{\mathrm{d}\vec x}(\vec x) = x_1$ pour tout $\vec x \in \mathbb{R}^2$.

$\vec f$ est alors localement inversible au voisinage de $\vec a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ si $a_1 \neq 0$.

Il existe, pour $a_1 \neq 0$, un voisinage ouvert U de $\vec a$ et un voisinage ouvert V de $\vec f(\vec a)$ tels que $\vec f \mid U$ soit bijective, avec $\vec f(U) = V$. Si de plus $-\frac{\pi}{2} < a_2 < \frac{\pi}{2}$, on a $\vec f^{-1}(\vec y) = \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ \operatorname{Arc\,tan} \frac{y_2}{y_1} \end{pmatrix}$ $(\varepsilon = \operatorname{sgn} y_{-1})$.

$\vec f$ n'est pas globalement inversible. L'antécédent $\vec f^{-1}[\vec f(U)]$ contient en plus du voisinage ouvert U de $\vec a$ tous les ouverts obtenus par translation de U dans la direction de l'axe des x_2 d'un multiple entier de 2π.



On peut remarquer que l'exemple étudié dans ce tableau B est celui du passage coordonnées cartésiennes-coordonnées polaires avec des notations non usuelles (*cf.* pp. 344, 345).

B

Inversibilité, fonction réciproque

Le gradient est une notion euclidienne intrinsèque, indépendante du système orthonormé de référence, direct ou non (voir p. 327).

Hyperplan tangent

D'après la déf. 2, si $\vec x - \vec a$ est suffisamment petit, on a $f(\vec x) \approx f(\vec a) + \langle \vec\nabla f(\vec a), \vec x - \vec a \rangle$. Au voisinage de $\vec a$, le graphe de f, sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$, est donc très voisin de l'ensemble de points $(\vec x, x_{n+1})$ défini par l'équation :

$x_{n+1} = f(\vec a) + \langle \vec\nabla f(\vec a), \vec x - \vec a \rangle$, qui est un hyperplan (sous-espace de dimension n) de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par le point $(\vec a, f(\vec a))$. Cet hyperplan constitue une généralisation de la notion de droite tangente introduite pour les fonctions réelles d'une variable réelle. Dans le cas $n = 2$, il s'agit d'un plan tangent au graphe de f en $(\vec a, f(\vec a))$ (fig. A) ; de façon générale on parle d'*hyperplan tangent*.

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Les dérivées partielles d'une fonction différentiable peuvent elles-mêmes être partiellement différentiables. Ainsi, pour une fonction de deux variables, quatre dérivées partielles d'ordre deux peuvent exister :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}; \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

Si ces dérivées partielles d'ordre deux existent et sont continues sur un ouvert non vide, on a alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ sur cet ouvert. Ces dérivées continues permettent de définir les différentielles d'ordre 2 (tab. C).

Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Après avoir étudié successivement les cas particuliers des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ et des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on est en mesure de généraliser les résultats obtenus aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, c.-à-d. aux fonctions vectorielles de n variables, appelées également *champs vectoriels* en physique si $m > 1$ et $n > 1$.

Ex. : Champ de force, champ des vitesses dans l'écoulement d'un fluide à un instant donné.

La différentiabilité est introduite de manière analogue à la déf. 2 :

Déf. 5 : Une fonction $\vec f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est dite *différentiable* au point $\vec a \in D_{\vec f}$ si $\vec a$ est un point intérieur à $D_{\vec f}$ et s'il existe une application linéaire (voir p. 89) $\mathrm{d}\vec f_{\vec a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, appelée *différentielle* de $\vec f$ en $\vec a$, telle que l'on ait

$$\lim_{\vec x \to \vec a} \frac{\vec f(\vec x) - \vec f(\vec a) - \mathrm{d}\vec f_{\vec a}(\vec x - \vec a)}{|\vec x - \vec a|} = \vec 0 \quad .$$

Comme en p. 319, on peut associer à toute fonction $\vec f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ une représentation par composantes constituée de m fonctions f_μ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, et l'on a :

Th. 3 : *Une fonction $\vec f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est différentiable si, et seulement si, toutes les composantes f_μ sont différentiables. Si $\vec f$ est différentiable, on a $(\mathrm{d}\vec f_{\vec a})_\mu = \mathrm{d}(f_\mu)_{\vec a}$.*

On notera que si la différentielle existe, elle est unique. Comme en rem. p. 321, on suppose dans la suite $D_{\vec f}$ ouvert.

D'après la p. 321, on a :

$$\mathrm{d}(f_\mu)_{\vec a}(\vec x - \vec a) = \langle \vec\nabla f_\mu(\vec a), \mathrm{d}\vec x \rangle$$

de sorte que l'application linéaire $\mathrm{d}\vec f_{\vec a}$ est déterminée par la matrice (m, n) des dérivées partielles $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}$, appelée *matrice jacobienne.*

Si l'on désigne cette dernière par le quotient symbolique $\frac{\mathrm{d}\vec f}{\mathrm{d}\vec x}$, et sa valeur au point $\vec a$ par $\frac{\mathrm{d}\vec f}{\mathrm{d}\vec x}(\vec a)$, alors on a $\mathrm{d}\vec f_{\vec a}(\vec x - \vec a) = \frac{\mathrm{d}\vec f}{\mathrm{d}\vec x}(\vec a) \cdot \mathrm{d}\vec x$, où le produit qui apparaît dans le membre de droite est à prendre au sens matriciel (p. 88).

La matrice jacobienne est ainsi pour les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ l'analogue de la dérivée pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{mn}$, pour laquelle l'écriture vectorielle est remplacée par l'écriture matricielle. La matrice jacobienne d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ se réduit à une ligne qui est la transposée du gradient de f, en repère orthonormé.

La matrice jacobienne permet de formuler simplement les règles de différentiation, par ex. pour la *généralisation de la règle de composition* (voir th. 6, p. 295) :

Th. 4 : *Si la fonction $\vec f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est différentiable en $\vec a \in D_{\vec f}$ et si la fonction $\vec g$ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^l$ est différentiable en $f(\vec a) \in D_{\vec g}$, $D_{\vec g}$ ouvert, alors la fonction $\vec g \circ \vec f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^l$ est différentiable en $\vec a$ et l'on a :*

$$\frac{\mathrm{d}(\vec g \circ \vec f)}{\mathrm{d}\vec x}(\vec a) = \frac{\mathrm{d}\vec g}{\mathrm{d}\vec y}(\vec f(\vec a)) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec f}{\mathrm{d}\vec x}(\vec a),$$ *où l'on désigne par $\vec y = (y_1, \ldots, y_m)$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.*

La matrice jacobienne de $\vec g \circ \vec f$ est donc le produit des matrices jacobiennes de $\vec g$ et de $\vec f$ (fig. A).

Dans le cas $n = l = 1$, le premier facteur du produit se réduit à une ligne, le second à une colonne, et l'on obtient le cas particulier :

$$(g \circ \vec f)'(a) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_\mu}(\vec f(a)) f'_\mu(a).$$

$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ déf. par $(t, \vec{x}) \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2t^2 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + t^2 - 4 \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ est différentiable. On a

$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} -4t \\ 2t \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 4x_2 \end{pmatrix}$ de matrice inverse $\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)^{-1}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & -\frac{1}{2x_1} \\ -\frac{1}{2x_2} & \frac{1}{2x_2} \end{pmatrix}$

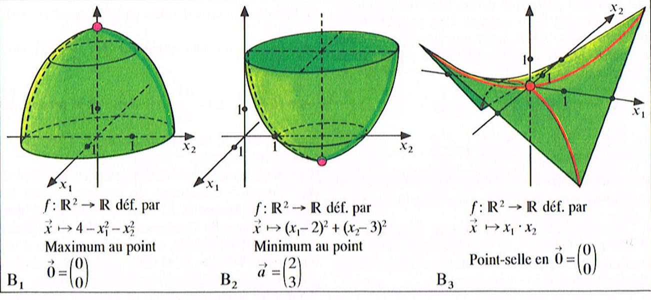
Pour $t_0 = 1$ et $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a $\vec{f}(t_0, \vec{x}_0) = \vec{0}$ et $\det \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(t_0, \vec{x}_0) \neq 0$. On peut donc définir une fonction implicite $t \to \vec{g}(t)$ dans les conditions du th. 6, sur un voisinage ouvert U de 1, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:
$\vec{f}(t, \vec{g}(t)) = 0$, $\vec{g}(t_0) = \vec{x}_0$, g continûment dérivable.

De $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(t, \vec{g}(t)) \frac{d\vec{g}}{dt}(t) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(t, \vec{g}(t)) = \vec{0}$ on tire en multipliant par $\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)^{-1}(t, \vec{g}(t))$

$$\frac{d\vec{g}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \frac{5t}{g_1(t)} \\ -\frac{3t}{g_2(t)} \end{pmatrix}. \text{ Pour } t \in \left]\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right[\text{ on a } \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{5t^2 - 4} \\ \sqrt{4 - 3t^2} \end{pmatrix}.$$

A

Fonction implicite



Extremum local, point-selle

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ déf. par $x \mapsto -x_1^3 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 - x_3^2$. Étudier les extremums locaux.

On a $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 - 2x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 \\ 3x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$, $\frac{d^2 f}{d\vec{x}^2}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -6x_1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, (matrice jacobienne d'ordre 2, p. 320).

$\Delta_1(\vec{x}) = -6x_1$
$\Delta_2(\vec{x}) = 12x_1 - 4$
$\Delta_3(\vec{x}) = 26 - 24x_1$

$\Delta_1(\vec{x})$ = et $\Delta_2(\vec{x})$ sont les mineurs hessiens du hessien $\Delta_3(\vec{x}) = \det \frac{d^2 f}{d\vec{x}^2}(\vec{x})$.

Une condition suffisante pour que l'on ait un maximum (resp. un minimum) local strict au point $\vec{a}$ est :
$\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \vec{0} \wedge \Delta_1(\vec{a}) < 0 \, (>0) \wedge \Delta_2(\vec{a}) > 0 \wedge \Delta_3(\vec{a}) < 0 \, (>0)$.

$\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \vec{0}$ a pour solution $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ -\frac{13}{6} \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix}$ et $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme on a $\Delta_1(\vec{a}_1) = -13$, $\Delta_2(\vec{a}_1) = 22$, $\Delta_3(\vec{a}_1) = -26$, il apparaît en $\vec{a}_1$ un maximum local strict.
En revanche, au point $\vec{a}_2$, la valeur de 0 de $\Delta_1(\vec{a}_2)$ ne permet pas de conclure. Une étude plus complète montre qu'il n'y a pas d'extremum en $\vec{a}_2$, mais un point-selle.

C

Exemple de conditions suffisantes pour un extremum

Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, inversibilité

Pour une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne est une matrice carrée (n, n). On peut lui associer son déterminant $\det \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}$, appelé *jacobien*, que l'on écrit parfois aussi $\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$, et qui définit sur l'ouvert sur lequel $\vec{f}$ est différentiable une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. D'après la règle de calcul (6) de la p. 91, on a pour la composition de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$: $\det \frac{d(\vec{g} \circ \vec{f})}{d\vec{x}} = \det \frac{d\vec{g}}{d\vec{y}} \cdot \det \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}$ calculé en $x = a$, $y = f(a)$.

On montre qu'une condition *nécessaire* pour qu'une fonction continûment différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ soit inversible est que son jacobien ne s'annule pas sur $D_{\vec{f}}$. Cette condition n'est pourtant *pas suffisante*, comme le montre l'ex. suivant :

Soit $D_{\vec{f}}$ le disque unité ouvert épointé du plan des (x_1, x_2), et $\vec{f}: D_{\vec{f}} \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $(x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$. Pour tout $\vec{x} \in D_{\vec{f}}$, on a alors $\det \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}) = 4(x_1^2 + x_2^2) > 0$, mais $\vec{f}$ n'est pas inversible car $\vec{f}(-x_1, -x_2) = \vec{f}(x_1, x_2)$.

On est ainsi amené à définir la notion d'inversibilité locale :

Déf. 6 : $\vec{f}: D_{\vec{f}} \to \mathbb{R}^n$ où $D_{\vec{f}} \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite *localement inversible* au point $\vec{a} \in D_{\vec{f}}$ s'il existe des voisinages ouverts resp. de $\vec{a}$ et de $\vec{f}(\vec{a})$ appliqués bijectivement l'un sur l'autre par $\vec{f}$.

Pour une fonction cont. différentiable, on a :
$\vec{f}(\vec{a} + \vec{h}) \approx \vec{f}(\vec{a}) + d\vec{f}_{\vec{a}}(\vec{h})$ pour $|\vec{h}|$ petit.

La différentielle étant une application linéaire, elle est bijective si son jacobien est non nul, et l'on peut en déduire que dans ce cas $\vec{f}$ est également bijective si $|\vec{h}|$ est assez petit. On a donc :

Th. 5 : *Si le jacobien d'une fonction $\vec{f}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est non nul au point $\vec{a} \in D_{\vec{f}}$, alors $\vec{f}$ est localement inversible au point $\vec{a}$ (fig. B). (f. cont. diff.)*

Le produit des matrices jacobiennes de $\vec{f}$ et de $\vec{f}^{-1}$ étant égal à la matrice jacobienne de l'application identique, c.-à-d. à la matrice identité, on en déduit que les n^2 dérivées partielles de $\vec{f}^{-1}$ au point $\vec{f}(\vec{a})$ se calculent à partir de celles de $\vec{f}$ au point $\vec{a}$. Par ex., pour une fonction $\vec{f}$ de deux variables et de fonction réciproque $\vec{g}$, on a :

$$\frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\vec{f}(\vec{a})) = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a})}{\det \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{a})} ; \quad \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\vec{f}(\vec{a})) = \frac{-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a})}{\det \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{a})} ;$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\vec{f}(\vec{a})) = \frac{-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a})}{\det \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{a})} ; \quad \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\vec{f}(\vec{a})) = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a})}{\det \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{a})}.$$

Fonctions implicites

En p. 307, on a défini implicitement les fonctions algébriques à l'aide de polynômes de deux variables. Ce procédé est généralisable : à la place d'une équation polynomiale en (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, on peut considérer un système d'équations obtenues en écrivant que des fonctions réelles à plusieurs variables, continûment différentiables, prennent simultanément la valeur 0. Les solutions $(\vec{t}, \vec{x})$ du système d'équations $f_\mu(\vec{t}, \vec{x}) = 0$, $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \{1, \ldots, m\}$ définissent alors une relation dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$: on peut se demander à quelle condition celle-ci définit une fonction $\vec{g}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que $f_\mu(\vec{t}, \vec{g}(t)) = 0$ pour tout $\mu \in \{1, \ldots, m\}$. Les f_μ peuvent s'interpréter comme les composantes d'une fonction $\vec{f}$ de $\mathbb{R}^{n+m}$ dans $\mathbb{R}^m$, de telle sorte que la propriété exigée s'écrit plus simplement $\vec{f}(\vec{t}, \vec{x}) = \vec{0}$. Soit alors la fonction de $\mathbb{R}^{n+m}$ dans $\mathbb{R}^{n+m}$ $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_n, f_1, \ldots, f_m)$, telle que :
$F_\nu(\vec{t}, \vec{x}) = t_\nu$, $\nu \in \{1, \ldots, n\}$.

Les jacobiens $\det \frac{d\vec{F}}{d(\vec{t}, \vec{x})}$ et $\det \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}$ sont égaux (le symbole ∂ signifie que la matrice jacobienne ne comporte que les dérivées partielles des f_μ par rapport aux x_ν). Si $\det \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{a}) \neq 0$, d'après le th. 5, p. 323, la fonction $\vec{F}$ est localement inversible. La fonction réciproque $\vec{G}$ permet de récrire le système d'équations sous la forme :

$x_1 = G_1(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_m)$,
…
$x_m = G_m(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_m)$,
$t_1 = u_1$,
…
$t_n = u_n$.

En choisissant $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ et en remplaçant u_ν par t_ν, on obtient finalement le système d'équations

$x_1 = G_1(t_1, \ldots, t_n, 0, \ldots, 0) = g_1(t_1, \ldots, t_n)$,
…
$x_m = G_m(t_1, \ldots, t_n, 0, \ldots, 0) = g_m(t_1, \ldots, t_n)$,

qui définit la fonction recherchée. On a donc :

Restriction de la fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ au sous-ensemble de D_f satisfaisant la condition $g(\vec{x}) = 0$.
Les extremums locaux de cette restriction peuvent être différents de ceux de la fonction initiale.

A_1

Application de la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE à l'exemple de la p. 327/1.

On cherche le maximum de $f : (\mathbb{R}_+^*)^3 \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $\vec{x} \mapsto x_1 x_2 x_3$ sous la contrainte

$$g(\vec{x}) = 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - A = 0.$$

On pose $F(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})$

La condition nécessaire pour avoir un extremum est :

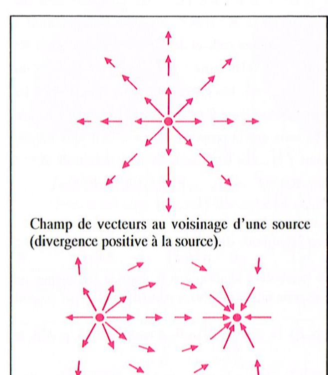
$$x_2 x_3 + 2\lambda(x_2 + x_3) = 0$$
$$x_3 x_1 + 2\lambda(x_3 + x_1) = 0$$
$$x_1 x_2 + 2\lambda(x_1 + x_2) = 0$$
$$2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - A = 0$$

on a l'unique solution

$$\left(\sqrt{\frac{A}{6}}, \sqrt{\frac{A}{6}}, \sqrt{\frac{A}{6}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{A}{6}}\right).$$

A_2 Le parallélépipède cherché est donc un cube.

Extremums liés



Champ de vecteurs au voisinage d'une source (divergence positive à la source).

Champ de vecteurs entre une source et un puits (divergence négative au puits).

B

Divergence

Si on calcule la somme des produits scalaires élémentaires $\langle \vec{f}(\vec{x}), d\vec{x} \rangle$ le long du petit rectangle vert (sens direct), on fait apparaître la *différentielle de la circulation autour de l'axe des* x_3, perpendiculaire au plan des x_1, x_2 (repère orthonormé direct) :

$$f_1(\vec{a})\,dx_1 + \left(f_2(\vec{a}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a})\,dx_1\right)dx_2$$
$$-\left(f_1(\vec{a}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a})\,dx_1\right)dx_2 - f_2(\vec{a})\,dx_2$$
$$= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a})\right)dx_1\,dx_2.$$

Le quotient par $dx_1\,dx_2$ est la composante de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}(\vec{a})$ selon l'axe des x_3.

C

Rotationnel

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(FG) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F)\,G + F\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G$	$\vec{\nabla}(FG) = (\vec{\nabla}F)\,G + F(\vec{\nabla}G)$
$\mathrm{div}(\vec{f} + \vec{g}) = \mathrm{div}\,\vec{f} + \mathrm{div}\,\vec{g}$	$\langle \vec{\nabla}, \vec{f} + \vec{g} \rangle = \langle \vec{\nabla}, \vec{f} \rangle + \langle \vec{\nabla}, \vec{g} \rangle$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f} + \vec{g}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}$	$\vec{\nabla} \times (\vec{f} + \vec{g}) = \vec{\nabla} \times \vec{f} + \vec{\nabla} \times \vec{g}$
$\mathrm{div}(F\vec{f}) = \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F, \vec{f} \rangle + F\,\mathrm{div}\,\vec{f}$	$\langle \vec{\nabla}, F\vec{f} \rangle = \langle \vec{\nabla}F, \vec{f} \rangle + F\langle \vec{\nabla}, \vec{f} \rangle$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(F\vec{f}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F \times \vec{f} + F\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}$	$\vec{\nabla} \times (F\vec{f}) = (\vec{\nabla}F) \times \vec{f} + F(\vec{\nabla} \times \vec{f})$
$\mathrm{div}\,\vec{f} \times \vec{g} = \langle \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}, \vec{g} \rangle - \langle \vec{f}, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g} \rangle$	$\langle \vec{\nabla}, \vec{f} \times \vec{g} \rangle = \langle \vec{\nabla} \times \vec{f}, \vec{g} \rangle - \langle \vec{f}, \vec{\nabla} \times \vec{g} \rangle$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}F = \vec{0}$
D $\quad \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} = 0$	$\langle \vec{\nabla}, \vec{\nabla} \times \vec{f} \rangle = 0$

Formules relatives au gradient, à la divergence et au rotationnel

Th. 6 : *Soit $\vec{f}$ une fonction continûment différentiable de $\mathbb{R}^{n+m}$ dans $\mathbb{R}^m$, soit $(\vec{t}_0, \vec{x}_0)$ avec $\vec{t}_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ un point de $D_{\vec{f}}$ tel que $\vec{f}(\vec{t}_0, \vec{x}_0) = \vec{0}$ avec la condition* $\det \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{t}_0, \vec{x}_0) \neq \vec{0}$. *Alors il existe un voisinage ouvert $U(\vec{t}_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ et une unique fonction continûment différentiable $\vec{g} : U(\vec{t}_0) \to \mathbb{R}^m$ tels que $\vec{g}(\vec{t}_0) = \vec{x}_0$ et $\vec{f}(\vec{t}, \vec{g}(\vec{t})) = \vec{0}$ pour tout $\vec{t} \in U(\vec{t}_0)$.*

Ex. pour $n = 1$, $m = 2$: tab. A p. 324.

Dans le cas $n = m = 1$, on peut calculer facilement la dérivée d'une fonction implicite. Soit f une fonction continûment différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et soit $g : D_g \to \mathbb{R}$ ($D_g \subseteq \mathbb{R}$) définie implicitement par $f(x, g(x)) = 0$ pour tout $x \in D_g$. g est alors également continûment différentiable, et le cas particulier d'application de la règle de composition mentionné en complément au th. 4, p. 323 donne (*cf.* différentiation implicite, p. 307) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + g'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) = 0.$$

Extremums locaux des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Comme dans le cas des fonctions d'une seule variable, la détermination d'extremums locaux de fonctions de plusieurs variables est un problème important (fig. B_1, B_2). La déf. de ces extremums généralise celle de la p. 297. On a comme condition *nécessaire* :

Th. 7 : *Si la fonction différentiable f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ admet un extremum local au point $\vec{c} \in D_f$, D_f ouvert, alors toutes les dérivées partielles sont nulles en $\vec{c}$, ce que l'on peut écrire $\vec{\nabla}f(\vec{c}) = \vec{0}$.*

Pour montrer par ex. que : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{c}) = 0$, on considère la fonction f_1 déf. par $f_1(x_1) = f(x_1, c_2, \ldots, c_n)$, qui existe sur un intervalle ouvert contenant c_1 puisque $\vec{c}$ est intérieur à D_f. Si f admet un extremum local au point $\vec{c}$, alors il en va de même pour f_1 en c_1, donc d'après le th. 3, p. 297, on a $f_1'(c_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{c}) = 0$.

On montre de la même façon la nullité des autres dérivées partielles en $\vec{c}$.

La condition nécessaire $\vec{\nabla}f(\vec{c}) = \vec{0}$ n'est *pas suffisante* pour caractériser l'existence d'un extremum local au point $\vec{c}$. Par ex., la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ déf. par $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ vérifie $\vec{\nabla}f(\vec{0}) = \vec{0}$, mais elle n'admet pas d'extremum local en $\vec{0}$: dans tout voisinage de $\vec{0}$, on trouve des points (x_1, x_2) où f est à valeur positive (lorsque x_1 et x_2 sont de même signe) et d'autres où f est à valeur négative (lorsque x_1 et x_2 sont de signes différents). Le graphe de cette fonction (fig. B_3) fait apparaître que, plus généralement, toutes ses dérivées directionnelles sont nulles en $\vec{0}$; on dit qu'il s'agit d'un *point-selle*. Pour qu'une fonction f admette un extremum local en $\vec{c}$, il faut finalement, en plus de la condition $\vec{\nabla}f(\vec{c}) = \vec{0}$, que la différence $f(\vec{c} + \vec{h}) - f(\vec{c})$ conserve le même signe pour tout $\vec{h}$ suffisamment petit. On peut énoncer une condition suffisante, si f est deux fois continûment différentiable, pour qu'il en soit ainsi, en introduisant les déterminants $\Delta_k = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $1 \leq k \leq n$.

La matrice des dérivées partielles d'ordre deux de f est appelée *matrice hessienne* de f, son déterminant Δ_n est le *hessien* de f. Les Δ_k sont les déterminants des matrices obtenues en éliminant les $n - k$ dernières lignes et colonnes de la matrice hessienne.

Th. 8 : *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ possédant des dérivées partielles d'ordre deux continues sur un voisinage ouvert de $\vec{c} \in D_f$. Si $\vec{\nabla}f(\vec{c}) = \vec{0}$ et si $\Delta_k(\vec{c}) > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, alors f admet un minimum local strict au point $\vec{c}$.*

Si $\vec{\nabla}f(\vec{c}) = \vec{0}$ et si $(-1)^k \Delta_k(\vec{c}) > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, alors f admet un maximum local strict au point $\vec{c}$ (ex. tab. C).

Pour une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, la condition suffisante énoncée dans le th. 8 s'écrit :

$$\vec{\nabla}f(\vec{c}) = \vec{0}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)(\vec{c}) \neq 0, \quad \Delta_2(\vec{c}) > 0.$$

Si $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)(\vec{c}) > 0$ (resp. < 0), il s'agit d'un minimum (resp. maximum). En un point $\vec{c}$ tel que $\Delta_2(\vec{c}) < 0$, il n'y a pas d'extremum. Si $\Delta_2(\vec{c}) = 0$, on ne peut pas formuler de condition suffisante d'existence d'un extremum local à l'aide des seules dérivées partielles d'ordres un et deux.

Extremums sous contraintes

En pratique, on a souvent à résoudre le problème suivant : Soit une fonction réelle f de la variable $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ au moins une fois continûment différentiable sur son ouvert de définition $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$; trouver les extremums locaux de la restriction de f au sous-ensemble S des points de D_f satisfaisant au système d'équations $g_\mu(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $\mu \in \{1, \ldots, m\}$, $1 \leqslant m < n$, les g_μ étant également des fonctions réelles au moins une fois continûment différentiables sur D_f (*extremums sous contraintes*, fig. A_1).

Ex. : On doit maximiser le volume d'un parallélépipède rectangle sous la contrainte que sa surface ait une aire donnée A. Il s'agit donc de trouver le maximum de la fonction $f : (\mathbb{R}_+^*)^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 x_2 x_3$ sous la contrainte :
$g(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - A = 0$.
Pour résoudre ce problème, on peut considérer la contrainte comme une équation en x_3 et en reporter la solution $x_3 = \frac{A - 2x_1 x_2}{2(x_1 + x_2)}$ dans l'expression de f ; on se ramène ainsi à une simple recherche d'extremum sans contrainte pour une fonction F de deux variables (la solution est un cube) (suite p. 326/2).

① On donne dans $\mathbb{R}^3$ euclidien muni d'un r.o.n. la parabole P ($y^2 - 4x = 0, z = 0$) et le point $M(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus P$. La distance δ de M à P est $\inf(d(M, H) \mid H \in P)$. Pour obtenir δ, on cherche donc le minimum de $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ avec les contraintes $y^2 - 4x = 0$, $z = 0$. On se ramène ici simplement à l'étude de la fonction polyn. $g(y) = \left(\frac{1}{4}y^2 - a\right)^2 + (y-b)^2 + c^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$: elle atteint sa borne inf. en un point qui annule $g'(y) = \frac{1}{4}(y^3 + 4(2-a)y - 8b)$.

Les points H associés aux zéros de g' ne dépendent pas de c (th. des trois perp., *cf.* infra).

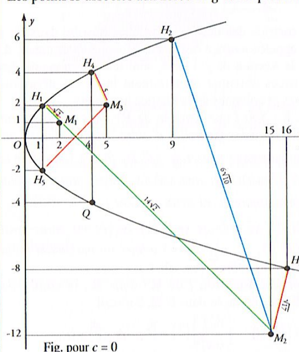


Fig. pour $c = 0$

Ex. 1 : $M := M_1(2, 1, c)$; g' s'annule uniquement pour $y = 2$. $H_1 = (1, 2, 0)$, $\delta = \sqrt{2 + c^2}$.
Ex. 2 : $M := M_2(15, -12, c)$; g' s'annule pour $y = 2, 6, -8$. On a trois points $H_1(1, 2, 0)$, $H_2(9, 6, 0)$, $H_3(16, -8, 0)$, avec $d(M_2, H_3) < d(M_2, H_2) < d(M_2, H_1)$.
La valeur de δ est $d(M_2, H_3) = \sqrt{17 + c^2}$.
$d(M_2, H_1)$ est un max. local et $d(M_2, H_2)$ un min. local.
Ex. 3 : $M := M_3(5, 2, c)$; g' s'annule pour $y = 4, -2$ (-2 est un zéro double). On a deux points $H_4(4, 4, 0)$ et $H_5(1, -2, 0)$ avec $d(M_3, H_4) < d(M_3, H_5)$. La valeur de δ est $d(M_3, H_4) = \sqrt{5 + c^2}$; $d(M_3, H_5)$ n'est rien.

Rem. : Si on remplace P par son arc $\overset{\frown}{OQ}$, $Q := (4, -4, 0)$, la distance de M_2 à cet arc est $d(M_2, Q)$. La recherche d'un min. sur un ouvert pour une fonction de classe 1 passe par la dérivation ; mais cela ne suffit peut-être pas pour un min. sur un compact.

② Ici on cherche la distance de $M(a, b, c)$ à une surface S d'éq. $f(x, y, z) = 0$ ($M \notin S$). On peut, si S est au moins 1-régulière, utiliser la méthode de Lagrange, en écrivant que les quatre premières dérivées partielles de $g(x, y, z, \lambda) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \lambda f(x, y, z)$ s'annulent simultanément : $2(x-a) + \lambda f_x'(x, y, z) = 2(y-b) + \lambda f_y'(x, y, z) = 2(z-c) + \lambda f_z'(x, y, z) = f(x, y, z) = 0$.

Ces conditions expriment que le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est normal à S en $H(x, y, z)$. C'est une condition nécessaire pour que $d(M, H)$ soit la distance de M à S (idem si on remplace S par une courbe).

Ex. : S est l'ellipsoïde d'éq. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ $(a > b > c > 0)$ et M le point (a, b, c). On a :

$x\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) = a$, $y\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) = b$, $z\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) = c$, relations donnant à partir de l'éq. de S la condition $f(\lambda) = 1$,

avec $f(\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)^{-2} + \left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)^{-2} + \left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right)^{-2}$; f est continue sur les ouverts $]-\infty, -a^2[$, $]-a^2, -b^2[$, $]-b^2, -c^2[$, $]-c^2, +\infty[$. Elle est strict. croissante de 0 à $+\infty$ sur le premier et prend donc une fois la val. 1 en $\lambda_1 < -a^2$; de même elle est strict. décroissante de $+\infty$ à 0 sur le dernier. Elle prend une fois la val. 1 en $\lambda_2 > 0$ car $f(0) = 3$. Sur chacun des ouverts bornés elle est strict. minorée par 1. En effet sur $]-a^2, -b^2[\cup]-b^2, -c^2[$, $f(\lambda) > \varphi(\lambda)$ avec $\varphi(\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)^{-2} + \left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right)^{-2}$, qui admet un min. unique sur $]-a^2, -c^2[$ qu'un calcul prouve sup. à 1. La distance de M à S est obtenue pour $\lambda = \lambda_2$, qui donne trois coord. > 0 pour H.

Discussion pour la recherche d'un extremum avec contraintes

Ce procédé peut être étendu à des problèmes comportant plus de variables et de contraintes, mais il est souvent peu commode et impose de distinguer de façon purement arbitraire des variables indépendantes et des variables dépendantes. En utilisant le th. 6, p. 325 sur les fonctions implicites, on obtient la condition nécessaire d'existence d'un extremum local sous contraintes de Lagrange :

Th. 9 : *Soit deux fonctions f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $\vec{g}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ continûment différentiables sur un ouvert $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local sous les contraintes $g_\mu(\vec{x}) = 0$, $\mu \in \{1, \ldots, m\}$ en $\vec{a} \in D$, et si la matrice jacobienne $\frac{d\vec{g}}{d\vec{x}}$ est de rang m sur D, alors il existe m nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que l'on ait $\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(f + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu g_\mu\right)(\vec{a}) = 0$ pour tout $\nu \in \{1, \ldots, n\}$.*

Les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont appelés *multiplicateurs de* Lagrange.

Si l'on sait que le problème de recherche d'un extremum local admet une solution, et si le système

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(f + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu g_\mu\right)(\vec{a}) = 0, \quad g_\mu(\vec{a}) = 0,$$

$\nu \in \{1, \ldots, n\}$, $\mu \in \{1, \ldots, m\}$ de $n + m$ équations à $n + m$ inconnues $a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ admet exactement une solution, alors les n premières composantes du $(n + m)$-uplet solution donnent les coordonnées du point auquel l'extremum recherché est atteint. Les facteurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ peuvent être éliminés lors de la résolution du système sans être calculés explicitement.

Formellement, ce procédé revient à rechercher les extremums locaux de la fonction F définie par :

$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$
$= f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu g_\mu(x_1, \ldots, x_n)$ (ex. tab. A_2).

Divergence, rotationnel, laplacien

Le gradient d'un champ scalaire introduit par la déf. 4, p. 321 n'est pas un simple outil mathématique : il a une signification physique importante. Par ex., le champ d'attraction newtonienne créé par une masse unitaire placée en O en un point M défini par :

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$, $r > 0$, $|\vec{u}| = 1$, est de la forme $-\frac{G\vec{u}}{r^2}$, $G > 0$. C'est le gradient en M de la fonction φ définie par $M \mapsto \varphi(M) = \frac{G}{r}$, indéfiniment différentiable sur le complémentaire de $\{O\}$.

On appelle *ligne de champ* d'un champ de vecteurs non nuls $M \mapsto \vec{h}(M)$ toute courbe dont la tangente en M est dirigée par $\vec{h}(M)$. Pour un champ de gradients, $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$, les lignes de champ sont orthogonales aux *surfaces de niveau $f(M)$ = constante.*

Dans l'exemple cité, les lignes de champ sont les demi-droites d'origine O, et les surfaces de niveau sont les sphères de centre O.

On définit deux autres entités qui jouent un rôle aussi important que le gradient, et qui ont également des propriétés intrinsèques : il s'agit de la divergence et du rotationnel.

Déf. 7 : Si la fonction $\vec{f}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est différentiable sur $D_{\vec{f}}$, on appelle divergence de $\vec{f}$, que l'on note $\text{div}\,\vec{f}$, la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $D_{\vec{f}}$ par $\vec{x} \mapsto \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu}(\vec{x})$.

Cette fonction ne dépend pas du repère affine choisi pour définir $\mathbb{R}^n$: il peut être orthonormé ou non, direct ou non.

Déf. 8 : Si la fonction $\vec{f}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est différentiable sur $D_{\vec{f}}$, on appelle rotationnel de $\vec{f}$, que l'on note $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f}$, la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie sur $D_{\vec{f}}$ par $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)(\vec{x}) \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)(\vec{x}) \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)(\vec{x}) \end{pmatrix}$, dans un repère orthonormé direct.

Cette fonction ne dépend pas du repère orthonormé direct choisi pour définir $\mathbb{R}^3$. Elle se change en son opposée si l'on prend un repère orthonormé indirect, ou si l'on change l'orientation de l'espace.

En utilisant le vecteur Nabla (p. 321), on obtient ainsi les écritures symboliques suivantes : $\text{div}\,\vec{f} = \langle\vec{\nabla}, \vec{f}\rangle$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f}$, plus faciles à mémoriser.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ vectoriel continûment différentiable sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^3$ soit un gradient, resp. un rotationnel, est que son rotationnel, resp. sa divergence, soit nul(le). Le champ précédent introduit à titre d'exemple satisfait à ces deux propriétés.

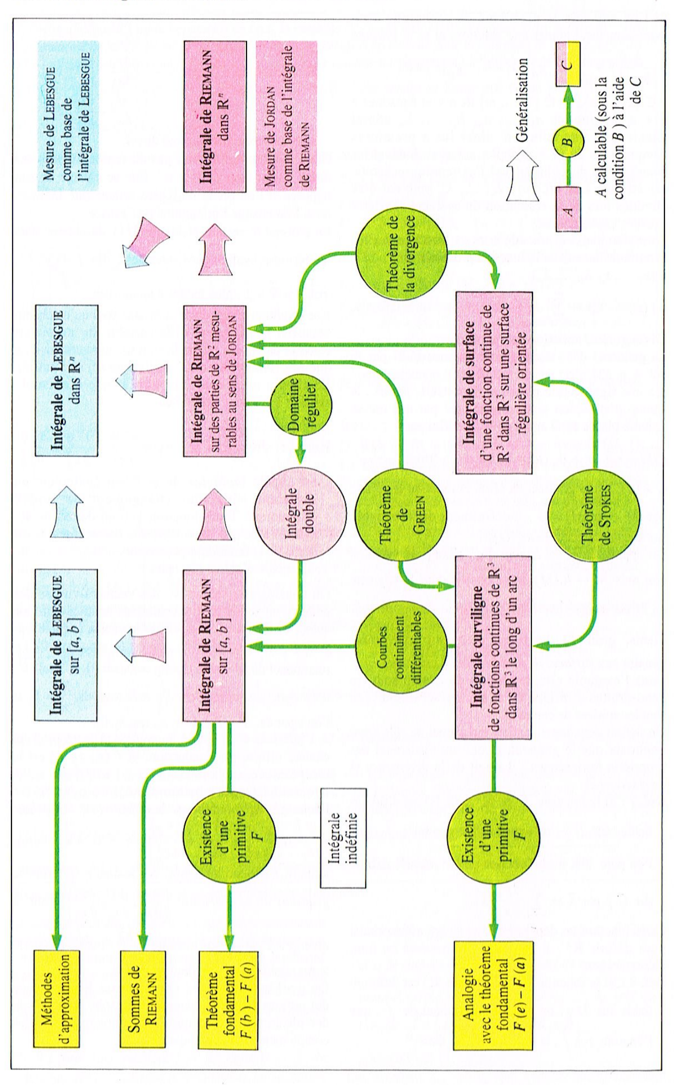
Rem. : $\text{div} \circ \overrightarrow{\text{grad}}\,\psi = \Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2}$ est appelé *laplacien* de ψ. C'est également un invariant sous tout changement de repère orthonormé. Toute fonction ψ d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\Delta\psi = 0$ est dite *harmonique*. C'est le cas de la fonction φ précédente.

Voici encore d'autres exemples :

On considère le champ $\vec{V}$ des vecteurs-vitesse des points d'un solide en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Ox_3. Si $\omega \neq 0$ est la vitesse angulaire, le vecteur vitesse en $M(x_1, x_2, x_3)$ est $(-\omega x_2, \omega x_1, 0)$. Le rotationnel de $\vec{V}$ est le champ constant $(0, 0, 2\omega)$. $\vec{V}$ n'est donc pas un gradient. En revanche, $\text{div}\,\vec{V} = 0$, et l'on a par ex. $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\,(\omega x_1 x_3, \omega x_2 x_3, 0)$.

À l'intérieur d'un solide homogène et isotrope S, la chaleur diffuse par conduction. Si $T(x_1, x_2, x_3)$ est la température au point (x_1, x_2, x_3) intérieur à S à l'instant t (repère orthonormé), on peut écrire l'*équation différentielle de la diffusion de la chaleur* $\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}\right)$, $a > 0$. Le champ scalaire T dépend du temps. À l'instant t, il définit le *gradient de température* $\left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \frac{\partial T}{\partial x_3}\right)$ dont la divergence est proportionnelle à $\frac{\partial T}{\partial t}$; cette propriété a une signification thermodynamique.

On peut multiplier les ex. montrant l'importance des notions abordées dans ce paragraphe pour l'étude des phénomènes physiques. On trouvera p. 355 des compléments mathématiques utiles.



Le calcul intégral trouve son origine dans le *problème de la mesure* des surfaces de figures géométriques dont la frontière n'est pas partout rectiligne. Il s'est avéré que ce problème possède une solution dès que la fonction représentant la frontière est convenable. Il est donc important de définir le concept de mesure : à la déf. de Jordan *de la mesure* est liée l'*intégrale* de Riemann, et à celle de Lebesgue est liée l'*intégrale* de Lebesgue (p. 357), cette dernière étant une généralisation de l'intégrale de Riemann.

Grâce à la déf. donnée p. 331 de l'*intégrale de* Riemann, on peut passer de fonctions simples, les *fonctions en escalier*, aux fonctions dites R-intégrables, pour lesquelles l'intégrale de Riemann existe. Les fonctions continues ainsi que les fonctions monotones sont R-intégrables (p. 333).

Une caractérisation des fonctions R-intégrables comme les fonctions dont l'ensemble des points de discontinuités est de mesure nulle au sens de Lebesgue est possible grâce à l'intégrale de Lebesgue (p. 363). On dit que les fonctions R-intégrables sont les fonctions bornées *continues presque partout*.

Le calcul des intégrales de Riemann à l'aide de la déf. est plutôt difficile. C'est pourquoi le th. 6 (p. 333) est fondamental. Si *l'intégrande*, fonction dont on calcule une intégrale, possède une primitive (fonction dont la dérivée est l'intégrande), alors la valeur de l'intégrale de Riemann est la différence des valeurs prises par la primitive aux bornes de l'intervalle d'intégration. Une partie importante de la théorie de l'intégration consiste donc en la *recherche de primitives* de fonctions données. Le calcul intégral apparaît donc comme « l'opération inverse » du calcul différentiel.

Dans ce contexte, les *intégrales indéfinies* (p. 335) se sont montrées utiles. Grâce à leur aide, on peut formuler aisément les principales *règles d'intégration* (par exemple *intégration par parties, changement de variables*, p. 337). Ces règles permettent de trouver les primitives données dans les tableaux pp. 338-339, et d'accéder au calcul pratique d'un ensemble plus vaste d'intégrales indéfinies.

On peut trouver les primitives de beaucoup de fonctions en les développant en série. C'est pourquoi les résultats concernant l'*intégration des séries* (p. 337) sont à considérer.

On trouve aussi (p. 340) des *méthodes d'approximation* permettant de calculer des intégrales plus compliquées et d'approcher leur valeur numérique à l'aide de calculatrices. La notion d'intégrale de Riemann sur un intervalle donné est étendue de façon naturelle aux *intégrales généralisées* (p. 341). Les *sommes de* Riemann (p. 347) trouvent beaucoup d'applications importantes. Elles permettent des approximations précises des intégrales de Riemann.

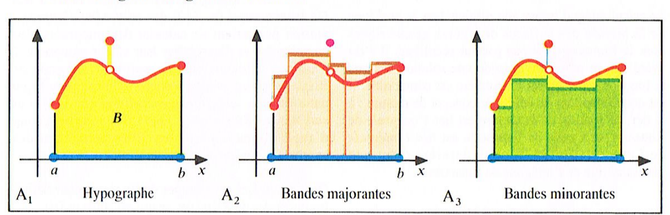
On peut utiliser ces sommes de Riemann pour définir les intégrales de Riemann, ce qui est souvent fait.

Le concept d'intégrale de Riemann s'étend par des considérations analogues aux *fonctions de plusieurs variables* (p. 345). Les intégrales ainsi définies se ramènent, lorsque les fonctions à intégrer sont définies sur des *domaines réguliers*, à des *intégrations successives* (p. 347). Le calcul d'intégrales de fonctions de deux variables est étroitement lié au *calcul de volumes* (p. 345). Les *sommes de* Riemann (p. 347) servent aussi pour l'approximation d'intégrales à plusieurs variables.

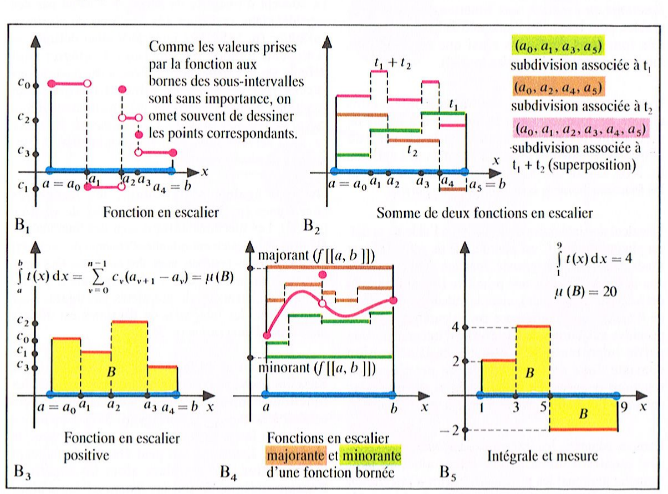
On peut également introduire les *intégrales curvilignes* (p. 351) et les *intégrales de surface* (p. 353). Les fonctions utilisées sont des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (également nommées champs de vecteurs) définies sur des courbes, resp. des surfaces. Ces deux notions sont indispensables à la formulation mathématique de beaucoup de propriétés physiques. Leur rapport avec les intégrales de Riemann est dû aux *théorèmes d'intégration* (p. 355).

La construction de la théorie de l'intégrale de Riemann trouve sa conception dans les propriétés des fonctions continues. Une généralisation de ceci conduit à la mesure de Jordan (p. 357). Comme ce concept se laisse généraliser, par exemple avec la mesure de Lebesgue, on peut étendre le concept d'intégration. On remplace alors les fonctions Riemann-intégrables par les *fonctions mesurables* (p. 361), dont on peut calculer l'*intégrale de* Lebesgue (p. 361). Dans le cas d'une fonction Riemann-intégrable, les intégrales de Riemann et Lebesgue ont même valeur. Beaucoup de problèmes sans solution dans le cadre de l'intégrale de Riemann sont alors souvent éclairés par la théorie de Lebesgue.

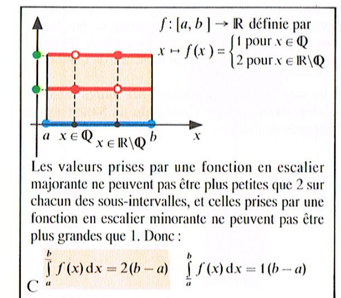
Il ne sera pas fait ici mention des autres théories d'intégration, comme l'intégrale de Stieltjes ou l'intégrale de Perron.



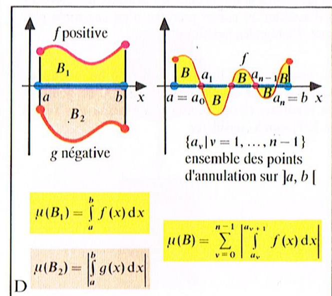
Mesure d'hypographes



Fonctions en escalier



Fonction bornée non intégrale au sens de RIEMANN



Détermination de mesures

Mesure d'hypographes

Soit une fonction donnée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *bornée positive*. Le domaine $B := \{(x,y) \mid x \in [a, b] \wedge y \in [0, f(x)]\}$ (ex. A_1) est *l'hypographe* de f ; sa mesure n'est pas encore définie. Dans le cas de la mesure de JORDAN, on approche l'ensemble B par un nombre fini de rectangles majorants ou minorants, éventuellement dégénérés. Comme le montrent les illustrations A_2 et A_3, on peut se limiter à des rectangles particuliers (*bandes*). Ces dernières bandes pouvant être décrites à l'aide de fonctions en escalier (voir ci-dessous), on approche ainsi l'hypographe de f par les hypographes de fonctions en escalier positives.

Fonctions en escalier

Déf. 1 : Une suite finie $(a_0, \ldots, a_n)$, où $n \in \mathbb{N}$, est une *subdivision* de $[a, b]$ si $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$. Les intervalles ouverts $]a_k, a_{k+1}[$ sont appelés *sous-intervalles*.
$t : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* sur $[a, b]$ si elle est constante sur chaque sous-intervalle de la subdivision (fig. B_1).

Une fonction en escalier est aussi définie aux bornes des sous-intervalles, les valeurs prises en ces points pouvant être quelconques. Une fonction en escalier peut présenter des *sauts* en certains points, dont le nombre reste *fini*. Dans tous les cas, une fonction en escalier est *bornée*.

Si t_1 et t_2 sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, il en est de même pour les fonctions $t_1 + t_2$ (fig. B_2), $t_1 \cdot t_2$ et $c \cdot t_1$ ($c \in \mathbb{R}$). La restriction d'une fonction en escalier à un sous-intervalle fermé est une fonction en escalier.

L'hypographe d'une fonction en escalier positive est mesurable (fig. B_3), et on note $\int_a^b t(x)\,dx$ sa mesure. Si $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ définissant t par $t(]a_k, a_{k+1}[) = \{c_k\}$, alors $\int_a^b t(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(a_{k+1} - a_k)$. La valeur de cette mesure est indépendante de la subdivision choisie. On a les propriétés suivantes :

(T1) $\int_a^b (t_1 + t_2)(x)\,dx = \int_a^b t_1(x)\,dx + \int_a^b t_2(x)\,dx$,

(T2) $\int_a^b (c \cdot t)(x)\,dx = c \cdot \int_a^b t(x)\,dx \cdot (c \in \mathbb{R}_+)$,

(T3) $\int_a^b t_1(x)\,dx \le \int_a^b t_2(x)\,dx$, si $t_1(x) \le t_2(x)$

pour tout $x \in [a, b]$; et pour $a \le c \le b$:

(T4) $\int_a^b t(x)\,dx = \int_a^c t(x)\,dx + \int_c^b t(x)\,dx$.

Déf. 2 : Une fonction en escalier $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *majorante* de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in [a, b]$ on a $t(x) \ge f(x)$. Elle est dite *minorante* si $t(x) \le f(x)$. (fig. B_4).

Toute fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possède des fonctions en escalier majorantes *et* minorantes, par exemple les fonctions constantes définies par les bornes supérieures et inférieures de l'image de $[a, b]$ par f. (fig. B_4). Par contre, ceci n'est pas possible avec les fonctions non bornées.

Intégrales majorante et minorante

On considère une fonction bornée positive $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et on note S l'ensemble des fonctions en escalier majorantes de f et I l'ensemble des fonctions en escalier minorantes. Les deux quantités suivantes sont alors définies :

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_a^b t(x)\,dx \;\middle|\; t \in S\right\}$$

(*intégrale supérieure*),

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{\int_a^b t(x)\,dx \;\middle|\; t \in I\right\}$$

(*intégrale inférieure*).

Si ces deux quantités coïncident, alors leur valeur commune est notée $\int_a^b f(x)\,dx$. Lorsqu'elle existe, cette valeur détermine la *mesure* de l'hypographe.

Il existe des fonctions bornées positives pour lesquelles l'hypographe n'a pas de mesure au sens précédent (fig. C) ; l'existence de leur mesure fait alors appel à des propriétés plus fines (*cf.* p. 333).

Intégrale de RIEMANN

On arrive à l'intégrale de RIEMANN en prenant pour interprétation de l'intégrale la mesure de l'hypographe, seulement dans le cas de fonctions positives. Pour toute fonction en escalier définie sur $[a, b]$ on définit $\int_a^b t(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(a_{k+1} - a_k)$.

Les règles (T1) à (T4) sont alors valables, et les intégrales supérieure et inférieure d'une fonction bornée donnée existent aussi (la condition « fonction positive » apparaît dans I).

Déf. 3 : Si les deux intégrales supérieure et inférieure d'une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ont même valeur, alors on dit que f est RIEMANN-*intégrable* (en abrégé R-*intégrable*) sur $[a, b]$. La valeur commune de ces intégrales est notée $\int_a^b f(x)\,dx$ et s'appelle *intégrale de* RIEMANN de f sur $[a, b]$. f est aussi appelée *intégrande*, $[a, b]$ *intervalle d'intégration*, *a* et *b bornes d'intégration*.

Déf. 4 : $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Pour une fonction bornée positive (négative), l'intégrale de f (la valeur absolue de l'intégrale) donne la mesure de l'hypographe. Cependant, l'interprétation de l'intégrale comme mesure n'est en général pas possible (fig. B_5).

L'utilisation des intégrales supérieure et inférieure pour prouver l'existence de l'intégrale de RIEMANN est souvent très lourde. Le critère de RIEMANN donne une méthode plus pratique :

Th. : *Une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est R-intégrable si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction en escalier majorante t_s et une fonction en escalier minorante t_i telles que :*

$$\int_a^b t_s(x)\,dx - \int_a^b t_i(x)\,dx < \varepsilon .$$

Soit $f : [a, b\,] \to$ bornée et monotone croissante sur $]a, b[$

M, m, $t_s^{(n)}$, $t_i^{(n)}$, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $\Delta x(M-m)$, Δx, $a = a_0$, a_1, a_{n-1}, $a_n = b$, x

A

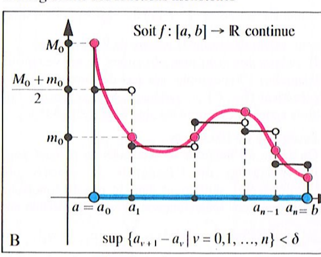
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donné. On choisit $n > \dfrac{b-a}{\varepsilon}(M-m)$, où M est un majorant et m un minorant de f. On construit alors les fonctions en escalier $t_s^{(n)}$ et $t_i^{(n)}$ comme sur la figure. Elles vérifient :

$$\int_a^b t_s^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \Delta x(f(a_1) + \cdots + f(a_{n-1}) + M),$$

$$\int_a^b t_i^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \Delta x(m + f(a_1) + \cdots + f(a_{n-1}))$$ d'où

$$\int_a^b t_s^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b t_i^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \Delta x(M-m) < \varepsilon.$$

R-intégrabilité des fonctions monotones



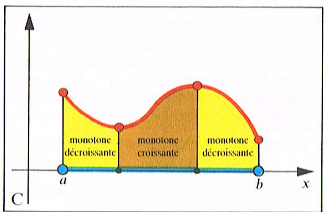
f est aussi uniformément continue. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe donc un $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, tel que pour tous $|x_1 - x_2| < \delta$, on a : $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
On choisit une subdivision de $[a, b]$ de pas plus petit que δ, et on définit sur $[a, b]$ une fonction en escalier t_ε par :

$$t_\varepsilon[[a_v, a_{v+1}[] = \left\{\frac{M_v + m_v}{2}\right\} \quad (v = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$t_\varepsilon(a_n) = \frac{M_{n-1} + m_{n-1}}{2}$$

avec $M_v = \max(f[a_v\,;\,a_{v+1}])$ et $m_v = \min(f[a_v\,;\,a_{v+1}])$. On a alors : $|f(x) - t_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ pour tout x de $[a, b]$.

Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier



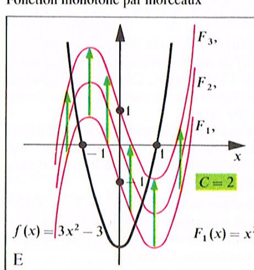
Fonction monotone par morceaux

$\mu(B) = f(c) \cdot (b-a)$

B, $f(c)$, a, c, b, x

D

Théorème de la valeur moyenne de l'intégrale



Si F est une primitive de f, il en est de même pour $F + C$ (C fonction constante), car on a :
$(F + C)' = F' + C' = F' = f'$.
Si F et G sont deux primitives de f, on tire de $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$ et du théorème de différentiation (p. 297) que $G - F$ est une fonction constante : $G = F + C$.
$\{F + C \mid C$ fonction constante$\}$ est donc l'ensemble de toutes les primitives de f. Les graphes se déduisent les uns des autres par translation le long de l'axe des y.

$F_1(x) = x^3 - 3x - 1$ $\quad F_2(x) = x^3 - 3x$ $\quad F_3(x) = x^3 - 3x + 1$

Ensemble des primitives

Règles d'intégration

Si f et g sont deux fonctions définies sur $[a, b]$, R-intégrables, il en est de même des fonctions $f + g$, $f \cdot g$ et $c \cdot f$ (pour $c \in \mathbb{R}$). Et on a :

(R1) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,

(R2) $\displaystyle\int_a^b (c \cdot f)(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \; (c \in \mathbb{R})$,

(R3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, si $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ (*monotonie*),

(R4) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pour $a \le c \le b$ (*additivité*),

(R5) $\displaystyle m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$, ou m est un minorant et M un majorant de $f([a, b])$,

(R6) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Rem. : Il n'existe pas de règle similaire à (R1) pour le produit $f \cdot g$ (*cf.* p. 337, intégration par parties).

Fonctions R-intégrables

On démontre grâce au critère de RIEMANN (p. 331) :

Th. 1 : *Toute fonction bornée monotone sur* $]a, b[$ *est R-intégrable* (fig. A).

L'ensemble des fonctions monotones sur $[a, b]$ ne représente qu'une petite partie des fonctions R-intégrables. Cependant, on peut très souvent découper une fonction quelconque en plusieurs fonctions monotones (fig. C).

Déf. 1 : $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *monotone par morceaux* s'il existe une subdivision de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des sous-intervalles soit monotone.

On démontre alors à l'aide du th. 1 et de la règle (R4) :

Th. 2 : *Toute fonction bornée et monotone par morceaux est R-intégrable.*

Les fonctions R-intégrables rencontrées jusqu'à présent n'avaient pas besoin d'être continues. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, elle est uniformément continue (th. 15 p. 289). Il résulte de cette propriété qu'à chaque $\varepsilon > 0$, on peut associer une fonction en escalier $t_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x) - t_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$ (fig. B). Une fonction continue sur $[a, b]$ est donc approchable par des fonctions en escalier à la précision voulue. Et la R-intégrabilité en découle facilement.

On démontre ensuite

Th. 3 : *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est R-intégrable si pour tout* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver une fonction en escalier* $t_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que* $|f(x) - t_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ *pour tout* $x \in [a, b]$.

Il résulte du th. 3

Th. 4 : *Toute fonction continue* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est R-intégrable.*

Rem. : On peut dans le th. 4 remplacer « *continue* » par « *continue, sauf en un nombre fini de points, et bornée* ». Dans la théorie de LEBESGUE (p. 363), on montre que les fonctions R-intégrables sont les fonctions bornées qui ne présentent pas « trop » de points de discontinuité. L'ensemble des points de discontinuité est dans l'exemple C, p. 330, « trop grand ».

Valeur moyenne de l'intégrale

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, d'après le th. 10 p. 287, l'ensemble image $f([a, b])$ possède un plus petit et un plus grand élément. Ces deux éléments sont atteints par f, en x_1 et x_2 respectivement. Selon la règle (R5), on a alors :

$\displaystyle f(x_1) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le f(x_2)$. Et en utilisant le th. 9 p. 287, on obtient

Th. 5 (valeur moyenne de l'intégrale) : *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue, alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\ .$$

Pour une fonction positive, cette propriété peut s'illustrer par la figure D.

Théorème fondamental du calcul intégral

Il n'est pas nécessaire de calculer la valeur de l'intégrale pour prouver la R-intégrabilité. Un calcul à l'aide des fonctions en escalier est possible, mais très vite fastidieux, même avec des fonctions très simples comme les fonctions puissance $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$), où l'on obtient $\displaystyle\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Le calcul d'intégrales nécessite dans bien des cas un lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral, formulé dans le th. fondamental suivant.

Déf. 2 : une fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si, et seulement si, $F' = f$.

Th. 6 (fondamental) : *Si la fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *R-intégrable, possède une primitive* F, *alors on a :*

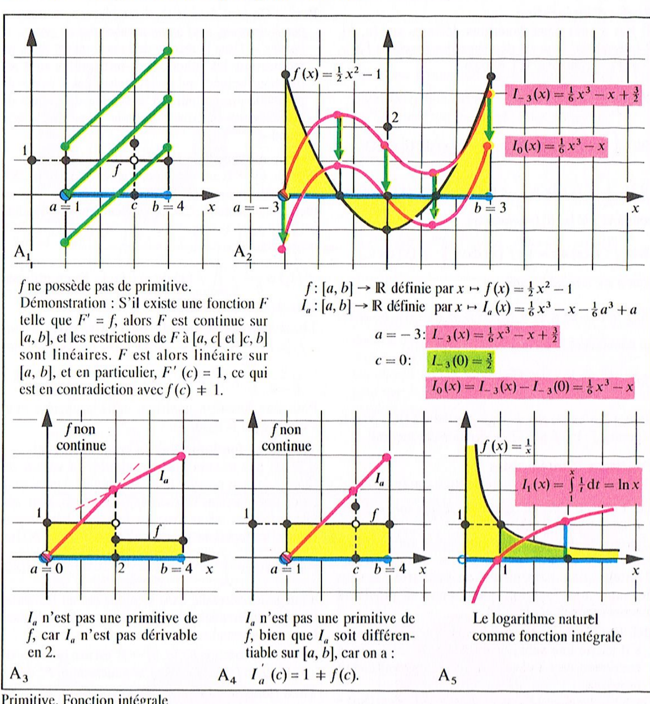
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Rem. : Il est souvent utile dans les calculs d'écrire $[F(x)|_a^b$ à la place de $F(b) - F(a)$.

Ce théorème précise donc qu'une intégrale s'exprime comme *différence des valeurs prises en a et b par une primitive*, dans le cas où l'on peut en trouver. On peut alors choisir n'importe laquelle des primitives de f, car elles sont toutes définies à une constante près, qui s'élimine en faisant la différence (fig. E).

$\displaystyle\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x$ $(n \ne -1)$ se calcule facilement avec la primitive $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$:

$$\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}\ .$$



Primitive. Fonction intégrale

Fonction intégrande		Primitive	Écriture à l'aide de l'intégrale indéfinie
a	$(a \in \mathbb{R})$	ax	$\int a\,dx = ax$; $\int dx = x$
x^r	$(r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$\frac{1}{x}$ $(0 \notin [a, b]$		$\ln\|x\|$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\|$
e^x		e^x	$\int e^x\,dx = e^x$
a^x	$(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$	$\frac{1}{\ln a}a^x$	$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x$
$\sin x$ ($\operatorname{sh} x$)		$-\cos x$ ($\operatorname{ch} x$)	$\int \sin x\,dx = -\cos x$
$\cos x$ ($\operatorname{ch} x$)		$\sin x$ ($\operatorname{sh} x$)	$\int \cos x\,dx = \sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)$		$\tan x$ ($\operatorname{th} x$)	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right)$		$-\cot x$ ($-\operatorname{coth} x$)	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$

B

Intégrales de base

Existence de primitives

Pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ en utilisant le th. 6 (p. 333), la fonction f R-intégrable doit posséder des primitives. La figure A_1 montre qu'il existe des fonctions R-intégrables qui ne possèdent pas de primitives. La continuité de la fonction f n'est pas non plus nécessaire pour qu'elle possède des primitives (*cf.* par exemple la dérivée de la fonction de la fig. A, p. 294). Mais c'est une condition suffisante : Si f est continue sur $[a, b]$, alors elle possède une primitive. Pour démontrer cette proposition, on considère les fonctions intégrales.

Déf. 1 : Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, R-intégrable. On appelle *fonction intégrale* de f sur $[a, b]$ la fonction $I_a: [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (fig. A_2).

Rem. : On peut définir pour tout $c \in [a, b]$ une fonction intégrale $I_c: [a, b] \to \mathbb{R}$ par $x \mapsto I_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. On a alors $I_c(x) = I_a(x) - I_a(c)$ (fig. A_2), ce qui est une autre formulation de la règle (R4) p. 333. Comme x intervient en tant que variable de borne d'intégration, il est exclu de l'utiliser aussi comme *variable d'intégration*. On choisit souvent alors t comme variable d'intégration.

D'après le th. 4 p. 333, une fonction continue $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ étant aussi R-intégrable, la fonction intégrale I_a existe. On montre que c'est une primitive de f, car on a pour tout $x \in [a, b]$:

$$I'_a(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \text{ c'est-à-dire } I'_a = f.$$

On en déduit

Th. : *Toute fonction continue possède une primitive.*

Rem. : Une fonction non continue R-intégrable $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ permet aussi de définir une fonction I_a, mais cette dernière n'est pas une primitive de f (fig. A_3 et A_4).

Le th. 6 est donc utilisable pour toute fonction continue. Cependant, la manière dont on a prouvé l'existence de primitives de fonctions continues ne nous donne aucun renseignement sur les primitives elle-mêmes, si bien que la recherche de primitives reste un problème souvent difficile. Pour résoudre ce dernier, on a développé un certain nombre de techniques.

Méthodes de détermination de primitives

Le procédé le plus simple pour déterminer des primitives consiste à dériver des fonctions connues. La fonction de départ est alors sûrement une primitive de sa dérivée. Par cette méthode, on obtient entre autres les résultats de la figure B.

Exemple d'utilisation : $f(x) = \ln|x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ (p. 309) $\Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$ (th. 6).

Rem. : Comme $\ln(1) = 0$, on obtient une représentation du logarithme néperien sous forme de fonction intégrale : $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ (fig. A5).

Alors que par ce procédé les intégrales de fonctions polynomiales et trigonométriques se déterminent facilement, on rencontre plus de difficultés avec, par exemple, les fonctions rationnelles. On utilise alors d'autres techniques de détermination d'intégrales. Les principales sont l'intégration par parties et par changement de variable d'intégration (p. 337).
Pour ces dernières méthodes, il est très commode de travailler avec les intégrales indéfinies.

Intégrales indéfinies

Si F est une primitive quelconque de $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, alors l'ensemble des primitives de f est $\{F + C \mid C$ fonction constante$\}$. À l'addition d'un terme constant près, le terme général de toute primitive de f est le terme $F(x)$. Si on écrit alors $\int f(x)\,dx = F(x)$, $\int f(x)\,dx$ représente l'ensemble des primitives de f à l'addition d'une constante près. $\int f(x)\,dx$ est appelée *intégrale indéfinie* de f.
L'utilisation des intégrales indéfinies permet d'une part d'exprimer clairement le lien entre différentiation et intégration pour f continue, car $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = F'(x) = f(x)$; elle est d'autre part utile dans la mesure où elle permet d'éviter la lourdeur des notations de l'intégrale de RIEMANN avec bornes d'intégrations :
Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ est R-intégrable et $\int f(x)\,dx = F(x)$, alors on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Rem. 1 : Alors que l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$ désigne une fonction primitive quelconque de f, $\int_a^b f(x)\,dx$ est un nombre réel, que l'on appelle souvent *intégrale définie* de f sur $[a, b]$.

Rem. 2 : L'intégrale indéfinie est souvent employée différemment. On trouve souvent l'écriture $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, qui laisse apparaître la constante additive.

Rem. 3 : Les règles d'égalité posent un certain problème lorsqu'on utilise les intégrales indéfinies. De $\int f(x)\,dx = F_1(x)$ et $\int f(x)\,dx = F_2(x)$, on ne tire pas $F_1(x) = F_2(x)$, mais $F_1(x) = F_2(x) + C$.

$\int x \cdot \sin x \, dx \quad f'(x) = \sin x, \; g(x) = x$

$\int x \cdot \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x) dx$

A₁ $\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x$

$\int \cos^2 x \, dx \quad f'(x) = \cos x, \; g(x) = \cos x$

$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx$

$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx$

$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x$

A₂ $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)$

$\int t \cdot \sin t^2 \, dt \quad (f \circ \varphi)(t) = \sin t^2, \; \varphi(t) = t^2$

$\varphi'(t) = 2t, \; f(x) = \sin x$

$\int t \cdot \sin t^2 \, dt = \frac{1}{2} \int 2t \cdot \sin t^2 \, dt$

$\int t \cdot \sin t^2 \, dt = \frac{1}{2} [\int \sin x \, dx]_{x = t^2}$

A₃ $\int t \cdot \sin t^2 \, dt = -\frac{1}{2} \cos t^2$

$\int \sqrt[3]{x+2} \, dx \quad \varphi^{-1}(x) = t = \sqrt[3]{x+2}, \; \varphi'(t) = 3t^2$

$\int \sqrt[3]{x+2} \, dx = [\int t \cdot 3t^2 \, dt]_{t = \sqrt[3]{x+2}}$

A₄ $\int \sqrt[3]{x+2} \, dx = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}$

$\int \sqrt{1-x^2} \, dx \quad \varphi(t) = x = \sin t$

$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = [\int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt]_{t = \varphi^{-1}(x)}$

$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = [\int \cos^2 t \, dt]_{t = \varphi^{-1}(x)}$

A₅ $\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} x$

$\int \frac{x}{x^2+1} dx \quad \varphi(x) = x^2 + 1, \; \varphi'(x) = 2x$

$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx$

A₆ $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+1|$

Exemples d'intégrales

$t = \varphi^{-1}(x)$	$x = \varphi(t)$	$\varphi'(t)$	$t = \varphi^{-1}(x)$	$x = \varphi(t)$	$\varphi'(t)$
$t = ax + b$	$x = \frac{1}{a}(t - b)$	$\frac{1}{a}$	$t = \sqrt{\pm a^2 + x^2}$	$x = \sqrt{t^2 \mp a^2}$	$\frac{t}{\sqrt{t^2 \mp a^2}}$
$t = \sqrt[n]{ax + b}$	$t = \frac{1}{a}(t^n - b)$	$\frac{1}{a} n t^{n-1}$	$t = \sqrt{a^2 - x^2}$	$x = \sqrt{a^2 - t^2}$	$-\frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}$
$t = a^x$	$x = \frac{1}{\ln a} \ln t$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{t}$	$t = \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$	$x = a \sin t$	$a \cos t$
$t = e^x$	$x = \ln t$	$\frac{1}{t}$	$t = \operatorname{Arccos} \frac{x}{a}$	$x = a \cos t$	$-a \sin t$
B $t = \ln x$	$x = e^t$	e^t	$t = \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$	$x = a \tan t$	$\frac{a}{\cos^2 t}$

Changements de variables usuels

On déduit du théorème que l'on peut intégrer terme à terme une série entière sur tout intervalle compact où elle converge, car la convergence est alors uniforme.
On peut utiliser cette propriété pour donner des développements en série entière de fonctions compliquées qui sont définies par des fonctions intégrales. Par exemple

Fonction donnée	Série entière utilisée	intégration terme à terme
$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$ (*cf.* p. 335)	$\frac{1}{1+t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu t^\nu$, $\lvert t \rvert < 1$ (p. 300, fig. C)	$\ln(1+x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^\nu t^\nu dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} x^\nu$, $\lvert x \rvert < 1$ (p. 308, fig. A)
$\operatorname{Arctan} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ (*cf.* pp. 309, 311)	$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu t^{2\nu}$, $\lvert t \rvert < 1$	$\operatorname{Arctan} x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^\nu t^{2\nu} dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} x^{2\nu+1}$, $\lvert x \rvert < 1$ (p. 308, fig. D)
$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ (sinus intégral)	$\sin t = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} t^{2\nu+1}$ (p. 308, fig. D) $\frac{\sin t}{t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} t^{2\nu}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$	$\int \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} t^{2\nu} dt$ $= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1) \cdot (2\nu+1)!} x^{2\nu+1}$, $x \in \mathbb{R}$
$\int e^{-x^2} dx = \int_0^x e^{-t^2} dt$ C	$e^t = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} t^\nu$ (p. 308, fig. A) $e^{-t^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} t^{2\nu}$, $t \in \mathbb{R}$	$\int e^{-x^2} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^\nu}{\nu!} t^{2\nu} dt$ $= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1) \cdot \nu!} x^{2\nu+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Exemples d'intégrations terme à terme

Méthodes d'intégration

Les trois règles suivantes sont essentielles au « calcul » des intégrales indéfinies. Leur validité s'établit facilement grâce aux règles similaires valables pour le calcul différentiel.

(U1) $\int (f+g)(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$,

(U2) $\int (c \cdot f)(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx$,

(U3) $\int f'(x) \, dx = f(x)$.

Il n'y a pas de règle équivalente à (U1) pour le produit $f \cdot g$. Mais on obtient pour des fonctions f et g continûment différentiables en utilisant la formule de *dérivation du produit* (p. 293) et les règles (U1) et (U3) :

$\int (f(x) g(x))' \, dx = f(x) \cdot g(x)$, soit

$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x)$.

On en tire la règle dite d'**intégration par parties** :

(U4) $\int f'(x) \cdot g(x) \, dx =$

$f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$.

Cette règle s'emploie souvent avec succès lorsqu'on cherche une primitive d'un produit de fonctions, connaissant déjà une primitive de l'un des facteurs. La formule ne donne toutefois pas immédiatement le résultat cherché, mais simplifie beaucoup la tâche. On doit en effet calculer $\int f(x) \cdot g'(x) \, dx$ au lieu de $\int f'(x) \cdot g(x) \, dx$, ce qui peut être plus facile dans bien des cas.

Exemples : Fig. A_1, A_2.

En utilisant la règle de dérivation des *fonctions composées* (p. 295), on obtient un autre procédé d'intégration. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi : [c, d] \to W_\varphi$ ($W_\varphi \subseteq \mathbb{R}$) continûment différentiable, si la composition $f \circ \varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ est possible, alors la composée $F \circ \varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$, où F est une primitive de f, est aussi définie. D'après la règle de dérivation des fonctions composées, $F \circ \varphi$ est une primitive de $(F' \circ \varphi) \cdot \varphi'$, c'est-à-dire de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Ce dernier résultat peut s'appliquer de deux manières différentes au calcul d'intégrales indéfinies.

a) La fonction intégrande est de la forme $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ avec les conditions énoncées ci-dessus pour f et φ. On détermine alors F, soit $\int f(x) \, dx$, et on construit ensuite la composée $F \circ \varphi$. On peut noter symboliquement $\left[\int f(x) \, dx \right]_{x = \varphi(t)}$. On en tire la règle

(U5) $\int (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) \, dt = \left[\int f(x) \, dx \right]_{x = \varphi(t)}$,

qui peut être particulièrement utile pour le produit de fonctions.

Exemple : Fig. A_3.

b) On donne une fonction intégrande continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On choisit alors une fonction φ qui satisfait aux conditions ci-dessus et qui est *de surcroît* strictement monotone ($\varphi'(x) > 0$ ou $\varphi'(x) < 0$) sur $[a, b]$. On détermine $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, et on en cherche une primitive $F \circ \varphi$, en calculant $\int (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) \, dt$. On détermine enfin $F \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$, ce qui donne une primitive F de f. On peut résumer symboliquement ce processus par

$\left[\int (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) \, dt \right]_{t = \varphi^{-1}(x)}$, et on en tire la règle

(U6) $\int f(x) \, dx = \left[\int (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) \, dt \right]_{t = \varphi^{-1}(x)}$,

qui est aussi connue en tant que règle du **changement de variable**, car on remplace x par $\varphi(t)$, dx par $\varphi'(t) \cdot dt$, et t par $\varphi^{-1}(x)$ après intégration.

Exemples : Fig. A_4, A_5.

Un choix judicieux de φ est essentiel pour la bonne marche de la méthode. Les fonctions souvent utilisées sont données au tableau B. En particulier on a la règle :

(U7) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \ln |\varphi(x)|$.

Exemple : Fig. A_6.

Avec les règles ici introduites, toutes les fonctions rationnelles se laissent intégrer (décomposition en éléments simples p. 305), ainsi que beaucoup d'autres fonctions non rationnelles. Les intégrales indéfinies les plus importantes sont données dans les tables pp. 338-339.

Intégration des séries

L'exemple du calcul de la longueur d'une ellipse (p. 346, fig. C) montre l'utilisation d'un développement en série de l'intégrande pour le calcul d'une intégrale définie. Cet emploi, illustré en fig. C, sert pour la détermination d'intégrales définies ou indéfinies, ainsi que pour le développement en série entière de primitives. Il s'appuye sur le th. suivant :

Th. : *Si la série* $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ *des fonctions R-intégrables* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *converge uniformément* (p. 289), *alors :*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) \, dx .$$

Utilisation : Fig. C.

① $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$

② $\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$

③ $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-D}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{-D}} & \text{pour } D<0 \\ -\frac{2}{2ax+b} & \text{pour } D=0 \\ \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{D}}{2ax+b+\sqrt{D}} \right| = \frac{2}{\sqrt{D}} \operatorname{argth} \frac{2ax+b}{\sqrt{D}} & \text{für } D>0 \end{cases}$

$(D := b^2 - 4ac)$

④ $\int \frac{x}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{2a} \ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx$

⑤ $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} \, dx = \frac{2ax+b}{(-D)(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2a(2n-3)}{(-D)(n-1)} \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \, dx$

$(n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, D<0)$

⑥ $\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n} \, dx = \frac{bx+2c}{D(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{b(2n-3)}{D(n-1)} \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \, dx$

A $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, D<0)$

Intégrales indéfinies de fonctions rationnelles $(a \neq 0)$

⑦ $\int (ax+b)^r \, dx = \frac{1}{a(r+1)} (ax+b)^{r+1} \quad (r \neq -1)$

⑧ $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln|2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} + 2ax+b| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{argsh} \frac{2ax+b}{\sqrt{-D}} & \text{pour } D<0, a>0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \ln|2ax+b| & \text{pour } D=0, a>0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{Arcsin} \frac{2ax+b}{\sqrt{D}} & \text{pour } D>0, a<0 \end{cases}$

⑨ $\int \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \, dx = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}) \sqrt{ax^2+bx+c} + b_n \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \, dx$.

En pratique on détermine les b_j en fonction des a_i en multipliant par le radical la relation

$\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{dx} \left[(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}) \sqrt{ax^2+bx+c} \right] + \frac{b_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

et en identifiant les polynômes obtenus de part et d'autre du signe d'égalité

⑩ $\int \sqrt{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{2ax+b}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{D}{8a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \, dx$

$a>0$ à partir de ⑫ inclus

⑪ $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \, dx = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \, dx$

⑫ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$

⑬ $\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$

⑭ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \, dx = \operatorname{argsh} \frac{x}{a}$

⑮ $\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{argsh} \frac{x}{a}$

⑯ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \, dx = \operatorname{argch} \frac{x}{a}$

⑰ $\int \sqrt{x^2-a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{argch} \frac{x}{a}$

⑱ $\int x\sqrt{a^2 \pm x^2} \, dx = \pm \frac{1}{3} \sqrt{(a^2 \pm x^2)^3}$

⑲ $\int \frac{1}{x} \sqrt{a^2 \pm x^2} \, dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a \ln \left| \frac{1}{x} (a + \sqrt{a^2 \pm x^2}) \right|$

⑳ $\int x\sqrt{x^2-a^2} \, dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2-a^2)^3}$

㉑ $\int \frac{1}{x} \sqrt{x^2-a^2} \, dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \operatorname{Arccos} \frac{a}{x}$

㉒ $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = -\sqrt{a^2-x^2}$

㉓ $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$

㉔ $\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \, dx = \sqrt{a^2+x^2}$

㉕ $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{argsh} \frac{x}{a}$

㉖ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \, dx = \sqrt{x^2-a^2}$

㉗ $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{argch} \frac{x}{a}$

B

Intégrales indéfinies de fonctions algébriques particulières $(a \neq 0)$ sur des intervalles convenables

① $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

② $\int \frac{e^{ax}}{x} \, dx = \ln|x| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(ax)^\nu}{\nu \cdot \nu!}$

*③ $\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$

④ $\int g(x) \cdot e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} g(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int g'(x) e^{ax} \, dx$ (g fonction polynôme)

⑤ $\int \ln x \, dx = x \ln x - x \quad (x>0)$

⑥ $\int \frac{1}{\ln x} \, dx = \ln|\ln x| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^\nu}{\nu \cdot \nu!} \quad (x>0)$

⑦ $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \ln|\ln x| \quad (x>0)$

⑧ $\int \frac{(\ln x)^n}{x} \, dx = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, x>0)$

⑨ $\int \frac{x^m}{\ln x} \, dx = \ln|\ln x| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(m+1)^\nu (\ln x)^\nu}{\nu \cdot \nu!} \quad (m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, x>0)$

⑩ $\int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx \quad (m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, x>0)$

⑪ $\int e^{ax} \ln x \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \ln|x| - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} \, dx$

⑫ $\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$

⑬ $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$

⑭ $\int \tan ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos ax|$

⑮ $\int \operatorname{cotan} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln|\sin ax|$

⑯ $\int \frac{1}{\sin ax} \, dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tan \frac{ax}{2} \right|$

⑰ $\int \frac{1}{\cos ax} \, dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$

*⑱ $\int \sin^n ax \, dx = -\frac{1}{na} \sin^{n-1} ax \cos ax + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, dx \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\})$

*⑲ $\int \cos^n ax \, dx = \frac{1}{na} \cos^{n-1} ax \sin ax + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\})$

* Pour les exposants négatifs, la formule de récurrence est à lire de droite à gauche.

⑳ $\int \tan^n ax \, dx = \frac{1}{a(n-1)} \tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax \, dx \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$

㉑ $\int \operatorname{cotan}^n ax \, dx = -\frac{1}{a(n-1)} \operatorname{cotan}^{n-1} ax - \int \operatorname{cotan}^{n-2} ax \, dx \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$

㉒ $\int \frac{\sin ax}{x} \, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(ax)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)(2\nu+1)!}$

㉓ $\int \frac{\cos ax}{x} \, dx = \ln|ax| + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(ax)^{2\nu}}{2\nu(2\nu)!}$

*㉔ $\int x^n \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$

*㉕ $\int x^n \cos ax \, dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$

㉖ $\int \frac{1}{1+\sin ax} \, dx = \frac{1}{a} \tan \left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$

㉗ $\int \frac{1}{1-\sin ax} \, dx = \frac{1}{a} \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

㉘ $\int \frac{1}{1+\cos ax} \, dx = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2}$

㉙ $\int \frac{1}{1-\cos ax} \, dx = -\frac{1}{a} \operatorname{cotan} \frac{ax}{2}$

㉚ $\int \operatorname{sh} ax \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{ch} ax$

㉛ $\int \operatorname{ch} ax \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{sh} ax$

$a>0$ à partir de ㉞ inclus

㉜ $\int \operatorname{th} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln|\operatorname{ch} ax|$

㉝ $\int \operatorname{coth} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln|\operatorname{sh} ax|$

㉞ $\int \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} \, dx = x \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}$

㉟ $\int \operatorname{Arccos} \frac{x}{a} \, dx = x \operatorname{Arccos} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$

㊱ $\int \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} \, dx = x \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2+a^2)$

㊲ $\int \operatorname{Arccotan} \frac{x}{a} \, dx = x \operatorname{Arccotan} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(x^2+a^2)$

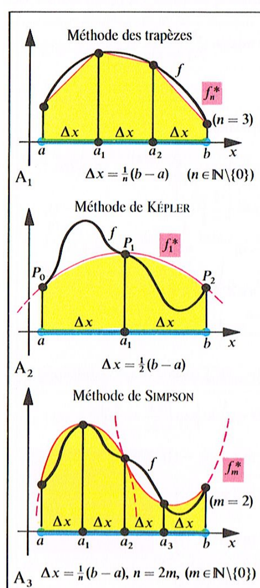
㊳ $\int \operatorname{argsh} \frac{x}{a} \, dx = x \operatorname{argsh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2}$

㊴ $\int \operatorname{argch} \frac{x}{a} \, dx = x \operatorname{argch} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2}$

㊵ $\int \operatorname{argth} \frac{x}{a} \, dx = x \operatorname{argth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2-x^2)$

㊶ $\int \operatorname{argcoth} \frac{x}{a} \, dx = x \operatorname{argcoth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(x^2-a^2)$

Intégrales indéfinies de fonctions transcendantes particulières.



$$\int_a^b f_n^*(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\left[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a_1) + \cdots + f(a_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(b)\right]$$

Erreur : $|R_n| := \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n^*(x)\,\mathrm{d}x\right| \left(\leq \frac{M\,(b-a)^3}{12\,n^2}\right)$

($M := \max\{|f''(x)| \mid x \in [a, b]\}$, f deux fois continûment dérivable).

Il passe une unique parabole d'axe parallèle à l'axe des y par les points P_0, P_1 et P_2. On a :

$$\int_a^b f_1^*(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(a_1) + f(b)\right]$$

Erreur : $|R_1| := \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_1^*(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq$

($M := \max\{|f^{(4)}(x)| \mid x \in [a, b]\}$, f quatre fois continûment dérivable).

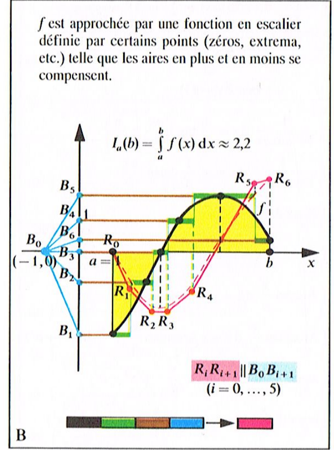
Pour les fonctions polynomiales de degré inférieur à 3, on a $R_1 = 0$. Pour les autres fonctions, on a une erreur plus faible en utilisant la méthode de Simpson, qui consiste à appliquer plusieurs fois de suite la méthode de Képler.

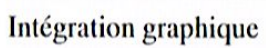
$$\int_a^b f_m^*(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6\,m}\left[f(a) + 4f(a_1) + 2f(a_2) + \cdots + 4f(a_{m-3}) + 2f(a_{m-2}) + 4f(a_{m-1}) + f(b)\right]$$

Erreur : $|R_m| := \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_m^*(x)\,\mathrm{d}x\right| \left(\leq \frac{M\,(b-a)^5}{2880\,m^4}\right)$

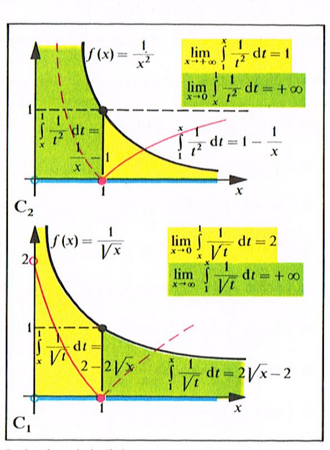
($M := \max\{|f^{(4)}(x)| \mid x \in [a, b]\}$, f quatre fois continûment dérivable).

Méthodes d'approximation





Intégration graphique



Intégrales généralisées

Intégrales généralisées

L'intégrale de Riemann (p. 331) n'est définie que pour certaines fonctions bornées sur des intervalles *fermés* $[a, b]$. L'écriture $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ n'a donc aucun sens.

Comme $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ existe pour tout $x \in\,]0, 1]$, $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ définit sur $]0, 1]$ une fonction dont la limite $\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ existe (fig. C_1). Cette limite est appelée intégrale généralisée sur $]0, 1]$ et est notée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

De même, la notation $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ représente la limite $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ qui existe (fig. C_2). Par contre, on a $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = +\infty$ et $\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = +\infty$.

On dit que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ n'existent pas, ou bien encore on écrit, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = +\infty$ resp. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = +\infty$.

Rem. : Une extension de la mesure de Jordan à certains ensembles de points non bornés (p. 359) est donnée par la mesure des hypographes définis par les fonctions ci-dessus.

Pour des intervalles quelconques *semi-ouverts*, on définit :

Déf. 1 : Étant donné une fonction $f : [a, b[\, \to \mathbb{R}$, si pour tout $x \in [a, b[$ l'intégrale $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe ainsi que $\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, alors la valeur de cette limite est appelée *intégrale généralisée de f sur* $[a, b[$:

(1) $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

De manière analogue, on définit pour $f : \,]a, b] \to \mathbb{R}$ l'*intégrale généralisée de f sur* $]a, b]$ par :

(2) $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

En remplaçant b dans (1) par $+\infty$ et a dans (2) par $-\infty$, on obtient les déf. de $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ respectivement.

Ex. : $\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-r}\ (0 < r < 1)$,

$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r-1}\ (r > 1)$,

$\int_{-\infty}^0 e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x = n\,!\ (n \in \mathbb{N})$.

À l'aide de la déf. 1 on peut sous certaines conditions définir les intégrales généralisées sur un intervalle *ouvert* :

Déf. 2 : $f : \,]a, b[\, \to \mathbb{R}$ étant donnée, et si pour $c \in\,]a, b[$ les intégrales généralisées de f sur $]a, c]$ et $[c, b[$ sont définies, alors $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est appelé *intégrale généralisée de f sur* $]a, b[$:

(3) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Si l'intégrale généralisée existe sur $]a, b[$, elle est indépendante du choix de c.

En remplaçant dans (3) a par $-\infty$ et b par $+\infty$, on obtient la déf. de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ex. : $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x = \pi$,

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$.

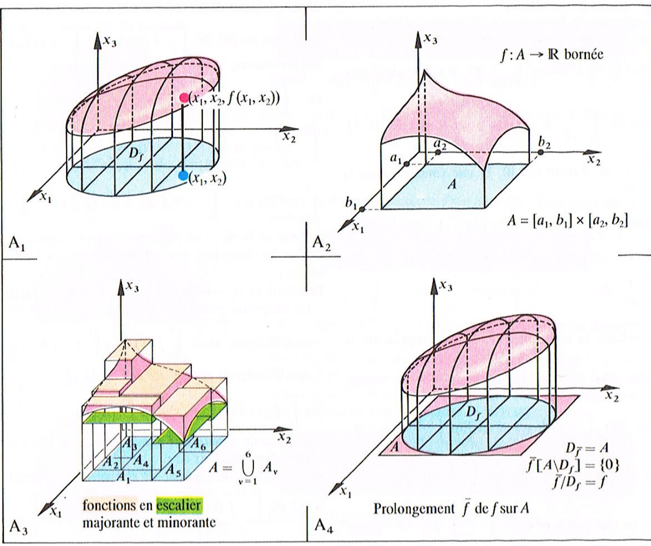
Si une fonction donnée est R-intégrable sur $[a, b]$, les intégrales généralisées sur $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ sont définies et ont même valeur que l'intégrale de Riemann sur l'intervalle fermé. Le concept des intégrales généralisées est donc bien en accord avec l'intégrale de Riemann elle-même.

Critère d'intégration de Cauchy

Les intégrales généralisées peuvent servir à démontrer la convergence de certaines séries. On a :

Th. (critère de Cauchy) : *Si* $f : [a, +\infty[\, \to \mathbb{R}^+$ $(a \in \mathbb{N})$ *est monotone décroissante, alors la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ *converge si l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *est définie.*

Exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^r}$ converge pour $r > 1$.



Construction de l'intégrale de RIEMANN

(RR 1) $\int_D (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_D f(x)\,\mathrm{d}x + \int_D g(x)\,\mathrm{d}x$, si f et g sont R-intégrables sur D.

(RR 2) $\int_{D_f} (c \cdot f)(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_{D_f} f(x)\,\mathrm{d}x$ ($c \in \mathbb{R}$), si f est R-intégrable sur D_f.

(RR 3) $\int_D f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_D g(x)\,\mathrm{d}x$, si f et g sont R-intégrables sur D et $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$.

(RR 4) $\int_{D_1 \cup D_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{D_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{D_2} f(x)\,\mathrm{d}x$, si f est R-intégrable sur D_1 et D_2 et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

(RR 4*) $\int_{D_2} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe, si f est R-intégrable sur D_1, et $D_2 \subseteq D_1$ est mesurable au sens de JORDAN.

(RR 4**) $\int_{D_1 \setminus D_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{D_1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{D_2} f(x)\,\mathrm{d}x$, si f est R-intégrable sur D_1 et D_2 et $D_2 \subseteq D_1$.

(RR 5) $m \cdot \mu(D_f) \leq \int_{D_f} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \cdot \mu(D_f)$, si f est R-intégrable sur D_f et m et M sont respectivement un minorant et un majorant de f sur D_f.

(RR 5*) $\left|\int_{D_f} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M \cdot \mu(D_f)$, si f est R-intégrable sur D_f et $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in D_f$.

Conséquence : $\int_{D_f} \mathrm{d}x = \mu(D_f)$.

(RR 6) Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$ continue avec D_f compact et connexe, alors il existe $(c_1, c_2) \in D_f$ tel que : $\int_{D_f} f(x)\,\mathrm{d}x = f(c_1, c_2) \cdot \mu(D_f)$.

(RR 7) $\int_N f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, si f borné sur N, ensemble de mesure nulle.

(RR 7*) $\int_{D_f \cup N} \bar{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{D_f} f(x)\,\mathrm{d}x$, si f est R-intégrable sur D_f, N un ensemble de mesure nulle et $\bar{f}$ bornée sur $D_f \cup N$ avec $\bar{f} = f$ sur $D_f \setminus (D_f \cap N)$.

B

Règles d'intégration et théorèmes

Le point de départ de la construction de l'intégrale de RIEMANN était le problème de la mesure d'aires d'hypographes. Un problème similaire peut se poser avec des fonctions de deux variables, positives et bornées, qui déterminent un hypographe dont on peut chercher la mesure (le volume) (fig. A₁). C'est par ce point de vue que l'intégrale de RIEMANN s'est étendue à $\mathbb{R}^2$ (on parle souvent d'intégrale double).

Si la présentation se limite à des fonctions de deux variables, on peut étendre ces concepts aux fonctions de n variables, et en tirer des résultats analogues (voir ci-dessous).

Intégrale de RIEMANN sur des pavés de $\mathbb{R}^2$

Cette théorie reprend celle de l'intégrale de RIEMANN sur un intervalle fermé (p. 331). On considère des fonctions bornées $f: A \to \mathbb{R}$, où A est un pavé $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, c.-à.-d. un rectangle dont les bords sont parallèles aux axes du repère (fig. A₂), et on définit comme à la p. 331 :

$(A_1, \dots, A_m)$ est une *subdivision* de A si les A_k sont des pavés d'intérieurs deux à deux disjoints (p. 214) et vérifiant $A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$. $t: A \to \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier*, s'il existe une subdivision de A telle que la restriction de t à chacun des intérieurs des A_k soit une fonction constante (fig. A₃). Les concepts de *fonction en escalier majorante et minorante* sont déterminés comme dans la déf. 2 p. 331.

L'intégrale d'une fonction en escalier $t: A \to \mathbb{R}$ correspondant à la subdivision $(A_1, \dots, A_m)$ est définie en accord avec l'intuition (pour une fonction positive, il s'agit du volume du « bloc en escalier » de $\mathbb{R}^3$, fig. A₃) par $\int_A t(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} c_k\,\mu(A_k)$. Dans cette expression, c_k représente la valeur de la fonction sur le rectangle A_k, et $\mu(A_k)$ l'aire de ce dernier ($k = 1 \dots m$).

Une fonction bornée $f: A \to \mathbb{R}$ possède des fonctions en escalier majorantes et minorantes. Si on désigne alors par S l'ensemble des fonctions en escalier majorantes, et I l'ensemble des fonctions minorantes, on peut définir alors les *intégrales supérieure et inférieure* par

$$\overline{\int_A} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{\int_A t(x)\,dx \,\middle|\, t \in S\right\},$$

$$\underline{\int_A} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_A t(x)\,dx \,\middle|\, t \in I\right\}.$$

Déf. 1 : Si ces deux dernières expressions ont même valeur, alors f est dite RIEMANN-*intégrable* (en abrégé R-intégrable) *sur* A, et cette valeur commune est notée $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$ et appelée *intégrale de* RIEMANN de f sur A.

L'intégrale existe lorsque f est *continue* sur A. La continuité n'est pas une condition nécessaire, mais on a le th. plus précis suivant :

Th. 1 : $f: A \to \mathbb{R}$ *est R-intégrable si l'ensemble des points de discontinuité de f est un ensemble de mesure nulle au sens de* LEBESGUE (p. 359).

Intégrale de RIEMANN sur des domaines de $\mathbb{R}^2$ mesurables (au sens de JORDAN)

Si le domaine de définition D_f de f est borné, on peut l'inclure dans un pavé A. On s'intéresse alors au prolongement de f sur A défini par :

$$x \mapsto \bar{f}(x) \begin{cases} f(x) \text{ pour } x \in Df \\ 0 \text{ pour } x \in A \setminus Df \end{cases} \quad \text{(fig. A}_4\text{)}.$$

Le théorème suivant est fondamental pour la définition de l'intégrale :

Th. 2 : *Soit* $f: D_f \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée, et* D_f *un ensemble de* $\mathbb{R}^2$ *mesurable au sens de* JORDAN (*cf.* p. 357). *Si l'ensemble des points de discontinuité de f est de mesure nulle, alors l'intégrale* $\int_A \bar{f}(x)\,\mathrm{d}x$ *est définie et sa valeur* ***ne dépend pas*** *du choix du pavé A.*

La démonstration s'effectue avec l'aide du th. 1, en remarquant que la frontière d'un ensemble mesurable est de mesure nulle, et que la réunion de deux ensembles de mesure nulle est de mesure nulle (*cf.* p. 357). Se basant sur le th. 2, il est naturel de définir :

Déf. 2 : Une fonction bornée $f: D_f \to \mathbb{R}$ est *RIEMANN-intégrable sur* D_f, si D_f est mesurable au sens de JORDAN et si $\int_A \bar{f}(x)\,\mathrm{d}x$ existe pour $A \supseteq D_f$.
L'*intégrale de* RIEMANN sur D_f est notée $\int_{Df} f(x)\,\mathrm{d}x$, ou $\int_{Df} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$, et :

$$\int_{Df} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A \bar{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le th. 2 est un moyen important pour établir l'existence de l'intégrale de RIEMANN. Il est clair que la *frontière de l'ensemble de définition* n'a pas d'influence sur l'existence (*cf.* fig. B, (RR7*)). Ceci explique pourquoi on considère souvent des ensembles de définition *ouverts*.

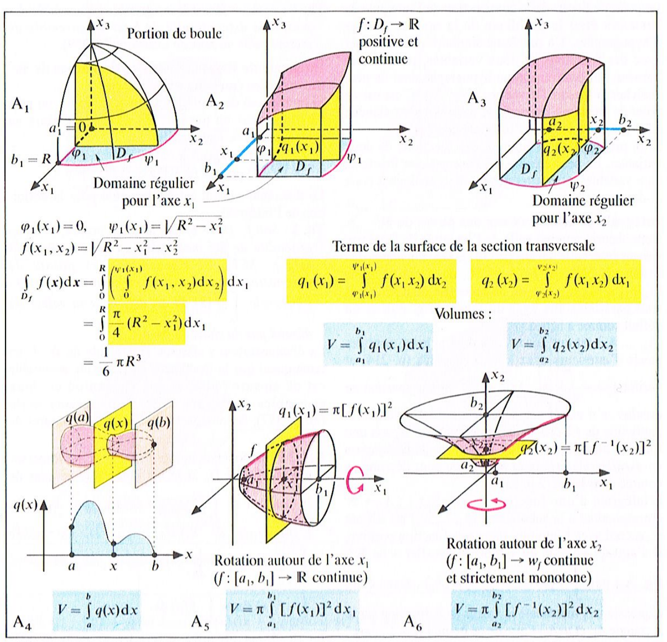
Rem. : Les règles d'intégration importantes et les théorèmes sont dans le tableau B.

Intégrale de RIEMANN et volumes

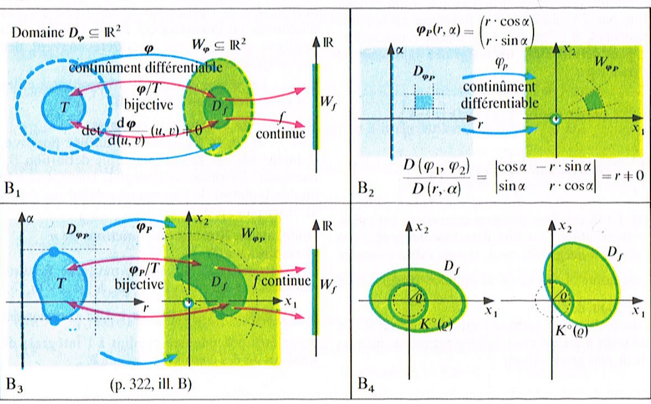
Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$ une fonction bornée positive, R-intégrable sur son ensemble de définition D_f, mesurable. La valeur de l'intégrale correspond à la mesure (volume) de l'hypographe défini par f dans $\mathbb{R}^3$. *Exemples :* p. 345.

Intégrale de RIEMANN de fonctions de n variables ($n \geq 3$)

Les intervalles de $\mathbb{R}^1$ ou les pavés de $\mathbb{R}^2$ sont remplacés par des pavés de $\mathbb{R}^n$ $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ dont la mesure est $\prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$. Une extension des propriétés précédentes conduit à l'intégrale de RIEMANN sur des domaines bornés de $\mathbb{R}^n$.



Intégrales de volumes, calcul de volumes



Changement de variables

Les théorèmes d'existence (p. 343) ainsi que les règles d'intégration ne donnent pas de méthodes pratiques pour calculer les intégrales de fonctions de plusieurs variables. On a aussi intérêt à relier ce calcul à la théorie de l'intégration des fonctions d'*une seule* variable. Ceci est possible pour une classe particulière de fonctions, qui représente la majorité des cas rencontrés dans la pratique. L'intégrale de RIEMANN se ramène alors à des intégrations successives.

Domaine régulier, intégrale double

Déf. 1 : Soit $\varphi_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ et $\psi_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant $\varphi_1(x_1) \leq \psi_1(x_1)$ pour $x_1 \in [a_1, b_1]$, l'ensemble de points $\{(x_1, x_2) | x_1 \in [a_1, b_1] \wedge x_2 \in [\varphi_1(x_1), \psi_1(x_1)]\}$ est appelé *domaine régulier pour l'axe* x_1 (fig. A_1, A_2).

La déf. d'un domaine régulier pour l'axe x_2 est analogue (fig. A_3). (On dit aussi domaine simple.)

Le théorème suivant est fondamental quant au calcul d'intégrales :

Th. 1 : *Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que D_f soit un domaine régulier pour l'axe x_1, alors f est R-intégrable, et :*

$$\int_{Df} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} f(x_1, x_2)\,dx_2 \right) dx_1 .$$

L'intégrale du membre de droite est une *intégrale double*. Elle se calcule en commençant par calculer l'intégrale située entre les parenthèses.

Un théorème analogue s'écrit si D_f est un domaine régulier pour l'axe x_2 :

$$\int_{Df} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{\varphi_2(x_2)}^{\psi_2(x_2)} f(x_1, x_2)\,dx_1 \right) dx_2 .$$

Application : Fig. A_1.

Calcul de volumes

Le *volume* de l'hypographe d'une fonction positive de deux variables R-intégrable est déterminé avec la mesure de JORDAN par $\int_{Df} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$. Pour des fonctions positives, continues, dont l'ensemble de déf. est un domaine régulier, ce volume peut être déterminé par un calcul d'intégrale double suivant le th. 1. On obtient alors pour le volume d'une boule selon la fig. A_1 $V_B = \frac{4}{3}\pi R^3$. Comme on le voit aussi sur la figure A_1 (souligné en jaune), l'intégrale située entre parenthèses a une signification géométrique particulière. Elle peut être interprétée comme l'aire du quart de disque situé dans un plan parallèle à $x_2 x_3$. Dans le cas général, on obtient les formules des figures A_2 et A_3.

Ces formules sont en fait des cas particuliers du théorème suivant :

Th. 2 : *Si un domaine B de $\mathbb{R}^3$, borné, mesurable, est situé entre deux plans parallèles, et si son intersection avec tout plan parallèle aux deux précédents est mesurable, alors le volume V de B est donné par la formule de la figure A_4.*

Application : Détermination de volumes de révolution (fig. A_5, A_6).

On établit comme conséquence du th. 2 que deux solides, de même plan de base, ont même volume, si tout plan parallèle à ce plan de base les coupe suivant deux sections de même aire *(th. de CAVALIERI).*

Exemple : p. 172, fig. B, haut.

Changement de variable

La règle de changement de variable (U6) p. 337 donne sous les conditions qui y sont exposées $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)\,dt$. Cette transformation de l'intégrale a son équivalent pour l'intégrale de RIEMANN en dimension 2 :

Th. 3 : *Étant donné une fonction $f: D_f \to \mathbb{R}$ continue prolongeable par continuité à ∂D_f, une fonction $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continûment différentiable sur un domaine $D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^2$ définie par*

$(u, v) \mapsto \boldsymbol{\varphi}(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, v) \\ \varphi_2(u, v) \end{pmatrix}$, *un domaine T mesurable strictement inclus dans D_φ tel que la restriction $\boldsymbol{\varphi}|T : T \to D_f$ est bijective, et dont le déterminant jacobien* $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}$ (*cf.* p. 323) *ne s'annule pas sur T* (fig. B_1), *on a :*

$$\int_{Df} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_T (f \circ \boldsymbol{\varphi})(u, v) \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}(u, v) \right| du\,dv .$$

Rem. : La règle de changement de variable énoncée au th. 3 s'étend sans autre condition à $\mathbb{R}^3$ et à $\mathbb{R}^n$. La démonstration de ce théorème est délicate.

L'effet de la fonction $\boldsymbol{\varphi}$ peut être interprété comme le passage de coordonnées cartésiennes à des *coordonnées curvilignes* dans D_f. Un cas particulier souvent utilisé est le passage aux *coordonnées polaires* par

$$x_1 = r \cdot \cos\alpha \quad \text{et} \quad x_2 = r \cdot \sin\alpha \ (r \geq 0).$$

Les conditions du th. 3 sont remplies dès que $f: D_f \to \mathbb{R}$ est continue et D_f est un compact qui ne contient pas l'origine. On choisit une fonction $\boldsymbol{\varphi}_P$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par

$\boldsymbol{\varphi}_P(r, \alpha) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\alpha \\ r \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}$ avec $r > 0$ (fig. 2), et on peut déterminer une partie T du plan (r, α) pour lequel les conditions du th. 3 sur $\boldsymbol{\varphi}_P$ sont remplies (fig. 3). On a alors :

$$\int_{Df} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_T (f \circ \boldsymbol{\varphi}_P)(r, \alpha) \cdot r \cdot dr\,d\alpha .$$

Si D_f contient l'origine, les cas de la figure B_4 sont possibles. On coupe D_f avec un disque $K^0(\rho)$ et on considère $D_f \setminus K^0(\rho)$. Avec cet ensemble de déf., le th. 3 est de nouveau utilisable. Le passage à la limite $\rho \to 0$ valide la formule de transformation ci-dessus dans le cas où D_f contient l'origine.

S : $a = a_0$ a_1 ..... a_{k-1} a_k ..... $a_m = b$ x

X : ξ_1 .... ξ_k .... ξ_m

$(\xi_k, f(\xi_k))$

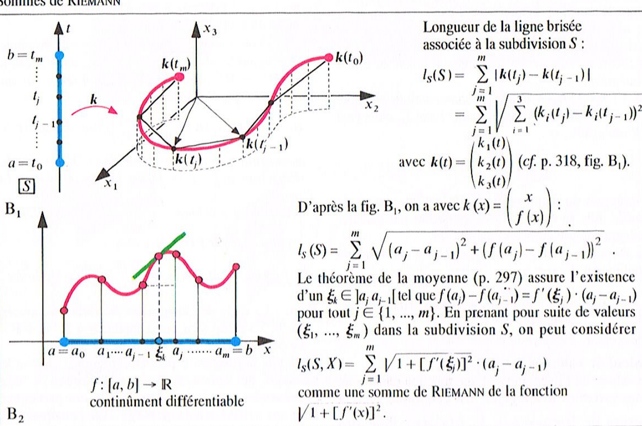
A₁ $S(f, S, X) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k) \cdot (a_k - a_{k-1})$

$(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))$ x_1 x_2 x_3 A_k (ξ_k, η_k)

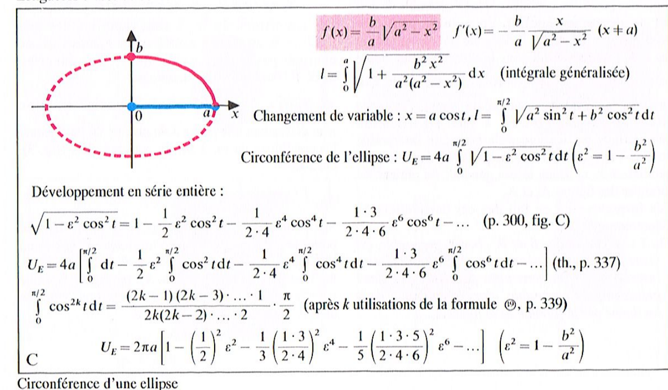
$S = (A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_m)$
$X = (\ldots, (\xi_k, \eta_k), \ldots)$

A₂ $S(f, S, X) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \mu(A_k)$

Sommes de RIEMANN



Longueurs d'arcs de courbes



Circonférence d'une ellipse

Sommes de RIEMANN

On peut utiliser les intégrales de fonctions en escalier majorantes et minorantes pour calculer une valeur approchée de l'intégrale de RIEMANN en se basant sur sa définition (p. 331, p. 343). On peut aussi utiliser les sommes dites de RIEMANN :

a) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

On associe à une subdivision $D = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ une suite $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ telle que $\xi_k \in]a_k, a_{k+1}[$, et on appelle *somme de* **RIEMANN** de f associée à D et X la somme $S(f, D, X) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (a_k - a_{k-1})$.

Si on considère à présent une suite (D_i) de subdivisions associées chacune à une suite (X_i) on obtient une suite $(S(f, X_i, D_i))$ de sommes de RIEMANN.

En ajoutant comme condition supplémentaire aux subdivisions D_i que la longueur du plus grand sous-intervalle (*pas de la subdivision*) tende vers zéro, on obtient :

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est R-intégrable, pour toute suite de subdivisions (D_i) dont le pas tend vers zéro, la suite $(S(f, X_i, D_i))$ converge vers $\int_a^b f(x)\, dx$, et ce quel que soit le choix des X_i.

On dit aussi plus simplement que *les sommes de* RIEMANN *convergent*.

L'intégrale de RIEMANN peut donc être approchée d'une manière aussi précise que l'on veut par des sommes de RIEMANN. On choisit souvent dans ce cas des subdivisions en intervalles de même longueur.

b) $f : D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R}^2)$

On peut définir de manière analogue au a) des sommes de RIEMANN pour une fonction de deux variables. On considère dans un premier temps que l'ensemble de définition de f est un pavé A (*cf.* p. 343). Soit alors $D = (A_1, \ldots, A_n)$ une subdivision de A en pavés, à laquelle on associe la suite $X = ((\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n))$ telle que $(\xi_k, \eta_k) \in A_k$, on définit la somme de RIEMANN de $f : A \to \mathbb{R}$ associée à D et X par $S(f, D, X) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \mu(A_k)$

où $\mu(A_k)$ représente la mesure de JORDAN de A_k (fig. A₂).

On appelle ici pas de la subdivision D le maximum des longueurs des diagonales des rectangles A_k. Si ce pas tend vers zéro, on a :

Si $f : A \to \mathbb{R}$ est R-intégrable, alors pour toute suite (D_i) de subdivision dont le pas tend vers zéro, la suite de sommes de RIEMANN *$(S(f, X_i, D_i))$ converge vers $\int_A f(x)\, dx$, et ce quel que soit le choix des suites X_i.*

Si l'ensemble de définition de f est quelconque, on construit un prolongement $\bar{f}$ de f sur un pavé A choisi tel que $A \supseteq D_f$, $\bar{f}$ vérifiant $\bar{f}(x) = 0$ pour tout $x \in A \setminus D_f$. Toute somme de RIEMANN construite avec $\bar{f}$ est considérée comme une somme de RIEMANN de f. Les termes de la somme pour $[\xi_k, \eta_k] \notin D_f$ sont en effet nuls. Les sommes de RIEMANN de f convergent alors vers $\int_{D_f} f(x)\, dx$.

Longueur de courbes de $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$)

La longueur d'un segment, et par là même d'une suite de segments, est définie p. 193. On peut donc approcher une courbe de $\mathbb{R}^3$ par une suite de segments et définir ainsi le concept de longueur d'une courbe.

Déf. 1 : Une courbe définie par $C : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) est dite *rectifiable* si pour toute suite de subdivisions de $[a, b]$ dont le pas tend vers zéro, la suite des longueurs des suites de segments associées à ces subdivisions (fig. B₁) tend vers une limite finie $l \in \mathbb{R}^+$. l est alors appelé longueur de la courbe C.

Pour les courbes continûment différentiables, qui sont rectifiables sans exception, on parle de *longueur d'arc*. Si C n'est pas injective, la longueur peut s'interpréter comme celle de la trajectoire d'un point mobile.

Longueur d'arcs

a) Courbes continûment différentiables de $\mathbb{R}^2$ en représentation explicite

La courbe est alors le graphe d'une fonction continûment différentiable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (*cf.* p. 403). À chaque subdivision de $[a, b]$ est associée une somme de RIEMANN pour $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ (fig. B₂). Comme cette fonction est continue sur $[a, b]$, et par conséquent R-intégrable, toute suite de sommes de RIEMANN associées à des subdivisions de pas tendant vers zéro convergent vers $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

Cette intégrale donne donc la longueur de la courbe.

Ex. : Fig. C.

b) Courbes continûment différentiables en représentation paramétrique

Soit $C : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ la courbe définie par

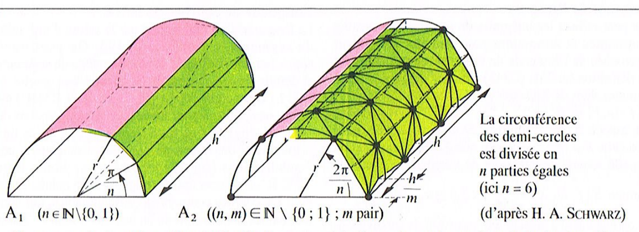
$t \mapsto k(t) = \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ k_3(t) \end{pmatrix}$, les fonctions $k_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ étant continûment différentiables (*cf.* p. 393). On procède de manière analogue au a), bien que la longueur de la suite de segments ne soit pas une suite de RIEMANN. On peut cependant approcher cette dernière par une somme de RIEMANN de la fonction $\sqrt{[k_1'(t)]^2 + [k_2'(t)]^2 + [k_3'(t)]^2}$ en utilisant la continuité uniforme des k_i. On obtient alors pour longueur de l'arc :

$$l = \int_a^b \sqrt{[k_1'(t)]^2 + [k_2'(t)]^2 + [k_3'(t)]^2}\, dt .$$

Si $k'(t) = \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \\ k_3'(t) \end{pmatrix}$, on a : $l = \int_a^b \sqrt{<k'(t), k'(t)>}\, dt$.

Rem. : La fonction s définie par

$s(x) = \int_a^x \sqrt{<k'(t), k'(t)>}\, dt$ est appelée *abscisse curviligne* et s peut être pris comme paramètre. $ds = \sqrt{<k'(t), k'(t)>}\, dt$ est la *différentielle de l'arc*.



Si on approche la surface d'un demi cylindre comme à la figure A_1 par les surfaces latérales des prismes dessinés en vert, on obtient comme surface du polyèdre :

$\mu(P) = 2nrh \sin \frac{\pi}{2n}$. Avec $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$, on a : $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(P) = \pi r h$ (*cf.* p. 172, fig. C).

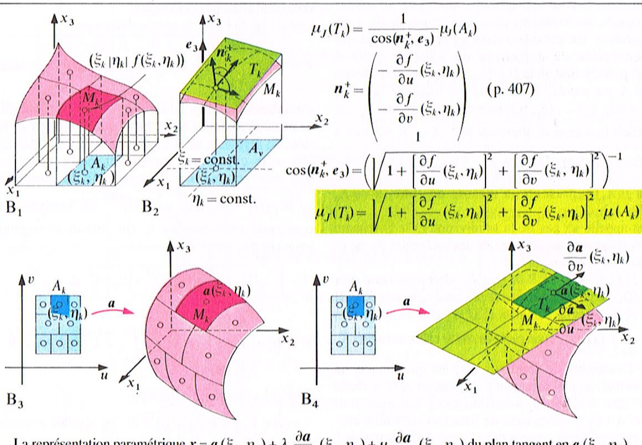
Si on l'approche au contraire par un polyèdre comme à la figure A_2, on obtient :

$$\mu(\overline{P}) = nmr \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + \left(r - r\cos\frac{\pi}{n}\right)^2} = \pi r \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}\pi^4 r^2 \frac{m^2}{n^4}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right]^4} .$$

En choisissant $m = n^2$, on a : $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \mu(\overline{P}) = \pi r \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}\pi^4 r^2}$. Pour $m = n^3$, on a même $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \mu(\overline{P}) = +\infty$.

C'est seulement quand m et n sont choisis de manière à ce que $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \frac{m^2}{n^4} = 0$, que l'on a $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \mu(P) = \pi r h$.

Problématique de la définition de l'intégrale de surfaces courbes



$$\mu_J(T_k) = \frac{1}{\cos(n_k^+, e_3)} \mu_J(A_k)$$

$$n_k^+ = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_k, \eta_k) \\ -\frac{\partial f}{\partial v}(\xi_k, \eta_k) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(p. 407)}$$

$$\cos(n_k^+, e_3) = \left(\sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_k, \eta_k)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial v}(\xi_k, \eta_k)\right]^2}\right)^{-1}$$

$$\mu_J(T_k) = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_k, \eta_k)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial v}(\xi_k, \eta_k)\right]^2} \cdot \mu(A_k)$$

La représentation paramétrique $x = a(\xi_k, \eta_k) + \lambda \frac{\partial a}{\partial u}(\xi_k, \eta_k) + \mu \frac{\partial a}{\partial v}(\xi_k, \eta_k)$ du plan tangent en $a(\xi_k, \eta_k)$ permet par un choix unique de k et μ une représentation des rectangles dans le plan tangent. L'image de A_k est un parallélogramme T_k, qui décrit la maille M_k de façon approchée.

Définition de la mesure de surfaces régulières

Problématique de la définition de la mesure de surfaces quelconques

Une généralisation du problème de la mesure d'ensemble de points de $\mathbb{R}^2$ conduit à se demander comment mesurer des surfaces quelconques de $\mathbb{R}^3$. Par analogie avec la définition de la longueur d'une courbe, on est tenté d'approcher une surface par des petits polygones. Mais l'étude de surfaces simples montre que, sans condition particulière sur les polygones, on n'obtient pas la mesure qui s'impose naturellement. Sans traiter la cas général on se bornera à une définition de la mesure de surfaces valable dans le cas de fonctions régulières (*cf.* p. 405), cas suffisant pour bon nombre de problèmes.

Mesure d'une surface régulière

Déf. 2 : Soit $a : D \to \mathbb{R}^3$ définie par

$(u, v) \mapsto a(u, v) = \begin{pmatrix} a_1(u, v) \\ a_2(u, v) \\ a_3(u, v) \end{pmatrix}$ une représentation paramétrique d'une surface régulière (p. 405). On appelle *mesure de la surface a l'intégrale*

$$S = \int_D \left| \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) \right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \text{, où}$$

$$\frac{\partial a}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial a_2}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial a_3}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial a_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial a_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

dans le cas où elle existe.

$\mathrm{d}S = \left| \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) \right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ est appelé *élément de surface élémentaire.*

On obtient pour une surface régulière définie de manière *explicite* par $f : D \to \mathbb{R}^3$ (p. 405)

$$S = \int_D \sqrt{1 + \left|\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right|^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v .$$

Rem. : D'après les hypothèses de la définition 2, la fonction intégrande est continue, si bien que l'intégrale existe dès que D est un domaine régulier, ce qui a lieu dans la plupart des cas. Le calcul est alors possible à l'aide d'une intégrale double (p. 345).

Les développements suivants mettent en évidence la signification géométrique de la définition 2.

a) Surface régulière en représentation explicite

Dans ce cas, on étudie le graphe d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie sur un domaine D convenable et dont les dérivées partielles du premier ordre sont continues (*cf.* p. 405).

On considère d'abord le cas où D est un pavé. À chaque subdivision $(A_1, \ldots, A_n)$ de D correspond une subdivision de la surface en mailles $M_1, \ldots, M_n$. Si on associe alors une suite de points $X = ((\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n))$ à la subdivision, on fait correspondre à chaque maille M_k le point $(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))$ (fig. B_1). On détermine ensuite les parallélogrammes T_k situés dans les plans tangents à la surface en ces points, et projetés suivant les rectangles A_k parallèlement au troisième axe (fig. B_2). L'aire de ces parallélogrammes est

$$\mu(T_k) = \sqrt{1 + \left|\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_k, \eta_k)\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial v}(\xi_k, \eta_k)\right|^2} \cdot \mu(A_k) .$$

L'aire de tous les parallélogrammes réunis est

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left|\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_k, \eta_k)\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial v}(\xi_k, \eta_k)\right|^2} \cdot \mu(A_k) .$$

Elle peut être interprétée comme somme de RIEMANN de la fonction $\sqrt{1 + \left|\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right|^2}$ définie sur D. Elle est continue vue la continuité des fonctions $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$, et par conséquent R-intégrable, si bien que si le pas de la subdivision tend vers zéro, la somme de RIEMANN tend vers

$$\int_D \sqrt{1 + \left|\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right|^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v .$$

Dans le cas où D n'est pas un pavé, on procède de manière analogue en incluant D dans un pavé, et en ne considérant alors que les rectangles de la subdivision qui rencontrent D.

b) Surfaces régulières en représentation paramétrique

Soit une représentation paramétrique de la surface donnée par $a(u, v)$, on procède d'abord comme au a). À chaque subdivision de D correspond un maillage de la surface (fig. B_3). Le but est alors d'approcher les mailles M_k par des parallélogrammes T_k. En procédant comme à la figure B_4, on obtient :

$$\mu(T_k) = \left| \frac{\partial a}{\partial u}(\xi_k, \eta_k) \times \frac{\partial a}{\partial v}(\xi_k, \eta_k) \right| \mu(A_k) .$$

En faisant la somme des aires de tous les parallélogrammes, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial a}{\partial u}(\xi_k, \eta_k) \times \frac{\partial a}{\partial v}(\xi_k, \eta_k) \right| \mu(A_k) .$$

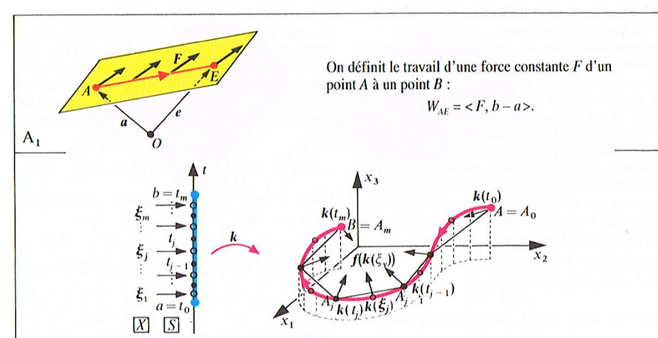
L'interprétation de cette somme en tant que somme de RIEMANN se déduit immédiatement de la définition 2.

Rem. : On peut montrer que la valeur de l'intégrale est indépendante de la représentation paramétrique choisie.

Cas des surfaces de révolution

En faisant tourner autour de l'axe x_1 la courbe représentative de la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $x_1 \mapsto f(x_1)$, on obtient une surface de révolution (*cf.* fig. A_5 p. 344) dont on peut mesurer la surface. L'utilisation de la définition 2 et le développement de l'intégrale en intégrale double donne :

$$S = 2\pi \int_a^b f(x_1) \cdot \sqrt{1 + [f'(x_1)]^2}\, \mathrm{d}x_1 .$$



Un champ de force est donné par une application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, $f : D_f \to \mathbb{R}^3$, qui sera prise continue. Étant donné un arc $\boldsymbol{k} : [a, b] \to D_f$ défini par $t \to \boldsymbol{k}(t) = (k_1(t), k_2(t), k_3(t))$ continûment différentiable, où $\boldsymbol{k}(a)$ représente le point de départ A et $\boldsymbol{k}(b)$ le point d'arrivée B. Pour approcher le travail du champ de force le long de la courbe de $\boldsymbol{A}$ à $\boldsymbol{B}$, on choisit une subdivision $S = (t_0, ..., t_m)$ de $[a, b]$, qui détermine une ligne brisée $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}_1 \ldots \boldsymbol{A}_{m-1}\,\boldsymbol{B}$. On associe à S la suite $X = (\xi_1, \ldots \xi_m)$, et on calcule le travail le long de la ligne brisée, en supposant que le champ de force est constant de valeur $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(\xi_i))$ sur $\boldsymbol{A}_{j-1}\boldsymbol{A}_j$.

$$W_{\text{app}}(S, X) = \sum_{j=1}^{m} \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(\xi_j)), \boldsymbol{k}(t_j) - \boldsymbol{k}(t_{j-1}) \rangle \qquad (cf.\ \text{fig. A}_1).$$

On applique trois fois le théorème de la moyenne aux k_i (*cf.* p. 346, fig B₂).

$$W_{\text{app}}(S, X) = \sum_{j=1}^{m} \left\langle f(k(\xi_j)), \begin{pmatrix} k_1'(\eta_{j1}) \\ k_2'(\eta_{j2}) \\ k_3'(\eta_{j3}) \end{pmatrix} \right\rangle (t_j - t_{j-1}) \text{ avec } \eta_{ji} \in]t_{j-1}, t_j[\text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

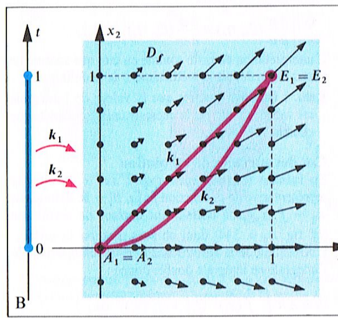
On peut approcher cette somme à la précision que l'on veut par la somme de RIEMANN

$\sum_{j=1}^{m} \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(\xi_j)), \boldsymbol{k}'(\xi_j) \rangle \cdot (t_j - t_{j-1})$, associée à la fonction $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(t)), \boldsymbol{k}'(t)$ définie sur $[a, b]$ et continue.

Comme l'intégrale de RIEMANN existe, on définit : $W_{AB} = \int_a^b \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(t)), \boldsymbol{k}'(t) \rangle \, \mathrm{d}t$.

A₂

Travail dans un champ de force le long d'une courbe.



$f : D_f \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_1 \cdot x_2)$
$\boldsymbol{k}_1 : (0\,;1) \to \mathbb{R}^2$ défini par $t \mapsto (t, t)$
$\boldsymbol{k}_2 : (0\,;1) \to \mathbb{R}^2$ défini par $t \mapsto (t, t^2)$
$\boldsymbol{f}$ est continue, $\boldsymbol{k}_1$ et $\boldsymbol{k}_2$ sont continûment différentiables, si bien que l'on peut appliquer le théorème 2 :

$$\int_{k_1} \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \frac{5}{6},$$

$$\int_{k_2} \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \frac{9}{10}.$$

Exemple

Intégrale curviligne

On utilise souvent en physique théorique l'intégration d'un champ de vecteurs le long d'une courbe ; par exemple l'intégration d'un champ de forces le long d'une courbe donne le travail (fig. A₁).

Au-delà de l'interprétation physique, on arrive au problème suivant : soit une fonction $\boldsymbol{f} : D_f \to \mathbb{R}^3$ (D_f domaine de $\mathbb{R}^3$) et un arc rectifiable $\boldsymbol{k} : [a, b] \to D_f$ paramétré, dont les points de départ et d'arrivée sont respectivement $\boldsymbol{k}(a)$ et $\boldsymbol{k}(b)$. Chaque subdivision $D = (t_0, ..., t_m)$ de $[a, b]$ permet de définir une ligne brisée $(\boldsymbol{k}(t_0), ..., \boldsymbol{k}(t_m))$ à partir de la courbe (fig. A₂). Et toute suite $B = (\xi_1, ..., \xi_m)$ telle que $\xi_i \in]t_{i-1}, t_i[$ permet de définir la somme suivante :

$$S(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{f}, D, B) = \sum_{i=1}^{m} <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(\xi_i)), \boldsymbol{k}(t_i) - \boldsymbol{k}(t_{i-1})>.$$

Si on pose alors $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{k}(\xi_i)$ et $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{k}(t_i)$, on obtient $S(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{f}, D, B) = \sum_{i=1}^{m} <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i), \boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1}>$, qui rappelle les sommes de RIEMANN vues p. 347.

Déf. 1 : Si la suite de sommes $S(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{f}, D_\mu, B_\mu)$ converge pour toute suite (D_μ) de subdivisions de $[a, b]$ de pas tendant vers 0 vers un réel donné indépendant du choix de (D_μ), alors la limite de cette suite est appelée *intégrale curviligne de f le long de l'arc **k***. Elle est notée $\int_k <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}>$, et $\oint_k <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}>$ si l'arc est une courbe fermée.

Le théorème suivant donne un critère d'existence de l'intégrale curviligne qui est valable dans la plupart des cas pratiques.

Th. 1 : *L'intégrale curviligne d'une fonction continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ le long d'un arc rectifiable et continu est toujours définie.*

Rem. : Il suffit de démontrer la continuité de $\boldsymbol{f}$ sur l'ensemble image de $\boldsymbol{k}$.

On peut cependant tirer les règles suivantes de la déf. 1 (ou plus exactement des déf. de $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$, $c \cdot \boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$ et $-\boldsymbol{k}$ qui sont données pages 283 et 395) :

(K1) $\int_k <(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}> = \int_k <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}> + \int_k <\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}>$,

(K2) $\int_k <(c \cdot \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}> = c\int_k <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}> \ (c \in \mathbb{R})$,

(K3) $\int_{-k} <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}> = -\int_k <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}>$,

(K4) $\int_{k_1 + k_2} <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}> = \int_{k_1} <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}> + \int_{k_2} <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}>$.

Rem. : La règle (K3) exprime clairement que l'orientation de la courbe est importante.

D'après le th. 1, l'intégrale curviligne d'une fonction continue le long d'un arc continûment différentiable (*cf.* p. 347) est aussi définie. L'intégrale curviligne s'interprète alors comme une intégrale de RIEMANN sur $[a, b]$, ce qui facilite son calcul.

Th. 2 : *On a pour l'intégrale curviligne d'une fonction continue sur un arc continûment différentiable définie de manière paramétrique par* $\boldsymbol{k} : [a, b] \to D_f$:

$$\int_k <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}> = \int_a^b <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(t)), \boldsymbol{k}'(t)> \mathrm{d}t.$$

Rem. : Le concept des intégrales curvilignes dans $\mathbb{R}^3$ se laisse généraliser sans difficulté aux courbes de $\mathbb{R}^n$, et en particulier aux courbes de $\mathbb{R}^2$. Les théorèmes et règles énoncés précédemment restent alors valables.

Exemple : fig. B

Intégrale curviligne de fonctions réelles

Si on définit une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{f} : D_f \to \mathbb{R}^3$ par la donnée de ses composantes dans une base orthonormale $(\boldsymbol{e}_i)$ par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} f_i(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_i$, on obtient d'après la règle (K1) : $\int_k <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}> = \sum_{i=1}^{3} \int_k <f_i(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_i, \mathrm{d}\boldsymbol{x}>$. Les intégrales du membre de droite donnent les composantes suivant les axes de coordonnées. Elles sont de la forme $\int_k <g(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_i, \mathrm{d}\boldsymbol{x}>$, où g est une fonction réelle. On définit :

Déf. 2 : Si pour $g : D_g \to \mathbb{R}$ (D_g domaine de $\mathbb{R}^3$) et $\boldsymbol{k} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ l'intégrale $\int_k <g(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_i, \mathrm{d}\boldsymbol{x}>$ existe, alors on l'appelle *intégrale curviligne de g suivant la i*ème *coordonnée*.

On trouve aussi la notation $\int_k g(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_i$, c.-à-d.

$$\int_k g(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_i = \int_k <g(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_i, \mathrm{d}\boldsymbol{x}> .$$

On a alors pour l'intégrale curviligne d'une fonction dont on connaît les composantes :

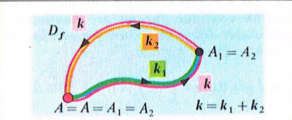
$$\int_k <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}> = \int_k f_1(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_1 + \int_k f_2(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_2 + \int_k f_3(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_3 .$$

Et on écrit souvent $\int_k <\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}\boldsymbol{x}> = \int_k (f_1(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_1 + f_2(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_2 + f_3(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_3)$, et on donne les intégrales curvilignes dans la forme du membre de droite.

Pour les intégrales curvilignes de fonctions réelles, les théorèmes 1 et 2 ainsi que les règles (K1) à (K4) sont encore valables. Le th. 2 s'écrit cependant :

$$\int_k g(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_i = \int_a^b g(\boldsymbol{k}(t)) \cdot k_i'(t)\, \mathrm{d}t .$$

Rem. : Une généralisation à $\mathbb{R}^n$ est possible sans difficulté.



Si f est conservative sur D_f, alors on a d'après la règle (K3), p. 351 :

$$\int_{k_1} \langle f(x), dx \rangle = - \int_{k_2} \langle f(x), dx \rangle, \quad \text{c.-à-d.}$$

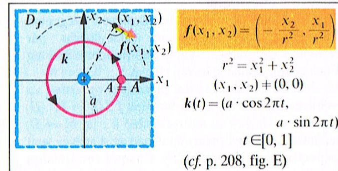
$$\oint_k \langle f(x), dx \rangle = \int_{k_1+k_2} \langle f(x), dx \rangle = \int_{k_1} \langle f(x), dx \rangle + \int_{k_2} \langle f(x), dx \rangle$$

(règle (K 4), p. 351)

$$= 0 .$$

A La réciproque est prouvée de manière analogue.

Indépendance du chemin suivi



$$f(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{r^2}, \frac{x_1}{r^2}\right)$$

$r^2 = x_1^2 + x_2^2$

$(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

$k(t) = (a \cdot \cos 2\pi t,$
$a \cdot \sin 2\pi t)$
$t \in [0, 1]$

(*cf.* p. 208, fig. E)

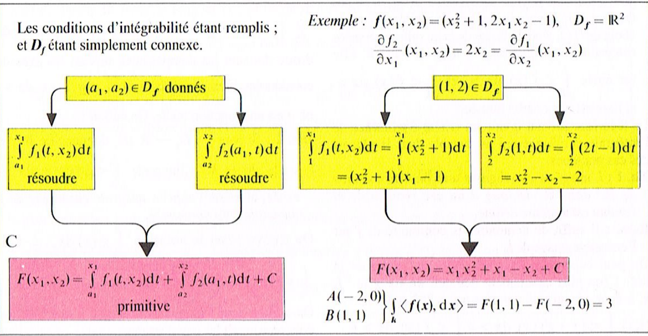
Les conditions d'intégralité sont remplies, car on a :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{r^4} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) .$$

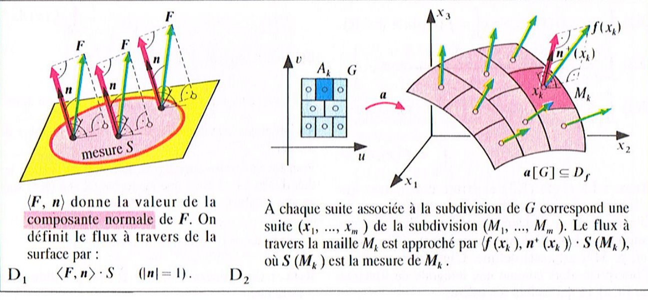
Comme $\int_k \langle f(x), dx \rangle = 2\pi \neq 0$, l'intégrale curviligne dépend du chemin suivi, donc, d'après le th. 3, f ne possède pas de primitive sur D_f.

B

Contre-exemple



Recherche de primitive



D₁ $\langle F, n \rangle$ donne la valeur de la composante normale de F. On définit le flux à travers de la surface par :

$$\langle F, n \rangle \cdot S \quad (|n| = 1) .$$

D₂ À chaque suite associée à la subdivision de G correspond une suite $(x_1, ..., x_m)$ de la subdivision $(M_1, ..., M_m)$. Le flux à travers la maille M_k est approché par $\langle f(x_k), n^+(x_k) \rangle \cdot S(M_k)$, où $S(M_k)$ est la mesure de M_k.

Sur l'intégrale de surface

Intégrale curviligne d'un gradient

Le calcul de la fig. B, p. 350, met en évidence clairement le fait que la valeur d'une intégrale curviligne ne dépend pas que des points de départ et d'arrivée, mais aussi du chemin suivi. Il existe cependant des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même pour lesquelles la valeur de l'intégrale ne dépend que des points de départ et d'arrivée, et non de la manière dont on les relie (du moment que l'intégrale curviligne est définie). Si cette propriété est valable pour tout couple (A, B) de points de D_f, on dit que f est *conservative* sur D_f.

Cette propriété se caractérise de la manière suivante :

Th. 3 : *f est conservative si pour toute courbe fermée k dans D_f sur laquelle l'intégrale curviligne de f est définie, on a :* $\oint_k < f(x), dx > = 0$ (fig. A).

Les fonctions continues ne sont pas toujours conservatives, et c'est pourquoi on cherche une propriété plus forte pouvant caractériser celles qui le sont. On définit alors :

Déf. 3 : Une fonction F de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie sur D_F est dite *primitive* de la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même si on a $D_F = D_f$ et $f = \text{Grad}\, F$ (*cf.* p. 321).

Th. 4 : *Étant donné la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, continue sur son ensemble de déf. D_f. f est conservative si, et seulement si, f est le gradient d'une fonction F.*

Si f possède une primitive, le th. 6 p. 333 explicite clairement que la valeur de l'intégrale curviligne ne dépend *que* des points de départ et d'arrivée :

Th. 5 : *Étant donné une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, continue sur D_f. Si f est le gradient de la fonction F, alors on a pour tout couple (A, B) de points joints par un arc k continûment différentiable entièrement contenu dans D_f :*

$$\int_k < f(x), dx > = F(B) - F(A) .$$

Il est important de savoir sous quelles conditions f est un gradient, et comment on en détermine une primitive, pour pouvoir utiliser le th. 5 dans la pratique.

Une *condition nécessaire* pour que f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même possède une primitive est :

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \; (k, j \in \{1, 2, 3\}, k \neq j) \cdot$$

Cette condition n'est en général *pas suffisante* (*cf.* fig. B). Elle l'est en revanche quand D_f est une boule ouverte, ou plus généralement un ouvert étoilé (il existe un point de D_f tel que tout segment reliant un point de D_f à ce point est entièrement contenu dans D_f). Elle est aussi suffisante quand D_f est simplement connexe (p. 213, p. 239). Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, ceci résulte directement du théorème de GREEN (p. 355).

Rem. : Le domaine de la fig. B n'est pas simplement connexe, car (0, 0) n'appartient pas à D_f.

Quand on a prouvé l'existence d'une primitive, on peut en exhiber une par la méthode indiquée à la fig. C.

Intégrale de surface

Il est souvent question en physique du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface. Dans le cas le plus simple, quand le champ de vecteurs est constant et la surface plane, on définit le flux comme indiqué à la fig. D₁. Dans le cas général, on considère une fonction de $\mathbb{R}^3$ $f : D_f \to \mathbb{R}^3$ (D_f domaine de $\mathbb{R}^3$) et une surface paramétrée par $a : G \to \mathbb{R}^3$, lisse et orientée par n^+ (*cf.* p. 407), que l'on approche comme à la fig. D₂. La somme

$$S(a, f, D, X) = \sum_{k=1}^{m} < f(x_k), M^+(x_k) > \cdot S(n_k)$$

rappelle une somme de RIEMANN. Et on définit :

Déf. 4 : Si pour toute suite convergente de subdivisions (D_n) de G la suite $(S(a, f, D_n, B_n))$ converge vers le même réel, et ce indépendamment du choix des valeurs de la suite B_n associée à D_n, alors on appelle cette limite *intégrale de surface*.

On la note $\int_a < f(x), n^+(x) > dS$.

L'intégrale de surface existe pour des fonctions continues de $\mathbb{R}^3$, et on peut l'exprimer en termes d'intégrales de RIEMANN :

$$\int_a < f(x), n^+(x) > dS = \int_G < f(a(u, v)), n^+(a(u, v)) > \cdot \left| \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \right| du\, dv$$

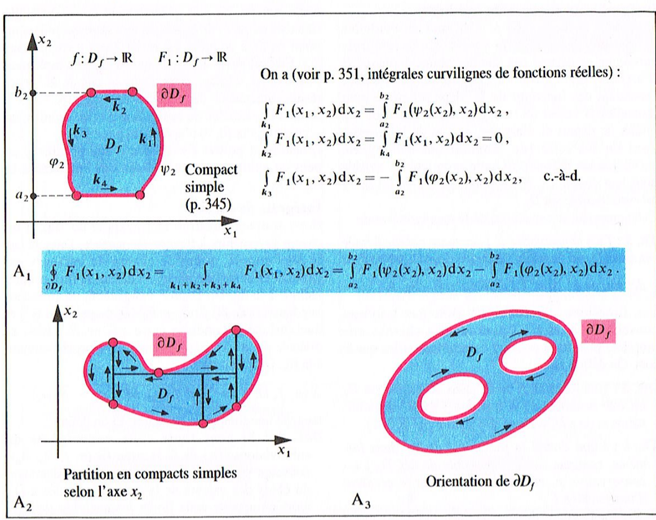
(*cf.* différentielle de surface, p. 349). Comme

$$\frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) = \left| \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right| \cdot n^+(a(u, v)) ,$$

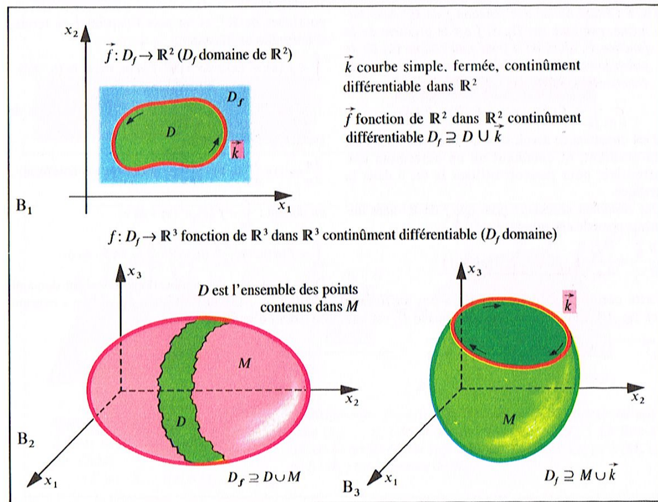
on obtient : $\int_a < f(x), n^+(x) > dS =$

$$\int_G < f(a(u, v)), \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) > \cdot du\, dv .$$

Dans la plupart des applications, G est un domaine régulier (p. 345), et l'intégrale de surface s'exprime en termes d'intégrales doubles.



Représentation d'une intégrale double de RIEMANN à l'aide d'intégrales curvilignes



Théorèmes de STOKES et d'OSTROGRADSKI

Le théorème fondamental (p.333) est applicable à une fonction continue $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, car il existe une primitive F de f (voir p.335). On obtient :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

L'intégrale de RIEMANN sur $[a, b]$ est alors déterminée de manière univoque par les valeurs de F aux bornes du domaine de définition. Si on prend maintenant une fonction continue $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on peut, sous réserve que D_f possède certaines propriétés relativement simples, d'une part assurer l'existence de l'intégrale double de f sur D_f, d'autre part transformer cette intégrale en intégrale curviligne. On verra de même des transformations d'intégrales à domaine d'intégration dans $\mathbb{R}^3$.

Représentation d'une intégrale de RIEMANN de deux variables par une intégrale curviligne le long de la frontière de D_f

Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subset \mathbb{R}^2$) continue, D_f étant un compact simple selon l'axe x_2 (voir fig. A_1). Il existe alors une fonction $F_1: D_f \to \mathbb{R}$ vérifiant

$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$. On peut donc écrire :

$$\int_{D_f} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_{D_f} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

L'intégrale de droite est une intégrale double, ce qui fournit, par intégration selon x_1 (voir p. 345) :

$$\int_{D_f} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_{a_2}^{b_2} [F_1(\psi_2(x_2), x_2) - F_1(\varphi_2(x_2), x_2)]\mathrm{d}x_2$$

A l'aide des résultats de la figure A_1, on obtient donc :

(1) $\int_{D_f} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \oint_{\partial D_f} F_1(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2$ où

$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$.

Cette représentation d'une intégrale de RIEMANN par une intégrale curviligne selon l'axe x_2 est également valable lorsque D_f n'est pas un compact simple selon l'axe x_2 mais est décomposable en un nombre fini de compacts simples selon l'axe x_2 (voir fig. A_2).

Si l'on prend pour hypothèse que D_f est décomposable en un nombre fini de compacts simples selon l'axe x_1, on établit de même :

(2) $\int_{D_f} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \oint_{\partial D_f} F_2(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1$ où $\frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$.

Si f est continûment différentiable, on obtient de (1) et (2), où l'on remplace f par $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ et F_i par f :

(1') $\int_{D_f} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \oint_{\partial D_f} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1$,

(2') $\int_{D_f} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = -\oint_{\partial D_f} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1$.

Théorème et formule de GREEN-RIEMANN

Soit $\vec{f}: D_f \to \mathbb{R}^2$, où $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, une $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^2$ fonction continûment différentiable (D_f étant maintenant un domaine) que l'on écrit sous la forme $\vec{f}(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$. Si l'on considère un sous-ensemble D de D_f, qui soit à la fois décomposable en un nombre fini de compacts simples selon l'axe x_1 et en un nombre fini de compacts simples selon l'axe x_2, on peut alors utiliser (1') et (2') pour les composantes f_1 et f_2 respectivement :

$$\int_D \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \oint_{\partial D} f_2(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2 \quad \text{et}$$

$$\int_D \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = -\oint_{\partial D} f_1(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1$$

Comme

$$\oint_{\partial D} \langle \vec{f}(x_1, x_2), \mathrm{d}(x_1, x_2)\rangle = \oint_{\partial D} f_1(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 + \oint_{\partial D} f_2(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2$$

on obtient :

(3) $\int_D \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \oint_{\partial D} \langle \vec{f}(x_1, x_2), \mathrm{d}(x_1, x_2)\rangle$

La transformation de l'intégrale de RIEMANN sur D en une intégrale curviligne le long de la frontière de D (et réciproquement) est dite formule de GREEN-RIEMANN.

Rem. : L'égalité (3) est encore valable si l'on suppose que D est la réunion d'un domaine et de sa frontière, celle-ci étant constituée d'un nombre fini de courbes de JORDAN fermées de classe C^1 (éventuellement par morceaux) et orientées comme l'indique la fig. A_3.

Théorèmes et formules d'OSTROGRADSKY et de STOKES

Les conditions requises pour l'application du théorème de GREEN-RIEMANN sont remplies, par exemple, lorsque l'on peut se ramener à la situation décrite dans la fig. B_1. Une extension à $\mathbb{R}^3$ est possible de deux façons.

a) On se donne une surface simple fermée dans $\mathbb{R}^3$, de classe C^1 et régulière, orientée par $\vec{n}^+$ (voir p. 407), munie d'une représentation paramétrique $\vec{a}$. Soit D l'intérieur de cette surface (voir fig. B_2). Si $\vec{f}: D_f \to \mathbb{R}^3$ (D_f domaine de $\mathbb{R}^3$) est une fonction continûment différentiable, telle que D_f contienne la surface et D, on a alors (pour div $\vec{f}(\vec{x})$, voir p. 327) :

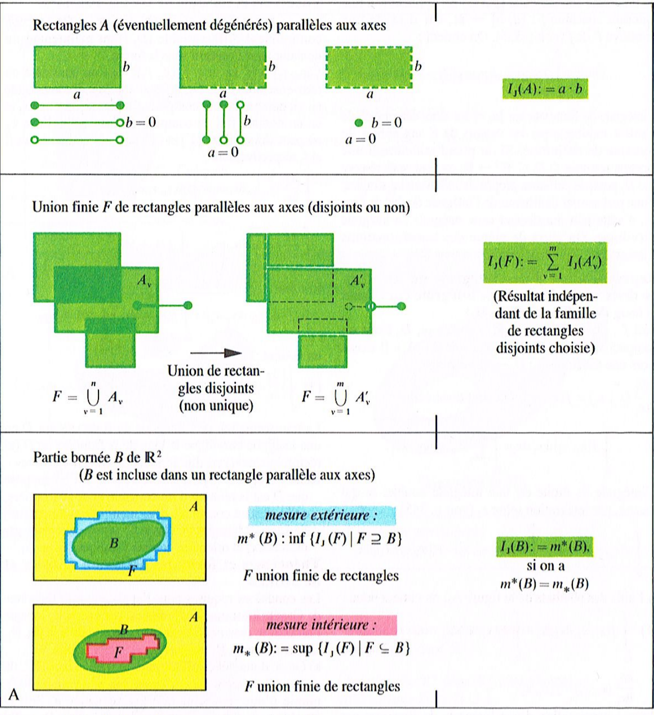
(4) $\int_D \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x})\mathrm{d}V = \int_{\vec{a}} \langle \vec{f}(\vec{x}), \vec{n}^+(\vec{x})\rangle\mathrm{d}A$.

La transformation de l'intégrale de RIEMANN sur D en une intégrale de surface (et réciproquement) est dite formule d' OSTROGRADSKI.

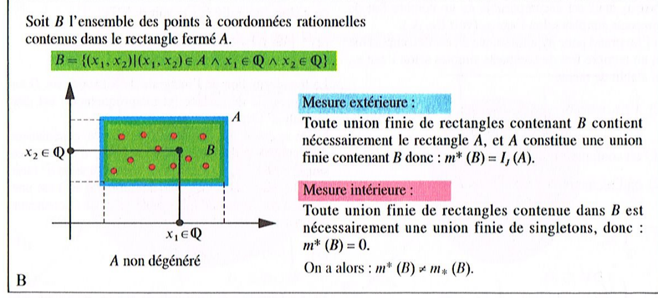
b) On se donne une courbe simple, fermée, continûment différentiable $\vec{k}$ dans $\mathbb{R}^3$, qui sera le bord d'une surface simple $\vec{a}$ de classe C^1 régulière et orientable selon $\vec{n}^+$ (voir fig. B_3). Si $\vec{f}: D_f \to \mathbb{R}^3$ (D_f domaine de $\mathbb{R}^3$) est une fonction continûment différentiable, telle que D_f contienne la surface et $\vec{k}$, on a alors (pour rot $\vec{f}(\vec{x})$, voir p. 327) :

(5) $\int_{\vec{a}} \langle \operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}), \vec{n}^+(\vec{x})\rangle\mathrm{d}A = \oint_{\vec{k}} \langle \vec{f}(\vec{x}), \mathrm{d}\vec{x}\rangle$.

La transformation de l'intégrale de surface en une intégrale curviligne (et réciproquement) est dite formule de STOKES.



Mesure aréolaire de JORDAN d'une partie bornée de $\mathbb{R}^2$



Exemple de partie bornée de $\mathbb{R}^2$ non mesurable au sens de JORDAN

Position du problème

En géométrie euclidienne élémentaire, on cherche d'abord à associer une aire à toute figure plane limitée par un polygone. Pour cela, on part de rectangles, puis, à l'aide d'unions et de subdivisions convenablement choisies, on réduit le contenu d'un polygone à des rectangles (voir p. 161).

Des figures limitées par des courbes continues simples fermées, comme les disques, peuvent alors être approchées par des polygones inscrits et circonscrits (voir p. 171).

De manière plus formelle (voir p. 161), il s'agit de se donner, $\mathfrak{E}$ étant un système de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ le plus vaste possible, une application $I : \mathfrak{E} \to \mathbb{R}_+$ qui possède les propriétés suivantes :

(I1) $A, B \in \mathfrak{E} \wedge A \equiv B \Rightarrow I(A) = I(B)$,

(I2) $A, B \in \mathfrak{E} \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow I(A \cup B) = I(A) + I(B)$, (*additivité*)

(I3) $I(E) = 1$, si E est un carré de côté 1.

$I(A)$ est appelé *mesure aréolaire* de A, I est une *fonction aréolaire.*

Il est nécessaire de faire certaines hypothèses sur le système d'ensembles $\mathfrak{E}$. Ainsi, on doit pouvoir, comme en géométrie élémentaire, faire un nombre fini de « subdivisions » et d'« unions » de figures. Ces processus peuvent s'exprimer à l'aide des opérations « $\cup$ », « $\cap$ » et « \ » de la théorie des ensembles. La fermeture de $\mathfrak{E}$ pour ces opérations est alors nécessaire. Cependant, il suffit de l'exiger pour « $\cup$ » et « \ », c.-à-d. de vérifier que $\mathfrak{E}$ est un anneau de parties ($\forall A, B \in \mathfrak{E}, A \cup B, A \setminus B \in \mathfrak{E}$), puisque la fermeture pour $\cap$ résulte de la relation $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. Par récurrence, on montre alors que toute intersection ou union *finie* d'éléments de $\mathfrak{E}$ appartient encore à $\mathfrak{E}$.

Soit I une fonction aréolaire sur un anneau d'ensembles $\mathfrak{E}$. On peut démontrer les propriétés essentielles suivantes, que possède toute fonction aréolaire. Pour un *nombre fini d'éléments* $A_\nu \in \mathfrak{E}$, *deux à deux disjoints*, on a :

$I\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} I(A_\nu)$ (*additivité finie*). Pour tous $A, B \in \mathfrak{E}$ tels que $A \subseteq B$, on a : $I(A) \leq I(B)$ (*croissance*).

La théorie de la mesure étudie la question de l'existence et de l'étendue des anneaux d'ensembles, ainsi que la question de l'existence et de l'unicité des fonctions aréolaires. Elle étudie également la possibilité de l'extension de l'additivité en une additivité dénombrable, c.-à-d. $I\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} I(A_\nu)$ pour un *ensemble dénombrable d'éléments* $A_\nu \in \mathfrak{E}$, *deux à deux disjoints.*

Le but de cette étude est, entre autres, d'établir une théorie unique pour les longueurs, aires et volumes, qui est en fait une théorie du « contenu » dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$). La présentation qui suit se limite au développement des concepts de mesure aréolaire de JORDAN et de mesure de LEBESGUE de parties *bornées* de $\mathbb{R}^2$. Une généralisation à $\mathbb{R}^n$ s'obtient en remplaçant dans le texte le mot « rectangle » par « pavé en dimension n » (intervalle dans $\mathbb{R}^1$, pavé dans $\mathbb{R}^3$).

Rem. : Dans les développements récents de la théorie de la mesure, on choisit comme espaces sous-jacents aux systèmes d'ensembles sur lesquels on définit la mesure des espaces plus généraux que $\mathbb{R}^n$. Ces résultats sont très utiles, par exemple, pour l'édification de la théorie des probabilités.

Mesure aréolaire de JORDAN

Pour parvenir au concept de mesure aréolaire de JORDAN, on définit d'abord la mesure aréolaire des rectangles (éventuellement dégénérés), puis des familles de rectangles (voir fig. A). Toute partie bornée de $\mathbb{R}^2$ peut alors être approchée « par dehors » et « par dedans » à l'aide de familles de rectangles (fig. A). Les réels positifs $m^*(B)$ et $m_*(B)$ définis en fig. A sont appelés respectivement *mesure extérieure* et *mesure intérieure* de B. Si ces deux mesures coïncident, B possède une mesure aréolaire.

Déf. 1 : $B \subseteq \mathbb{R}^2$ est dit mesurable au sens de JORDAN si B est bornée et si $m^*(B) = m_*(B)$. La valeur commune est appelée *mesure aréolaire de JORDAN de* B et se note $I_J(B)$.

On peut montrer que le système d'ensembles $\mathfrak{E}_J$ de toutes les parties de $\mathbb{R}^2$ mesurables au sens de JORDAN est un anneau d'ensembles, et que les propriétés (I1) à (I3) sont vérifiées par I_J. $I_J : \mathfrak{E}_J \to \mathbb{R}_+$ définie par $B \mapsto I_J(B)$ est alors une fonction aréolaire sur l'anneau d'ensembles $\mathfrak{E}_J$.

Ce concept de mesure aréolaire de JORDAN suffit pour la plupart des problèmes de contenu en géométrie théorique et pratique. Cependant, une *partie bornée de* $\mathbb{R}^2$ n'est *pas nécessairement* mesurable au sens de JORDAN (voir fig. B).

Les ensembles négligeables, c.-à-d. de mesure 0, sont particulièrement importants pour caractériser les ensembles mesurables au sens de JORDAN. L'ensemble vide, tout ensemble fini, les segments et courbes rectifiables de $\mathbb{R}^2$ sont des exemples d'ensembles négligeables. Tout sous-ensemble d'ensemble négligeable, toute intersection et toute union finie d'ensembles négligeables sont également négligeables. En particulier, on a le

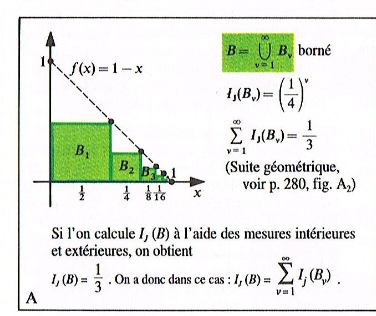
Th. 1 : *Une partie bornée de* $\mathbb{R}^2$ *est mesurable au sens de* Jordan *si, et seulement si, sa frontière est un ensemble négligeable.*

Il en résulte que si $A \in \mathfrak{E}_J$, tout ensemble B tel que $\mathring{A} \subseteq B \subseteq \overline{A}$ appartient également à $\mathfrak{E}_J$, et possède la même mesure aréolaire de JORDAN que A (pour $\mathring{A}$, $\overline{A}$ voir p. 214, fig. C).

Le lien entre mesure aréolaire de JORDAN et RIEMANN-intégrabilité apparaît grâce au théorème suivant.

Th. 2 : *L'aire de l'hypographe* B (voir p. 331) *d'une fonction bornée* $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ *est mesurable au sens de JORDAN si, et seulement si, f est RIEMANN-intégrable. On a alors :*

$$I_J(B) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ .$$



$B = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_\nu$ borné

$I_J(B_\nu) = \left(\frac{1}{4}\right)^\nu$

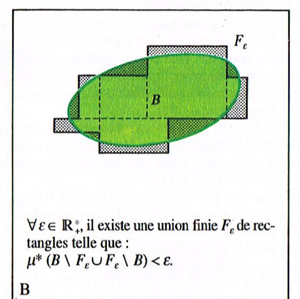
$\sum_{\nu=1}^{\infty} I_J(B_\nu) = \frac{1}{3}$

(Suite géométrique, voir p. 280, fig. A_2)

Si l'on calcule $I_J(B)$ à l'aide des mesures intérieures et extérieures, on obtient

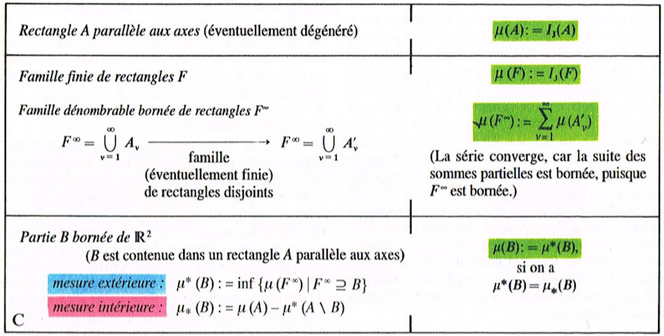
$I_J(B) = \frac{1}{3}$. On a donc dans ce cas : $I_J(B) = \sum_{\nu=1}^{\infty} I_j(B_\nu)$.

Union dénombrable de parties mesurables au sens de JORDAN de $\mathbb{R}^2$



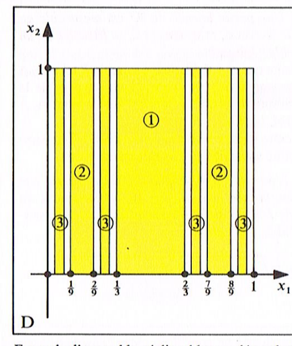
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, il existe une union finie F_ε de rectangles telle que :
$\mu^*(B \setminus F_\varepsilon \cup F_\varepsilon \setminus B) < \varepsilon$.

Approximation d'une partie mesurable au sens de LEBESGUE à l'aide d'unions finies de rectangles.



Rectangle A parallèle aux axes (éventuellement dégénéré)	$\mu(A) := I_J(A)$
Famille finie de rectangles F *Famille dénombrable bornée de rectangles F^∞* $F^\infty = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \longrightarrow F^\infty = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A'_\nu$ famille (éventuellement finie) de rectangles disjoints	$\mu(F) := I_J(F)$ $\mu(F^\infty) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A'_\nu)$ (La série converge, car la suite des sommes partielles est bornée, puisque F^∞ est bornée.)
Partie B bornée de $\mathbb{R}^2$ (B est contenue dans un rectangle A parallèle aux axes) *mesure extérieure :* $\mu^*(B) := \inf\{\mu(F^\infty) \mid F^\infty \supseteq B\}$ *mesure intérieure :* $\mu_*(B) := \mu(A) - \mu^*(A \setminus B)$ C	$\mu(B) := \mu^*(B)$, si on a $\mu^*(B) = \mu_*(B)$

Mesure de LEBESGUE d'une partie bornée de $\mathbb{R}^2$



① Dans le carré $[0, 1]^2$, on trace 3 bandes parallèles à Ox_2 de largeur 1/3.

② On divise chacune des bandes extrêmes en trois, et on recommence avec les quatre bandes extrêmes obtenues.
Le procédé peut être réitéré indéfiniment. À la n-ième fois, on obtient 2^{n-1} bandes de largeur $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, que l'on ne divise plus ensuite (bandes choisies ouvertes).

Les bandes que l'on ne divise plus forment une famille dénombrable de rectangles d'union F^∞ telle que

$$\mu(F^\infty) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu-1} = 1 \quad \text{(suite géométrique).}$$

L'ensemble des points restants $[0, 1]^2 \setminus F^\infty$ est donc de mesure 0. Il est non dénombrable. On peut montrer que son intersection avec l'axe x_1 (appelée discontinuum de CANTOR $\mathbb{D}$) est également non dénombrable.

Exemple d'ensemble négligeable non dénombrable

Limites du concept de mesure aréolaire de JORDAN

La fig. A montre qu'il serait sensé de définir une mesure aréolaire pour une union *dénombrable* bornée d'ensembles mesurables au sens de JORDAN de $\mathbb{R}^2$. L'exemple de la fig. B p. 356 montre cependant qu'une union dénombrable d'ensembles mesurables au sens de JORDAN (dans cet exemple, des singletons de mesure aréolaire 0) n'est *pas nécessairement* mesurable au sens de JORDAN. Mais, dans les cas où l'union dénombrable de parties mesurables au sens de JORDAN est mesurable au sens de JORDAN, l'additivité dénombrable (voir p. 357) est vérifiée. L'écart entre les mesures intérieure et extérieure dans l'exemple de la fig. B p. 356 est dû au fait que l'on ne peut pas approcher le sous-ensemble de manière suffisamment « fine » à l'extérieur par une famille finie de rectangles ; il reste trop de « vide ». Pour « affiner » cette mesure, il devient nécessaire de pouvoir considérer des familles *infinies dénombrables* de rectangles. Ceci amène à considérer la mesure de LEBESGUE de parties de $\mathbb{R}^2$.

Mesure de LEBESGUE

Afin de la distinguer de la mesure aréolaire de JORDAN, on parlera désormais de la *mesure* d'une partie de $\mathbb{R}^2$. On prend comme mesure pour les rectangles (éventuellement dégénérés) et les unions finies de rectangles leur mesure aréolaire de JORDAN. Pour les unions dénombrables de rectangles bornées, on la définit comme en tab. C. Ces définitions entraînent que l'ensemble de la fig. B p. 356 est de mesure 0, et la mesure d'une famille dénombrable de rectangles qui est mesurable au sens de JORDAN coïncide avec sa mesure aréolaire.

À toute partie bornée B de $\mathbb{R}^2$, on associe alors, comme en tab. C une *mesure extérieure* $\mu^*(B)$ et une *mesure intérieure* $\mu_*(B)$. Si ces valeurs sont égales, B est mesurable au sens de LEBESGUE.

Déf. 2 : *$B \subseteq \mathbb{R}^2$ est dite mesurable au sens de* LEBESGUE *si B est bornée et si $\mu^*(B) = \mu_*(B)$. La valeur commune est appelée mesure de* LEBESGUE *de B et est notée $\mu(B)$.*

Le système d'ensembles $\mathfrak{E}_L$ des parties mesurables au sens de LEBESGUE de $\mathbb{R}^2$ est, tout comme $\mathfrak{E}_J$, un anneau d'ensembles. $\mu : \mathfrak{E}_L \to \mathbb{R}_+$ définie par $B \mapsto \mu(B)$ est une fonction aréolaire.

Th. 3 : *Toute partie mesurable au sens de* JORDAN *de $\mathbb{R}^2$ est mesurable au sens de* LEBESGUE.

On en déduit que $\mathfrak{E}_J \subseteq \mathfrak{E}_L$.

$\mathfrak{E}_J$ est un sous-ensemble strict de $\mathfrak{E}_L$, comme le montre l'exemple de la fig. B p. 356. En fait, la mesure de LEBESGUE permet d'approcher plus « finement » certains ensembles qui se révéleront LEBESGUE-négligeables ($\mu = 0$) alors qu'ils n'étaient pas JORDAN-mesurables.

On peut caractériser les parties mesurables au sens de LEBESGUE de $\mathbb{R}^2$ grâce au

Th. 4 : *Une partie bornée B de $\mathbb{R}^2$ est mesurable au sens de* LEBESGUE *si, et seulement si, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ il existe une union finie de rectangles F_ε telle que $\mu^*(B \setminus F_\varepsilon \cup F_\varepsilon \setminus B) < \varepsilon$.*

On en déduit que les parties de $\mathbb{R}^2$ qui peuvent être approchées à l'aide d'une union finie de rectangles sont mesurables au sens de LEBESGUE. On remarque qu'il n'est plus question, en général, des familles resp. intérieure et extérieure (voir fig. B).

La mesure de LEBESGUE est également une généralisation de la mesure aréolaire de JORDAN relativement à l'additivité dénombrable (voir p. 357). Toute partie bornée B de $\mathbb{R}^2$ qui peut s'écrire sous la forme d'une union dénombrable de parties mesurables au sens de LEBESGUE B_ν est mesurable au sens de LEBESGUE et, si les B_ν sont deux à deux disjointes, on a : $\mu(B) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(B_\nu)$.

On en déduit entre autres que toute partie dénombrable de $\mathbb{R}^2$ est négligeable. Cependant, il existe aussi des ensembles négligeables non dénombrables (voir fig. D).

Les ouverts bornés et les fermés bornés sont tous mesurables au sens de LEBESGUE. Une union dénombrable de parties fermées ou une intersection dénombrable de parties ouvertes est également, si elle est bornée, mesurable au sens de LEBESGUE. En effet, ce sont des boréliens (ensembles obtenus par union ou intersection dénombrable de fermés ou d'ouverts), et tout borélien borné est mesurable au sens de LEBESGUE. Cependant, ce procédé ne permet pas d'atteindre tous les ensembles mesurables au sens de LEBESGUE de $\mathbb{R}^2$.

On peut néanmoins cerner les parties mesurables au sens de LEBESGUE de $\mathbb{R}^2$, car toute partie mesurable au sens de LEBESGUE est l'union d'un borélien et d'une partie LEBESGUE-négligeable.

Une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ n'est pas nécessairement mesurable au sens de LEBESGUE. Pour le démontrer, on a besoin de l'axiome du choix (p. 29).

Contenu et mesure de parties non bornées

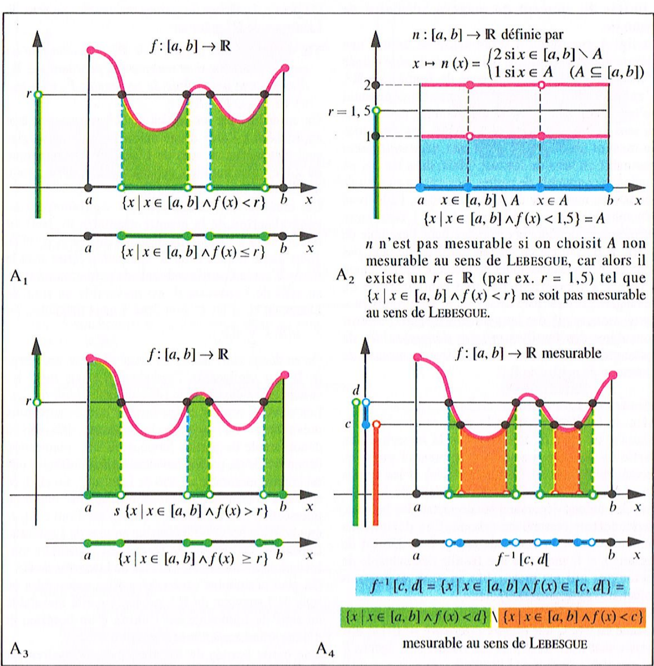
Il est possible d'étendre le concept de mesure aréolaire de JORDAN (resp. mesure de LEBESGUE) aux parties non bornées de $\mathbb{R}^2$, par exemple comme suit :

Déf. 3 : Une partie non bornée A de $\mathbb{R}^2$ est dite mesurable au sens de JORDAN (resp. au sens de LEBESGUE) si l'intersection de A avec chaque carré C_ν, centré en l'origine et dont les côtés sont de longueur entière 2ν, est mesurable au sens de JORDAN (resp. au sens de LEBESGUE). On a alors :

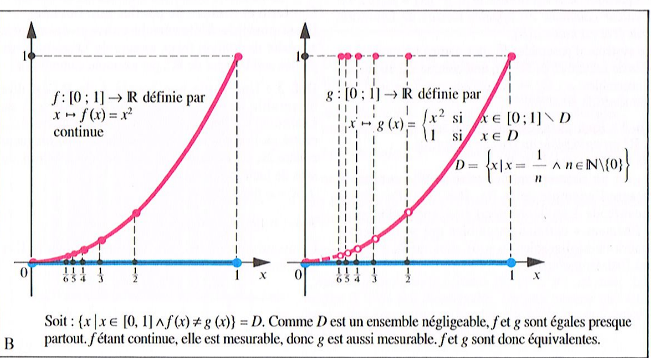
$I_J(A) := \lim_{\nu \to \infty} I_J(A \cap C_\nu)$ resp.

$\mu(A) := \lim_{\nu \to \infty} \mu(A \cap C_\nu)$.

La mesure aréolaire et la mesure prennent alors évidement leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.



Mesurabilité de fonctions



Exemple de fonctions équivalentes

Fonctions mesurables

En théorie de l'intégrale de LEBESGUE, une classe de fonctions, qui comprend les fonctions continues, est particulièrement importante : c'est celle des fonctions mesurables.

Déf. 1 : Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée ou non est dite mesurable si pour tout $r \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \mid x \in [a, b] \wedge f(x) < r\}$ est mesurable au sens de LEBESGUE (voir fig. A_1).

(On rappelle que la mesure de LEBESGUE d'une partie bornée de $\mathbb{R}$ se définit de manière analogue à celle d'une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ (voir p. 357) en remplaçant les rectangles par des *intervalles*).

Il existe des fonctions non mesurables (voir fig. A_2).

Pour prouver qu'une fonction est mesurable, on peut se limiter à $r \in \mathbb{Q}$. Par ailleurs, f est également mesurable si, et seulement si, pour tout $r \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$\{x \mid x \in [a, b] \wedge f(x) \leq r\}$ resp.
$\{x \mid x \in [a, b] \wedge f(x) > r\}$ resp.
$\{x \mid x \in [a, b] \wedge f(x) \geq r\}$ est mesurable au sens de LEBESGUE. Alors, si f est mesurable, les images réciproques par f d'intervalles sont mesurables au sens de LEBESGUE (voir fig. A_4).

La mesurabilité de fonctions est conservée par les opérations rationnelles :

Th. 1 : *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont mesurables, alors $f + g, f - g, f \cdot g$ le sont aussi, et, si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, $\frac{f}{g}$ l'est aussi.*

Comme toute fonction constante c définie sur $[a, b]$ est mesurable, on en déduit que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est mesurable, $c \cdot f$ l'est aussi. En revanche, la composée de deux fonctions mesurables n'est pas nécessairement mesurable.

Les ensembles négligeables, au sens de la mesure de LEBESGUE, sont particulièrement importants pour l'étude des fonctions mesurables. On a par exemple la propriété suivante :

Si deux fonctions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont égales sauf sur un sous-ensemble négligeable de $[a, b]$, soit elles sont toutes les deux mesurables, soit elles sont toutes les deux non mesurables.

Au lieu de « *sauf sur un sous-ensemble négligeable* », on dit également « *presque partout* ». Des fonctions mesurables égales presque partout sont dites *équivalentes* (ex : voir ill. B).

Alors que la fonction limite, si elle existe, d'une suite de fonctions continues (f_n) n'est pas continue en général (voir p. 289), celle d'une suite de fonctions mesurables est toujours mesurable. Par définition, une suite de fonctions (f_n) *converge presque partout vers* f si $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ presque partout.

Th. 2 : *Si une suite de fonctions mesurables converge presque partout vers f, f est mesurable.*

Rem. : À cause de cette définition moins exigeante de la convergence, la fonction limite n'est plus unique : toute fonction qui lui est équivalente convient également.

Rem. : Les concepts qui précèdent sont définis de manière analogue pour les fonctions dont le domaine de définition n'est pas un intervalle. On exige cependant que ce domaine soit mesurable au sens de LEBESGUE. Les énoncés usuels restent alors valables.

Fonctions mesurables et fonctions continues

On peut montrer que toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue est mesurable. En revanche, il existe des fonctions mesurables bornées qui ne sont pas continues (voir ill.B). Cependant, une fonction mesurable bornée non continue peut être approchée presque partout par des fonctions continues :

Th. 3 : *Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mesurable, bornée il existe une suite (f_n) de fonctions continues qui converge presque partout vers f.*

Mais, pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, il n'existe pas nécessairement de fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue qui lui soit équivalente. Cependant, on a le

Th. 4 : *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut trouver une fonction continue $g_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $\mu\left(\{x \mid x \in [a, b] \wedge f(x) \neq g_\varepsilon(x)\}\right) < \varepsilon$.*

Définition de l'intégrale de LEBESGUE

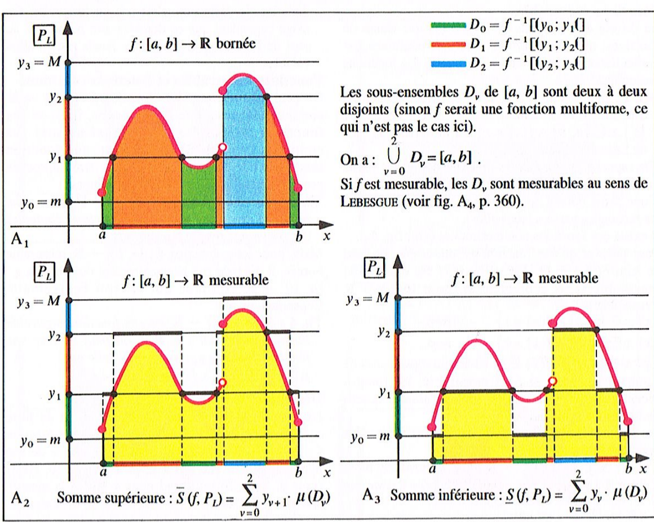
La base de la théorie de l'intégration est de faire correspondre, à l'aide d'une intégrale, à toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ positive et bornée, l'« aire » de son hypographe $B = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \wedge y \in [0, f(x)]\}$ (voir p. 331). Si on prend pour « aire » la mesure aréolaire de JORDAN, B est mesurable si, et seulement si, f est RIEMANN-intégrable (th. 2 p. 357). Si f est RIEMANN-intégrable, son intégrale vaut $I_J(B)$.

Or il existe des fonctions positives bornées qui ne sont pas RIEMANN-intégrables, et dont l'hypographe n'est pas mesurable au sens de JORDAN (voir p. 331), mais l'est au sens de LEBESGUE (voir p. 359). La mesure de LEBESGUE étant une généralisation de la mesure aréolaire de JORDAN, on peut se demander s'il n'est pas possible de généraliser l'intégrale de RIEMANN, afin d'associer également une intégrale aux hypographes qui sont seulement mesurables au sens de LEBESGUE. Ceci conduit à la théorie de l'intégrale de LEBESGUE, dans laquelle on ne se restreint plus aux fonctions positives.

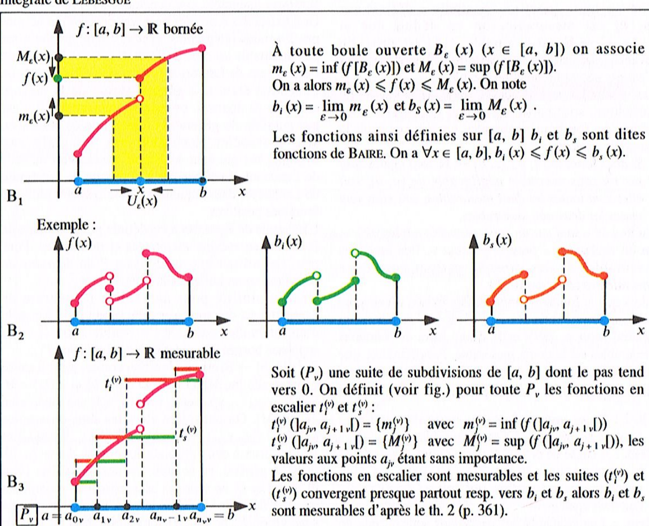
L'intégrale de RIEMANN a été définie p. 331 à l'aide de fonctions en escalier majorantes et minorantes. Pour cela, on utilisait une subdivision P du *domaine de définition* en un nombre fini d'intervalles.

Une possibilité pour parvenir à l'intégrale de LEBESGUE est de remplacer cette subdivision par celle d'un intervalle contenant l'*ensemble d'arrivée* de f supposée bornée. On notera cette subdivision P_L.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, alors il existe un intervalle $[m, M]$ tel que, $\forall x \in [a, b], m < f(x) < M$. Soit $P_L = (y_0, \ldots, y_n)$ avec $y_0 = m$ et $y_n = M$ une subdivision de $[m, M]$. On considère alors les sous-ensembles $D_\nu := f^{-1}([y_\nu, y_{\nu+1}[)$ de $[a, b]$, $(\nu \in \{1, \ldots, n-1\})$. Les D_ν sont deux à deux disjoints, leur union donne $[a, b]$, mais en général, ce ne sont pas des intervalles (voir ill. A_1). Les D_ν ne sont pas nécessairement mesurables au sens de JORDAN. Mais si tous les D_ν de chaque subdivision P_L de $[m, M]$ sont mesurables au sens de LEBESGUE, ce qui se produit si f est mesurable (voir



Intégrale de Lebesgue



Fonctions de Baire

p. 361), alors les sommes suivantes existent pour toute subdivision P_L de $[m, M]$ (voir ill. A_2, A_3)

$$\overline{S}(f, P_L) := \sum_{v=0}^{n-1} y_{v+1} \cdot \mu(D_v) \quad (\textit{somme supérieure}),$$

$$\underline{S}(f, P_L) := \sum_{v=0}^{n-1} y_{v+1} \cdot \mu(D_v) \quad (\textit{somme inférieure}).$$

Si on affine une subdivision donnée (en ajoutant des points de séparation), la nouvelle somme supérieure sera inférieure ou égale à $\overline{S}(f, P_L)$ et la nouvelle somme inférieure sera supérieure ou égale à $\underline{S}(f, P_L)$. On a également, pour deux subdivisions quelconques P_L et $\widehat{P}_L$, $\widehat{P}_L$, $\underline{S}(f, P_L) \leq \overline{S}(f, \widehat{P}_L)$. Il en résulte que l'ensemble des sommes supérieures est minoré et que celui des sommes inférieures est majoré. Il existe alors une *intégrale supérieure* qui est la borne inférieure des sommes supérieures, et une *intégrale inférieure*, qui est la borne supérieure des sommes inférieures. Pour une fonction mesurable, ces deux intégrales sont égales. On définit alors :

Déf. 2 : La borne supérieure de l'ensemble des sommes inférieures d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mesurable est appelée *intégrale de* Lebesgue. On note :

$$(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \sup \left\{ \underline{S}(f, P_L) \,\middle|\, \begin{array}{l}\underline{S}(f, P_L)\text{ somme} \\ \text{inférieure}\end{array} \right\}$$

Rem. : Le signe (L) sert à distinguer l'intégrale de Lebesgue de celle de Riemann, désignée par (R), s'il y a risque de confusion.
La valeur de l'intégrale de Lebesgue est indépendante du choix de l'intervalle qui englobe l'ensemble d'arrivée.

On définit de manière analogue l'intégrale de Lebesgue d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subset \mathbb{R}$) mesurable quand D_f n'est plus un intervalle mais une partie mesurable. On note alors $(\mathrm{L})\int_{D_f} f(x)\mathrm{d}x$.

Il est également possible de définir l'intégrale de fonctions mesurables à plusieurs variables.

Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

Les fonctions considérées sont supposées bornées et mesurables.

(L1) $\int_D (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_D f(x)\mathrm{d}x + \int_D g(x)\mathrm{d}x$,

(L2) $\int_{D_f} (c \cdot f)(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_{D_f} f(x)\mathrm{d}x$ $(c \in \mathbb{R})$,

(L3) $\int_D f(x)\mathrm{d}x \leq \int_D g(x)\mathrm{d}x$ si $\forall x \in D, f(x) \leq g(x)$.

(L4) $\int_D f(x)\mathrm{d}x = \sum_{v=0}^{\infty} \int_{D_v} f(x)\mathrm{d}x$, où les D_v sont deux à deux disjoints, mesurables au sens de Lebesgue et vérifient $D = \bigcup_{v=0}^{\infty} D_v$.

(L5) $m \cdot \mu(D_f) \leq \int_{D_f} f(x)\mathrm{d}x \leq M \cdot \mu(D_f)$, m étant un minorant et M un majorant de $f[D_f]$.

Conséquences : $\int_{D_f} f(x)\mathrm{d}x = 0$ si $\mu(D_f) = 0$.

$\int_D \mathrm{d}x = \mu(D)$.

(L6) $\int_D f(x)\mathrm{d}x = \int_D g(x)\mathrm{d}x$ si f et g sont équivalentes.

(L6*) f est équivalente à la fonction nulle si f est positive et $\int_{D_f} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

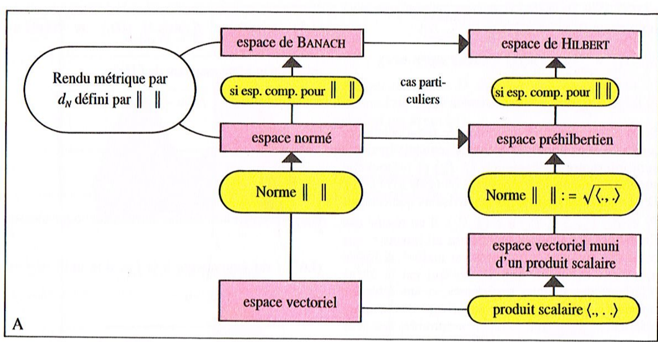
Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann

L'intégrale de Lebesgue ne peut être considérée comme une extension de l'intégrale de Riemann que si toute fonction Riemann-intégrable a une intégrale de Lebesgue, dont la valeur est égale à celle de Riemann. Ceci est vérifié. En outre, à l'aide de la théorie de la mesure, on peut établir une caractérisation complète des fonctions Riemann-intégrables. Ce sont les fonctions dont l'ensemble des points de discontinuité n'est pas « trop grand ». On a d'une manière précise :

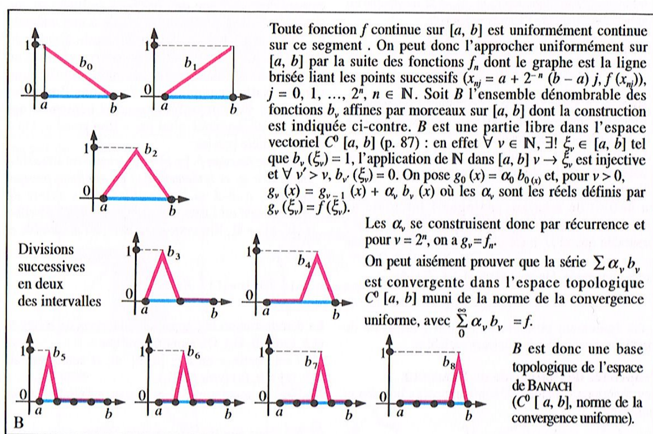
Th. 5 : *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée est* Riemann-*intégrable si, et seulement si, f est continue presque partout, c.-à-d. si l'ensemble de ses points de discontinuité est* Lebesgue-*négligeable. Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,* Riemann-*intégrable, est mesurable et l'on a :*

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\mathrm{L})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

La démonstration fait appel aux fonctions de Baire b_i et b_s (voir ill. B_1). On montre alors que :
(1) f est continue en $x \in [a, b]$ si, et seulement si, $b_i(x) = b_s(x)$ (voir ill. B_2).
Ensuite, on montre que b_i et b_s sont mesurables (voir ill. B_3), donc que $(\mathrm{L})\int_a^b (b_s - b_i)(x)\mathrm{d}x$ existe. Cette intégrale vaut 0 si, et seulement si, f est Riemann-intégrable. Par ailleurs, les propriétés (L6) et (L6*) nous assurent que l'intégrale vaut 0 si, et seulement si, b_i et b_s sont équivalentes (car $b_s - b_i$ est positive). On en déduit :
(2) f est Riemann-intégrable si, et seulement si, $b_s(x) = b_i(x)$ presque partout.
En rapprochant (1) et (2), on obtient la première partie du théorème.
Pour démontrer la seconde, on peut utiliser l'équivalence de b_i et b_s. Comme $b_i(x) \leq f(x) \leq b_s(x)$, b_i (resp. b_s) et f sont également équivalentes. f est donc mesurable.
Pour prouver l'égalité des intégrales, on utilise les fonctions en escalier de l'ill. B_3.



Liens entre les différents espaces



Toute fonction f continue sur $[a, b]$ est uniformément continue sur ce segment . On peut donc l'approcher uniformément sur $[a, b]$ par la suite des fonctions f_n dont le graphe est la ligne brisée liant les points successifs $(x_{nj} = a + 2^{-n}(b-a)\,j, f(x_{nj}))$, $j = 0, 1, \ldots, 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Soit B l'ensemble dénombrable des fonctions b_ν affines par morceaux sur $[a, b]$ dont la construction est indiquée ci-contre. B est une partie libre dans l'espace vectoriel $C^0\,[a, b]$ (p. 87) : en effet $\forall\, \nu \in \mathbb{N}, \exists!\ \xi_\nu \in [a, b]$ tel que $b_\nu(\xi_\nu) = 1$, l'application de $\mathbb{N}$ dans $[a, b]$ $\nu \to \xi_\nu$ est injective et $\forall\, \nu' > \nu$, $b_{\nu'}(\xi_\nu) = 0$. On pose $g_0(x) = \alpha_0\, b_{0\,(x)}$ et, pour $\nu > 0$, $g_\nu(x) = g_{\nu-1}(x) + \alpha_\nu\, b_\nu(x)$ où les α_ν sont les réels définis par $g_\nu(\xi_\nu) = f(\xi_\nu)$.

Les α_ν se construisent donc par récurrence et pour $\nu = 2^n$, on a $g_\nu = f_n$.

On peut aisément prouver que la série $\sum \alpha_\nu b_\nu$ est convergente dans l'espace topologique $C^0\,[a, b]$ muni de la norme de la convergence uniforme, avec $\sum_0^\infty \alpha_\nu b_\nu = f$.

B est donc une base topologique de l'espace de BANACH ($C^0\,[a, b]$, norme de la convergence uniforme).

Construction d'une base topologique de $C^0\,[a, b]$ selon SCHAUDER

$$\mathbb{R}^\infty := \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = (x_\nu) \wedge x_\nu \in \mathbb{R} \wedge \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^2 \text{ convergente} \right\}$$ (*cf.* p. 230, A)

Pour tout couple d'éléments $\vec{x} = (x_\nu)$, $\vec{y} = (y_\nu)$ de $\mathbb{R}^\infty$ on définit le produit scalaire et la norme associée par :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu\, y_\nu \quad \text{et} \quad \|\vec{x}\|_2 := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}\,.$$

$\mathbb{R}^\infty$ est un espace préhilbertien

Rem. : $\mathbb{R}$ est complet, et on peut en déduire que $\mathbb{R}^\infty$ est complet, donc que $\mathbb{R}^\infty$ est un espace de HILBERT (voir p. 366).

C

Exemple d'espace préhilbertien (et de HILBERT)

En calcul différentiel et intégral, on a commencé par étudier des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles (voir p. 290). Puis on a adapté certains résultats aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ (p. 322) ; on a, au-delà, remplacé $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et exploité la richesse des fonctions holomorphes (p. 424). L'*analyse fonctionnelle* requiert des espaces encore plus généraux, parmi lesquels figurent ceux dont les éléments sont des fonctions.

L'analyse fonctionnelle a été développée en particulier pour répondre aux problèmes d'extrema de *fonctionnelles* à valeurs réelles, c.-à-d. de fonctions réelles définies sur un espace de fonctions. Par exemple, à tout arc de courbe tracé dans un plan vertical entre deux points A et B et pris comme trajectoire sans frottement, on peut associer le temps mis par un mobile lâché en A sans vitesse initiale pour arriver en B sous l'effet de la seule pesanteur. On recherche alors l'arc pour lequel ce temps est minimal (*brachistochrone*, voir p. 369).

Espaces vectoriels

Les espaces utilisés en analyse fonctionnelle doivent avoir la structure algébrique d'*espaces vectoriels*.

Le concept d'espace vectoriel E sur un corps commutatif K est défini p. 41 (voir aussi p. 87). On prend ici pour K les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que l'on note alors $\mathbb{K}$. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sont des exemples d'espaces vectoriels ainsi que les espaces $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) des suites réelles (resp. complexes), sur lesquels on définit l'addition et la multiplication par un scalaire. Un autre exemple d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est constitué de l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. La somme de deux éléments f et g est définie par $\forall t \in [a, b]$, $(f+g)(t) := f(t) + g(t)$, le produit de f par un scalaire α par $\forall t \in [a, b]$, $(\alpha f)(t) := \alpha\big(f(t)\big)$. Cet espace est noté $C^0\,[a, b]$.

La notion de *base algébrique* d'un espace vectoriel est définie en déf. 8 p. 87. La *dimension* (déf. 10 p. 87) peut s'étendre à un espace quelconque si on la définit comme étant le *cardinal* d'une base. Si cette dimension est un cardinal infini, l'espace est dit de *dimension infinie* (ex. : ill. B).

Une application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ (voir p. 89) est appelée *forme linéaire* sur E. L'espace des formes linéaires sur E est un espace vectoriel appelé l'espace dual de E et noté E^* (ou $\mathfrak{L}(E, \mathbb{K})$ voir déf. 12 p. 89).

Espaces normés

Pour pouvoir utiliser les méthodes de l'analyse dans un espace vectoriel, celui-ci doit être muni d'une structure topologique. Les espaces normés sont un exemple important de tels espaces vectoriels.

Déf. 1 : $(E, \|\ \|)$ est appelé *espace vectoriel normé* si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et si on a défini sur E une *norme*, c.-à-d. une fonction $\|\ \| : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(N1) $\|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$,

(N2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, \|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$,

(N3) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

On peut alors, à l'aide de la norme, définir une distance $d_N(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Les espaces normés sont donc des espaces métriques (voir p. 217), dans lesquels on peut définir la continuité et la compacité à l'aide de suites.

Exemples :

(1) Dans $\mathbb{R}$, la valeur absolue est une norme.

(2) L'espace $\mathbb{R}^n$ peut être muni de différentes normes. Parmi les plus importantes, on trouve :

$\|\vec{x}\|_\infty := \sup\big(\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\big)$, $\|\vec{x}\|_1 := \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|$,

$\|\vec{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2}$ $\big(\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)\big)$. $\|\ \|_2$ est appelée *norme euclidienne*.

(3) L'espace $C^0\,[a, b]$ introduit plus haut peut par ex. être normé par $\|f\|_\infty := \sup\big(\{|f(t)| \mid t \in [a, b]\}\big)$ (*norme de la convergence uniforme*).

(4) L'espace vectoriel de toutes les suites bornées à valeurs réelles (x_ν) peut être normé par $\|(x_\nu)\| := \sup\big(\{|x_\nu| \mid \nu \in \mathbb{N}\}\big)$.

Espaces préhilbertiens

Dans $\mathbb{R}^n$, on peut introduire la *norme euclidienne* $\|\ \|_2$ à l'aide du produit scalaire par $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$. De manière générale, on définit :

Déf. 2 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
$\langle\, ,\, \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ est appelé produit scalaire s'il vérifie :

(S1) $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}$,

(S2) $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in E, \langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle$,

(S3) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\alpha}\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

(S4) $\forall\, \vec{x} \neq \vec{0}, \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

(On rappelle que $\overline{\alpha}$ désigne le complexe conjugué de α, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Th. 1 : *Dans tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire, on peut définir une norme par*
$\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$.

La démonstration en est évidente, sauf pour la vérification de (N3), qui se fait comme suit pour $\vec{y} \neq \vec{0}$:

$\langle \vec{x} + \alpha\vec{y}, \vec{x} + \alpha\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} + \alpha\vec{y} \rangle + \langle \alpha\vec{y}, \vec{x} + \alpha\vec{y} \rangle$

$= \overline{\langle \vec{x} + \alpha\vec{y}, \vec{x} \rangle} + \overline{\alpha}\,\overline{\langle \vec{x} + \alpha\vec{y}, \vec{y} \rangle}$

$= \overline{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} + \alpha\overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle} + \overline{\alpha}\,\overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} + \alpha\overline{\alpha}\,\overline{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}$

$= \|\vec{x}\|^2 + \alpha\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \overline{\alpha}\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \alpha\overline{\alpha}\|\vec{y}\|^2 \geq 0$

Si on choisit $\alpha = -\dfrac{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}$, les deuxième et quatrième termes s'éliminent, et on obtient $\|\vec{x}\|^2 - \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}$, soit

$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2$, relation encore valable pour $\vec{y} = \vec{0}$.

Cette dernière inégalité est l'*inégalité de* CAUCHY-SCHWARZ. On en déduit :

$$\begin{aligned}\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| + |\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle| + \|\vec{y}\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| + |\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle| + \|\vec{y}\|^2 \\ &\leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2\end{aligned}$$

donc que (N3) est bien vérifiée.

Déf. 3 : Un espace muni d'un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien*. C'est un espace normé, dont la norme est définie à l'aide du produit scalaire.

Ex. : $\mathbb{C}^n$ avec $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{x}_\nu\, y_\nu$.

Espaces de Banach et espaces de Hilbert

Dans un espace normé, on peut définir la convergence d'une suite. $\vec{x} \in E$ est alors appelé *limite* de la suite $(\vec{x}_n)$ si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\vec{x} - \vec{x}_n\| < \varepsilon$ dès que $n \geq n_0$. On peut également définir des suites de Cauchy (voir p. 61), caractérisées par la propriété : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\| < \varepsilon$ dès que $n \geq n_1$ et $m \geq n_1$. Toute suite convergente est une suite de Cauchy, mais la réciproque n'est pas vraie dans n'importe quel espace normé. Cependant, à l'aide du procédé de Cantor décrit p. 61, on peut, à partir de n'importe quel espace normé, construire un espace complet qui soit son adhérence (au sens de la topologie de l'espace ainsi construit).

Déf. 4 : Un espace vectoriel normé complet (c.-à-d. un espace normé dans lequel toute suite de Cauchy converge) est appelé *espace de* Banach ; un espace préhilbertien complet (pour la norme associée au produit scalaire) est appelé *espace de* Hilbert.

L'espace $C^0[a, b]$ muni de la norme de la convergence uniforme (voir p. 365) est complet, donc est un espace de Banach. En effet, si (f_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $C^0[a, b]$ et si $t \in [a, b]$, $(f_n(t))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, qui converge donc vers une limite notée $f(t)$, puisque $\mathbb{R}$ est complet. La fonction définie par $t \mapsto f(t)$ est alors la limite uniforme de (f_n) sur $[a, b]$ car $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [a, b]$,

$|f(t) - f_j(t)| = \lim_{k \to \infty} |f_k(t) - f_j(t)| \leq \sup_{k \geq j} \|f_j - f_k\|_\infty$, donc

$\|f - f_j\|_\infty$ existe et est majorée par $\sup_{k \geq j} \|f_j - f_k\|_\infty$, expression qui tend vers 0 lorsque j tend vers l'infini. D'après le th. 16 p. 289, f est alors continue, donc élément de $C^0[a, b]$.

L'espace de l'ex. (4) p.365 est aussi un espace de Banach, $\mathbb{R}^\infty$ (tab. C p. 364) est un espace de Hilbert.

Espaces $C^n[a, b]$

Au-delà de $C^0[a, b]$, on peut construire des espaces de Banach dont les éléments sont les fonctions sur $[a, b]$, et dont on exige non seulement la continuité, mais aussi une certaine différentiabilité.

Déf. 5 : L'espace des fonctions f sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles, n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) fois continûment différentiables, muni de l'addition interne et de la multiplication externe par un élément de $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ que l'on peut normer par $\|f\|_n := \sup\left(\{\|f^{(k)}\|_0 \mid k \in \{0, 1, \ldots, n\}\}\right)$. Il est noté $C^n[a, b]$ ($f^{(k)}$ désigne la k-ième dérivée de f).

Th. 2 : *Les espaces $C^n[a, b]$ sont des espaces de* Banach.

Espace $L^p[a, b]$

Déf. 6 : L'espace des fonctions f sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ dont, pour $p \in \mathbb{R}_+^*$ donné, l'intégrale de Lebesgue $\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t$ existe, muni des opérations précédentes, est noté $\mathcal{L}^p[a, b]$.

$\mathcal{L}^p[a, b]$ est un espace vectoriel. On peut définir la fonction à valeurs réelles positives $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$, mais ce n'est pas une norme, car $\|f\|_p = 0$ pour toute fonction f nulle presque partout (voir p. 361), et donc non nécessairement nulle partout. Soit F le sous-ensemble de $\mathcal{L}^p[a, b]$ formé des fonctions nulles presque partout. F est un sous-espace vectoriel .

Th. 3 : *L'espace quotient $L^p[a, b] := \mathcal{L}^p[a, b] / F$ est un espace de* Banach *si $p \in \mathbb{R}_+^* \setminus]0, 1[$.*

La norme de $L^p[a, b]$ est également notée $\|\ \|_p$. On a $\|[\![f]\!]\|_p = \|f\|_p$. Prouver que $\|\ \|_p$ est bien une norme et que l'espace est bien complet est difficile.

Si $p \in]0, 1[$, les espaces ne sont plus complets.

L'espace particulier $L^2[a, b]$ est en outre un espace de Hilbert. Si f_1, f_2 sont des représentants de deux classes d'équivalence de $L^2[a, b]$, on peut montrer qu'il est possible de définir un produit scalaire par

$\langle [\![f_1]\!], [\![f_2]\!] \rangle := \int_a^b \overline{f_1(t)}\, f_2(t) \mathrm{d}t$, car cette expression est indépendante du choix de f_1 et f_2, puis une norme par $\|[\![f]\!]\|_2 := \sqrt{\langle [\![f]\!], [\![f]\!] \rangle}$.

L'espace $L^\infty[a, b]$

Déf. 7 : Soit $f\,[a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction mesurable (voir p. 361). $c \in \mathbb{R}_+$ est dite *borne essentielle* de f si $|f(t)| \leq c$ presque partout.

Déf. 8 : L'ensemble de toutes les fonctions définies sur $[a, b]$, essentiellement bornées, muni des opérations usuelles est noté $\mathcal{L}^\infty[a, b]$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

On définit alors $\|f\|_\infty$ comme la borne inférieure de toutes les bornes essentielles de f. Comme pour les espaces $\mathcal{L}^p[a, b]$, on n'obtient pas une norme, et il est nécessaire de considérer l'espace quotient par le sous-espace vectoriel F des fonctions nulles presque partout, dont la norme sera également notée $\|\ \|_\infty$.

Th. 4 : *L'espace quotient $L^\infty[a, b] := \mathcal{L}^\infty[a, b] / F$ est un espace de* Banach.

On a les relations suivantes, entre les différents espaces construits ci-dessus : $\forall p, q \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tels que $1 \leq p < q \leq \infty$ et $\forall n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$

$C^m[a, b] \subset C^n[a, b] \subset L^q[a, b] \subset L^p[a, b]$.

$C^0[a, b]$ admet une base topologique dénombrable (ill. B p. 364), mais il n'en est pas de même pour $L^\infty[a, b]$ et l'espace de l'exemple (4). La dimension infinie de ces espaces entraîne un comportement fondamentalement différent de celui des espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ utilisés en analyse réelle ou complexe. Par ex., un théorème de Banach affirme qu'un espace de Banach est localement compact (voir p. 229) si, et seulement si, il est de dimension finie. Comme les propriétés de compacité sont très utilisées en analyse réelle ou complexe, on comprend que l'analyse dans les espaces de Banach décrits ci-dessus soit plus compliquée.

Opérateurs linéaires bornés

Les espaces de Banach étant des espaces vectoriels, on peut définir une application linéaire d'un espace de Banach dans une autre (même corps de base $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Déf. 1 : Une application linéaire $F : B_1 \to B_2$ (B_1 et B_2 étant deux espaces de Banach) est appelée *opérateur linéaire*. F est dit *borné* s'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall \vec{x} \in B_1$, $\|F(\vec{x})\| \leqslant c\|\vec{x}\|$. L'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de B_1 dans B_2 muni des opérations usuelles (voir p. 366) sera noté dans la suite $[B_1, B_2]$.
$[B_1, B_2]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). À tout $F \in [B_1, B_2]$ on peut associer $\|F\| := \inf(\{c \mid c \text{ borne de } F\})$. On définit ainsi une norme (déf. 1 p. 365) et $[B_1, B_2]$ est alors un espace normé. On peut prouver que c'est un espace de Banach. De plus, $[B_1, B_2]$ s'identifie à l'ensemble des applications linéaires continues de B_1 dans B_2.

Opérateurs différentiables

Déf. 2 : Toute application $F : D_F \to B_2$, où $D_F \subseteq B_1$ (B_1 et B_2 étant deux espaces de Banach) est appelée *opérateur*.

Cette définition inclut évidement les opérateurs linéaires (déf. 1). Comme avec les fonctions réelles, on peut alors distinguer, à l'aide d'une définition convenable, les opérateurs différentiables. De manière analogue à la déf. 5 p. 323, on pose :

Déf. 3 : Un opérateur $F : D_F \to B_2$, où $D_F \subseteq B_1$ est dit *différentiable* au point $\vec{a} \in D_F$ si $\vec{a}$ appartient à l'intérieur de D_F et s'il existe un opérateur linéaire borné $\frac{\delta F}{\delta \vec{x}}(\vec{a}) \in [B_1, B_2]$ tel que l'on ait, si $\vec{a} + \vec{h} \in D_F$:

$$\lim_{\|\vec{h}\| \to 0} \frac{\left\|F(\vec{a} + \vec{h}) - F(\vec{a}) - \frac{\delta F}{\delta \vec{x}}(\vec{a})(\vec{h})\right\|}{\|\vec{h}\|} = 0 .$$

La norme au numérateur est celle de B_2, celle au dénominateur est celle de B_1. Si $\frac{\delta F}{\delta \vec{x}}(\vec{a})$ existe, il est unique.

Différentielle de Fréchet

Soit $D_{F'}$ l'ensemble de tous les points de D_F où F est différentiable. On peut alors considérer $\frac{\delta F}{\delta \vec{x}}(\vec{a})$ comme la valeur prise en $\vec{a} \in D_F$ par un opérateur $\frac{\delta F}{\delta \vec{x}} : D_{F'} \to [B_1, B_2]$.

$\frac{\delta F}{\delta \vec{x}}$ est appelé *différentielle de* Fréchet (ou *dérivée variationnelle*) de F. $\frac{\delta F}{\delta \vec{x}}(\vec{a})$ est appelée *différentielle de* Fréchet de F en $\vec{a}$.

Rem. 1 : Si $F : B_1 \to B_2$ est linéaire et borné, on a $F(\vec{a} + \vec{h}) - F(\vec{a}) = F(\vec{h})$ soit $\frac{\delta F}{\delta \vec{x}}(\vec{a}) = F$ pour tout $\vec{a} \in B_1$. $\frac{\delta F}{\delta \vec{x}}$ est donc constant.

Il est facile de démontrer qu'un opérateur différentiable en un point est continu en ce point. La réciproque n'est pas vraie. Les règles de différentiation pour la différentielle de Fréchet sont semblables à celles relatives aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. En particulier, la règle de différentiation des opérateurs composés est analogue à celle du th. 4 p. 323. L'opérateur $\frac{\delta F}{\delta \vec{x}}$ peut être lui-même différentiable. Sa différentielle de Fréchet est notée $\frac{\delta^2 F}{\delta \vec{x}^2}$. De même, on peut construire des différentielles d'ordre supérieur.

Rem. 2 : Si l'application $\vec{x} \mapsto \frac{\delta F}{\delta \vec{x}}$ de $D_{F'}$ dans l'espace de Banach $[B_1, B_2]$ est continue, on dit que F est continûment différentiable sur $D_{F'}$.

Opérateurs inversibles

Si B_1 et B_2 sont identiques, on peut se poser le problème de l'*inversibilité d'un opérateur*, comme pour les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (voir p. 323). Pour qu'un opérateur F continûment différentiable sur un ouvert $\Omega \subset B_1$, à valeurs dans B_1, soit localement inversible autour de $\vec{a} \in B_1$, il est nécessaire et suffisant que $\frac{\delta F}{\delta \vec{x}}(\vec{a})$ soit inversible dans $[B_1, B_2]$. Le problème de l'inversibilité d'un opérateur différentiable donné se ramène ainsi à celui, plus facile, de l'inversibilité d'un opérateur linéaire borné.

Différentielle de Gateaux

Il suffit souvent, pour un opérateur F, de considérer, $\lim_{\lambda \to 0} \frac{F(\vec{a} + \lambda\vec{h}) - F(\vec{a})}{\lambda}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ($\vec{a}$ et $\vec{h}$ fixés). Si cette limite existe pour tout $\vec{h}$ et est linéaire en $\vec{h}$, on la note $\frac{\partial F}{\partial \vec{x}}(\vec{a})(\vec{h})$: on appelle l'opérateur linéaire $\frac{\partial F}{\partial \vec{x}}(\vec{a})$ la différentielle de Gateaux de F en $\vec{a}$.

Si F est différentiable, alors la différentielle de Gateaux existe également. Réciproquement, l'existence de la différentielle de Gateaux n'est pas suffisante pour démontrer la différentiabilité. Il faut exiger en plus sa continuité en $\vec{h}$ et la convergence uniforme, lorsque $\lambda \to 0$, de $\frac{F(\vec{a} + \lambda\vec{h}) - F(\vec{a})}{\lambda}$ sur la sphère unité $\|\vec{h}\| = 1$.

Théorèmes de point fixe

Soit un opérateur F appliquant un espace de Banach B dans lui-même. Pour l'analyse fonctionnelle, et notamment les problèmes d'approximation, l'existence d'au moins un point fixe $\vec{x}_0$ sous F ($F(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$) est importante. Les *théorèmes de point fixe* assurent, sous certaines conditions, son existence. On a notamment le

Théorème du point fixe de Banach :
Soit $F : B \to B$ un opérateur (B espace de Banach*). S'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in B$, $\|F(\vec{x}_2) - F(\vec{x}_1)\| \leq c\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|$, F possède un, et un seul, point fixe $\vec{x}_0$.*

Pour le démontrer, on choisit un $\vec{x}_1 \in D$ fixé, et on construit par récurrence une suite $\vec{x}_{n+1} := F(\vec{x}_n)$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). On montre alors que pour $n \geq 2$
$\|\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n\| = \|F(\vec{x}_n) - F(\vec{x}_{n-1})\| \leq c^{n-1} \cdot \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|$, puis, en appliquant plusieurs fois l'inégalité triangulaire, et en comparant à une suite géométrique :

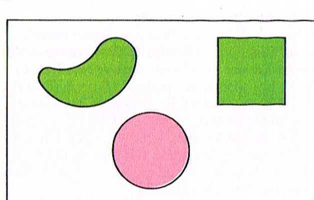
$\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\| \leq c^{n-1} \frac{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|}{1 - c}$ pour tout $m > n$. $(\vec{x}_n)$ est donc une suite de Cauchy : elle converge donc dans l'espace de Banach B et on vérifie que la limite est un point fixe. La démonstration de l'unicité de ce point fixe est alors aisée.

Problème : Trouver la trajectoire (sans frottement) qu'il faut imposer dans un plan vertical à un point pesant pour aller d'un point A à un point B dans un temps minimal.

Solution : arc de cycloïde

A

Brachistochrone

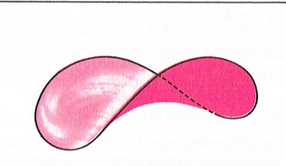


Problème : déterminer dans le plan la forme que doit avoir une courbe fermée de longueur donnée pour qu'elle contienne la plus grande aire possible.

Solution : cercle

B

Problème de l'isopérimètre

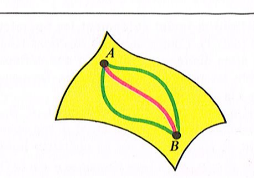


Problème : une courbe fermée étant donnée dans l'espace, déterminer la surface d'aire minimale qui s'appuie sur elle.

Solution : surface à courbure moyenne nulle (page 415)

C

Surface minimale

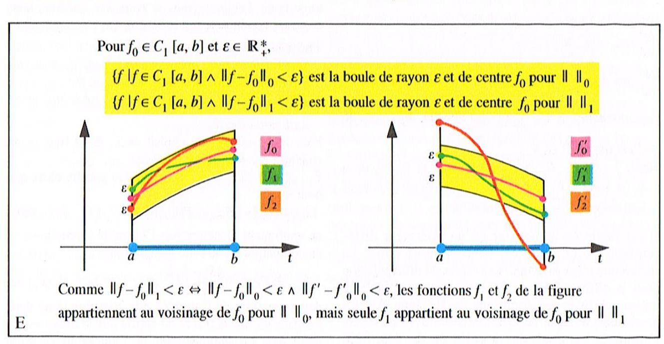


Problème : trouver le chemin le plus court entre deux point A et B d'une surface donnée.

Solution : courbe pour laquelle en tout point, la normale principale s'identifie à la normale à la surface

D

Géodésiques



Voisinages pour les normes $\|\ \|_0$ et $\|\ \|_1$ dans $C_1\,[a, b]$ (déf. 5, p. 366).

L'analyse fonctionnelle est utilisée pour résoudre les problèmes les plus divers en mathématiques appliquées. Ainsi les problèmes d'approximation de fonctions traités en p. 313 se ramènent-ils plus généralement à des problèmes de convergence dans les espaces de BANACH $C_0\,[a, b]$ ou $L^2\,[a, b]$.

Le *calcul des variations* traite des problèmes d'extremum pour des fonctions définies sur des espaces de BANACH.

Exemples de problèmes variationnels

a) Le problème de la *brachistochrone*, déjà évoqué en p. 365 : on cherche la courbe d'un plan vertical sur laquelle un corps se mouvant sans frottement sous l'effet de la pesanteur va d'un point $A\,(a, c)$ à un autre point $B\,(b, d)$ en le minimum de temps (fig. A). Si cette courbe peut être représentée par une fonction continûment dérivable $f \in C_1\,[a, b]$ telle que $f(a) = c$ et $f(b) = d$, alors la vitesse du mobile est, à chaque instant t, $v(t) = \sqrt{2g[c - f(x(t))]}$ où g est l'intensité de la pesanteur et $x(t)$ l'abscisse du mobile (conservation de l'énergie). La distance parcourue entre les abscisses x et $x + dx$ étant $dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$, le temps total pour aller de A à B est

$$T(f) = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{2g[c - f(x)]}}\,dx \quad .$$

Il faut minimiser cette quantité pour $f \in C_1\,[a, b]$.

b) Un problème encore plus ancien est le problème de l'*isopérimètre*. On se donne un réel l et on cherche quelle est la courbe plane fermée de longueur l continûment différentiable par morceaux contenant la plus grande aire (fig. B). Si l'on choisit de représenter la courbe par le paramétrage $(k_1(t), k_2(t))$ avec $t \in [0, 2\pi]$ (cf. p. 403), on montre qu'il faut « maximiser »,

$$A(k_1, k_2) = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} (k_1(t) \cdot k'_2(t) - k_2(t) \cdot k'_1(t))\,dt\right|$$ sous la condition $$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(k'_1(t))^2 + (k'_2(t))^2}\,dt$$ (cf. p. 349).

c) Le problème de la *surface minimale* consiste à chercher, parmi toutes les surfaces de l'espace ayant un bord donné, celle qui a l'aire la plus faible. Si l'on se limite à des surfaces paramétrables par $f(t_1, t_2)$ où $(t_1, t_2) \in G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et f est continûment différentiable sur G, on cherche à minimiser

$$A(f) = \int_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1, t_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t_2}(t_1, t_2)\right)^2}\,dt_1\,dt_2$$

On remarquera que la solution peut être visualisée facilement car c'est la forme que prend une bulle de savon s'appuyant sur un cadre en fil métallique (minimisation de l'énergie de surface) (fig. C).

d) Un autre problème est encore la détermination du plus court chemin entre deux points A et B sur une surface donnée (*géodésique*, p. 411) (cf. fig. D).

Équation différentielle d'EULER

Tous ces exemples se ramènent au problème de la recherche des extrema d'une fonctionnelle $I(f) = \int_a^b L(t, f(t), f'(t))\,dt$. S'il y a des contraintes on peut toujours, grâce aux multiplicateurs de LAGRANGE (p. 327), se ramener à un problème sans contraintes. L'idée consiste alors à se ramener à une éq. dif. du second ordre ; voici les grandes lignes du raisonnement.

Pour que f_0 soit une fonction telle que $I(f_0)$ soit extremum, il est nécessaire que la dérivée de GATEAUX de la fonctionnelle $f \mapsto I(f)$ s'annule $\left(\forall h, \frac{\partial I}{\partial f}(f_0)(h) = 0\right)$ (p. 367). On dit aussi que la *variation première* de la fonctionnelle doit être nulle. On considère $f_0 + \lambda h$ (avec $h(a) = h(b) = 0$) qui approche f_0 quand $\lambda \to 0$, $f_0 + \lambda h$ étant dans l'espace des fonctions considérées.

Alors $\frac{\partial I}{\partial f}(f_0)(h)$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \int_a^b \frac{L(t, f_0(t) + \lambda h(t), f'_0(t) + \lambda h'(t)) - L(t, f_0(t), f'_0(t))}{\lambda}\,dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f}(t, f_0(t), f'_0(t))\,h(t) + \frac{\partial L}{\partial f'}(t, f_0(t), f'_0(t))\,h'(t)\right)dt = 0$$

En intégrant par parties, on obtient alors :

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f}(t, f_0(t), f'_0(t))\,h(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial f'}(t, f_0(t), f'_0(t))\,h(t)\right)dt + \left[\frac{\partial L}{\partial f'}(t, f_0(t), f'_0(t))\,h(t)\right]_a^b = 0 \,.$$

Le dernier terme de cette somme est nul à cause de la condition $h(a) = h(b) = 0$.

L'int. est nulle lorsque $\frac{\partial L}{\partial f}(t, f, f') - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial f'}(t, f, f') = 0$ pour $f = f_0$.

En développant la dérivée par rapport à t, on obtient l'*équation différentielle d'*EULER

$$\left(\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial^2 L}{\partial t\,\partial f'} - f'\,\frac{\partial^2 L}{\partial f\,\partial f'} - f''\,\frac{\partial^2 L}{(\partial f')^2}\right)(t, f, f') = 0 \,.$$

Dans le cas de la brachistochrone (ex. a), cette équation s'écrit $1 + (f')^2 - 2\,(c - f)\,f'' = 0$. Les solutions en sont des arcs de cycloïde, paramétrés par $t = a + r\,(\alpha - \sin \alpha)$, $f(t) = c - r\,(1 - \cos \alpha)$ où r est une constante déterminée par la condition $f(b) = d$.

Pour avoir une condition suffisante « d'extrémalité », il faudrait utiliser la dérivée seconde de GATEAUX.

Extrema forts et faibles

On peut raffiner cette notion d'extremum, en distinguant extrema forts et extrema faibles. On dit qu'une fonctionnelle I définie sur une partie D de $C_1\,[a, b]$ admet un minimum fort en f_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $I(f) \geq I(f_0)$ pour tout $f \in D$ satisfaisant à $\|f - f_0\|_0 < \varepsilon$. Le minimum est faible si cela ne s'applique qu'à $f \in D$ telle que $\|f - f_0\|_1 < \varepsilon$. De même pour la déf. des maxima. Une boule de rayon $\varepsilon > 0$ pour la norme $\|\ \|_0$ comprend plus d'éléments que la boule de même rayon pour $\|\ \|_1$ (ill. E). La topologie associée à $\|\ \|_0$ est donc moins fine que celle associée à $\|\ \|_1$ (p. 215). Tout extremum fort est donc faible, la réciproque étant fausse.

Soit la fonction Φ à la valeurs réelles ou complexes, définie sur $[a, b]^2$, telle que les intégrales suivantes existent

$$(L) \int_a^b |\Phi(s,t)|^2 \, ds \text{ pour tout } t \in [a, b] \qquad (L) \int_a^b |\Phi(s,t)|^2 \, dt \text{ pour tout } s \in [a, b]$$

Soit $f \in L^2 [a, b]$. Alors $(L) \int_a^b \Phi(s,t) f(t) \, dt$ existe pour tout $s \in [a, b]$. On peut donc définir une fonction

K de $L^2 [a, b] \to L^2 [a, b]$ telle que $K(f)(s) = (L) \int_a^b \Phi(s,t) f(t) \, dt$.

L'opérateur intégral K est linéaire et borné.

A_1

Les équations intégrales usuelles sont de la forme $g \cdot x = h + \lambda K(x)$ avec $g, h, x \in L^2 [a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, K opérateur intégral défini en A_1.

Selon le choix des fonctions g et h on distingue plusieurs types d'équations intégrales :

$0 = h + \lambda K(x)$	équation intégrale de première espèce
$x = \lambda K(x)$	équation intégrale homogène de seconde espèce
$x = h + \lambda K(x)$, $h \neq 0$	équation intégrale non homogène de seconde espèce
$g \cdot x = h + \lambda K(x)$, g non constante	équation intégrale de troisième espèce

A_2

Opérateurs intégraux, équations intégrales et classification des équations intégrales

Dans le cas particulier où le noyau de l'opérateur intégral est $\Phi(s, t) = st$, on peut résoudre facilement les équations intégrales de première et de seconde espèce.

Équation intégrale de première espèce : $0 = h(s) + \lambda s \int_a^b t\, x(t) \, dt$.

Cette équation n'est évidemment possible que si h est linéaire ($h(s) = c\, s$). Il existe alors une infinité de fonctions $t \to x(t)$ telles que :

$$\int_a^b t\, x(t) \, dt = -\frac{c}{\lambda}.$$

(On prend une fonction arbitraire $t \to x_0(t)$, on calcule $\int_a^b t x_0(t) \, dt$ et l'on cherche $x(t) = u\, x_0(t)$ qui convienne. La discussion est immédiate).

Équation intégrale homogène de deuxième espèce : $x(s) = \lambda s \int_a^b t\, x(t) \, dt$.

Dans ce cas, les solutions x doivent être linéaires $x(s) = c\, s$.

Alors $cs = \lambda s \int_a^b ct^2 dt = \lambda sc \dfrac{b^3 - a^3}{3}$

On pose $\lambda_1 = \dfrac{3}{b^3 - a^3}$. Si λ est $\neq \lambda_1$, la seule solution est $x = 0$.

Si $\lambda = \lambda_1$, $x(s) = c\, s$ convient pour tout c (sous-espèce propre de solutions).

Équation intégrale non homogène de seconde espèce : $x(s) = h(s) + \lambda s \int_a^b t\, x(t) \, dt$.

L'écriture de l'équation montre que si x existe, $x(s) = h(s) + c\, s$.
alors il vient successivement :

$$h(s) + cs = h(s) + \lambda s \int_a^b (th(t) + ct^2) \, dt,$$

$$cs = \lambda s \int_a^b th(t) \, dt + \lambda sc \cdot \frac{b^3 - a^3}{3},$$

$$c\left(1 - \lambda \frac{b^3 - a^3}{3}\right) = \lambda \int_a^b th(t) \, dt.$$

Pour $\lambda \neq \lambda_1$, c est déterminé de façon unique. D'où x.

Si $\lambda = \lambda_1$ et si $\int_a^b t\, h(t) \, dt = 0$, c est arbitraire. Si $\lambda = \lambda_1$ et si $\int_a^b t\, h(t) \, dt \neq 0$, il n'y a pas de solution.

B

Équations intégrales de noyau $\Phi(s, t) = st$

Opérateurs différentiels et intégraux

D'autres applications de l'analyse fonctionnelle reposent sur le fait que la différentiation et l'intégration d'une fonction f peuvent être interprétées comme des opérateurs linéaires appliqués à celle-ci.

On définit ainsi l'opérateur différentiel $\mathbf{D} : C_1 [a, b] \to C_0 [a, b]$ par $\mathbf{D}(f) = f'$. La linéarité de $\mathbf{D}$ découle de la linéarité de la dérivation. On notera que l'opérateur $\mathbf{D}$ n'est pas borné (prendre par exemple $f(x) = \sin nx$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$).

De même, on définit des opérateurs intégraux K qui transforment une fonction f en une fonction $K(f)$ par intégration. Soit $\Phi : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue : on peut alors définir un opérateur intégral $K : C_0 [a, b] \to C_0 [a, b]$ par

$K(f)(s) = \int_a^b \Phi(s, t) \cdot f(t) \, dt$. Cet opérateur manifestement linéaire est borné. En effet,

$$|K(f)(s)| \leq |b - a| \cdot \sup_{(s,t) \in [a,b]^2} |\Phi(s, t)| \cdot \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|,$$

soit $\|K(f)\|_0 \leq |b - a| \cdot \sup_{(s,t) \in [a,b]^2} |\Phi(s, t)| \cdot \|f\|_0$.

On en déduit donc que $\|K\|_0$ existe et que $\|K\|_0 \leq |b - a| \cdot \sup_{(s,t) \in [a,b]^2} |\Phi(s, t)|$.

Si L est un opérateur linéaire de l'espace fonctionnel E dans lui-même, le scalaire μ est dit valeur propre de L si le sous-espace fonctionnel $F_\mu = \{f \in E | L(f) = \mu f\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Dans ce cas F_μ est appelé *sous-espace propre* correspondant à μ, et les éléments de $F_\mu \setminus \{0\}$ « vecteurs propres » associés à μ. Par ex. tout réel r est valeur propre de l'opérateur $\mathbf{D}$, car si $f(x) = e^{rx}$, $\mathrm{D}(f) = rf$.

En revanche si $K(f)(s) = \int_a^b stf(t) \, dt$,

K admet $\frac{1}{3}(b^3 - a^3)$ pour seule valeur propre (tab. B).

La fonction Φ précédemment introduite pour définir une opérateur intégral K s'appelle *noyau* de K. En prenant des fonctions continues à variables réelles mais à valeurs complexes, on peut introduire des opérateurs intégraux remarquables si l'on impose la condition supplémentaire $\Phi(s, t) = \overline{\Phi(t, s)}$ pour tous $(s, t) \in [a, b]^2$: il s'agit des opérateurs intégraux *hermitiens*. L'ensemble $C_0([a, b], \mathbb{C})$ des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs complexes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel que l'on peut munir du produit scalaire hermitien

$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t) \, dt$, la norme hermitienne pour une fonction continue étant $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ (p. 365).

On a les résultats suivants :

L'ensemble P des valeurs propres d'un opérateur intégral hermitien K est toujours non vide, fini ou dénombrable, borné par $\|K\|_0$. Toute valeur propre μ est réelle, et si $\mu \neq 0$, le sous-espace propre correspondant est de dimension finie. Si f_1 et f_2 sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres μ_1 et μ_2, $\mu_1 \neq \mu_2$, alors $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_2, f_1 \rangle = 0$. Les sous-espaces propres sont donc orthogonaux deux à deux. Enfin, si P est dénombrable, son seul point d'accumulation est 0, donc les éléments de P constituent une suite (μ_n) tendant vers 0.

Équations intégrales

L'équation intégrale la plus simple est $K(x) - h = 0$ où h est une fonction donnée, et x une fonction inconnue. Si l'on introduit les espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, K$, espace image de K, et $\mathrm{Ker}\, K$, noyau vectoriel de K ($f \in \mathrm{Ker}\, K \Leftrightarrow K(f) = 0$), les solutions de cette équation, sous réserve évidemment que $h \in \mathrm{Im}\, K$, constituent un sous-espace affine (p. 204) d'écriture $x_0 + \mathrm{Ker}\, K$ où x_0 est une solution particulière de l'équation.

On envisage plus généralement des équations de la forme $g \cdot x - h - \lambda K(x) = 0$ où g et h sont des fonctions données, λ étant un scalaire fixé non nul. Le cas ($g = 0$, $\lambda = -1$) vient d'être abordé. Le tableau A_2 donne la terminologie employée.

Équations intégrales de seconde espèce

$$x = h + \lambda K(x) \quad \textbf{(2)}$$

Pour $h = 0$, il s'agit de l'équation de définition d'un vecteur propre relatif à une valeur propre non nulle. Si $\frac{1}{\lambda}$ n'est pas valeur propre, $x = 0$; si $\frac{1}{\lambda}$ est la valeur propre μ, x est un élément quelconque du sous-espace propre F_μ correspondant. Pour $h \neq 0$, on peut énoncer l'important **théorème (Fredholm) :**

I. Si $\frac{1}{\lambda}$ n'est pas valeur propre, l'équation admet une solution et une seule.

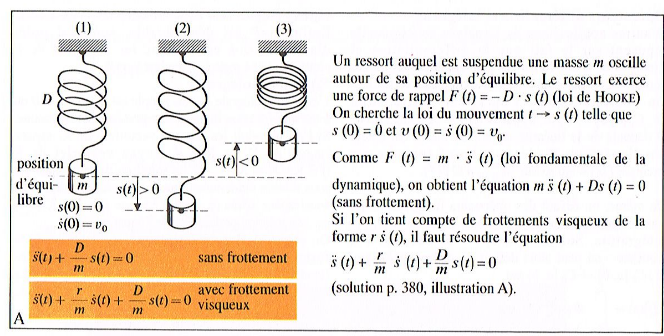
II. Si $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre, l'équation n'admet de solution que si h est orthogonale au sous-espace propre F_μ ($\mu = \frac{1}{\lambda}$). Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (2) est un sous-espace affine, $x_0 + F_\mu$, x_0 désignant une solution particulière.

Ex. traité : tab. B, $\Phi(s, t) = st$.

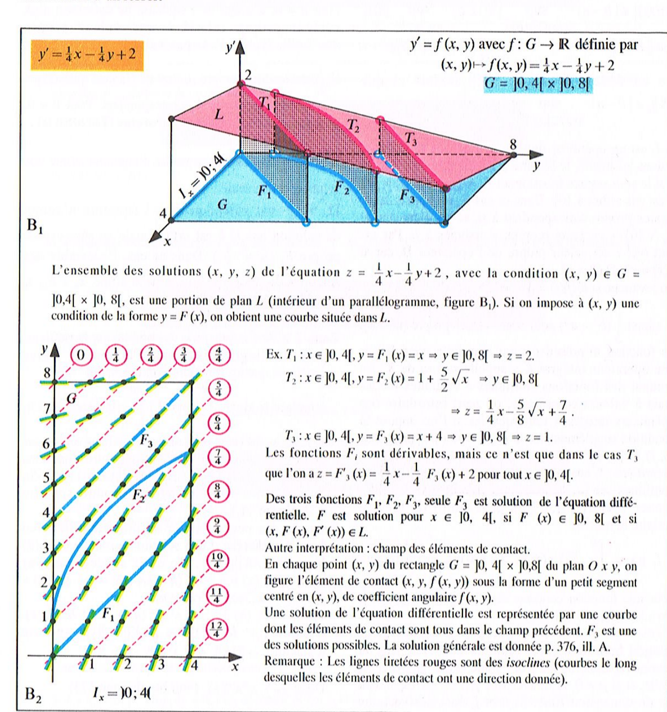
Rem. 1 : Vu l'importance des opérateurs hermitiens, on peut élargir leur champ d'action à d'autres fonctions que les fonctions continues. On remplace le signe $\int_a^b$ par $(L) \int_a^b$ (intégrale de Lebesgue, p. 360 sqq.) et l'on prend Φ dans une classe de l'espace quotient $L^2([a, b]^2)$, les autres fonctions étant prises dans des classes de $L^2([a, b])$ (p. 366). Les résultats sont analogues (produit scalaire p. 366) (tab. A_1).

Rem. 2 : On peut proposer un procédé d'itération pour la recherche d'une solution particulière de (2) lorsque $\|\lambda K\|_0 < 1$. On écrit successivement $x = h + \lambda K(x) = h + \lambda K(h + \lambda K(x)) = h + \lambda K(h) + \lambda^2 K^2(x)$ etc., soit à l'ordre n,
$x = h + \lambda K(h) + \ldots + \lambda^n K^n(h) + \lambda^{n+1} K^{n+1}(x)$.
Comme $\|\lambda^n K^n(x)\|_0 \leq \|\lambda K\|^n_0 \|x\|_0$ (norme d'algèbre), et $\|\lambda K\|_0 < 1$, $\lambda^n K^n(x) \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

Donc $x = \sum_0^\infty \lambda^n K^n(h)$ (voir bas de page 373).



Mouvement d'un ressort



Interprétation de la résolution d'une équation différentielle

Les éq. dif. jouent un rôle important en mathématiques pures et en mathématiques appliquées. Elles servent aux scientifiques et aux techniciens pour décrire certains problèmes dans un langage mathématique puis pour les résoudre. Cela est vrai en particulier dans le domaine de la physique (fig. A).
Voici quelques exemples d'éq. dif. :

$$y' = \frac{x}{2},\ y' = x(y-2),\ y' = \frac{x+2y}{x},\ y' = \frac{x-y+4}{2},$$
$$y'' + 2xy' - y = \cos 2x.$$

Concept d'équation différentielle

Dans tous les exemples ci-dessus, les éq. dif. proposées sont sous la forme $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$ où f est une fonction définie sur un domaine de $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si l'on considérait cette éq. comme une équation à $n + 2$ inconnues, les solutions constitueraient un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+2}$.
Dans le cadre de la théorie des éq. dif., on s'intéresse à une partie T de ce sous-ensemble, dont les éléments satisfont à :

[I] *Les couples (x, y) définissent une fonction F n fois dérivable définie sur un intervalle I_x, $F : I_x \to \mathbb{R}$, telle que* $(x, F(x), F'(x), \ldots, F^{(n)}(x)) = (x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *pour tous* $(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \in T$.

Si un tel sous-ensemble T existe, alors on dit que la fonction F est *solution* de l'éq. dif.
Ex. : tableau B.
On notera que la notation $y^{(k)}$ est une notation simplifiée pour $F^{(k)}(x)$. Elle permet de traiter les équations sans avoir à traîner de trop lourdes expressions.

Rem. : Dans la condition [I], il n'est rien dit sur la taille de l'intervalle I_x. On va naturellement s'efforcer de trouver des solutions définies sur des intervalles aussi grands que possible (intervalles de type quelconque).

A côté des éq. dif. faisant intervenir des fonctions d'une seule variable, il faut signaler celles qui font intervenir des fonctions de plusieurs variables, et donc des dérivées partielles. La *théorie des équations aux dérivées partielles,* beaucoup plus difficile, ne sera pas abordée ici (voir p. 272/2).
Enfin, l'écriture $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$, est dite sous forme *explicite* et n est l'*ordre de l'équation différentielle*. Des éq. dif. *implicites* sont étudiées p. 379.

Problèmes aux conditions initiales

On cherche en général moins à connaître toutes les solutions d'une éq. dif. qu'à connaître une solution particulière satisfaisant à certaines conditions « initiales » (cf. fig. A). En général, la condition posée est de la forme :

[II] *On cherche une solution F_i à $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$, telle que* $(x_0, F_i(x_0), F_i'(x_0), \ldots, F_i^{(n-1)}(x_0)) = (x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$.

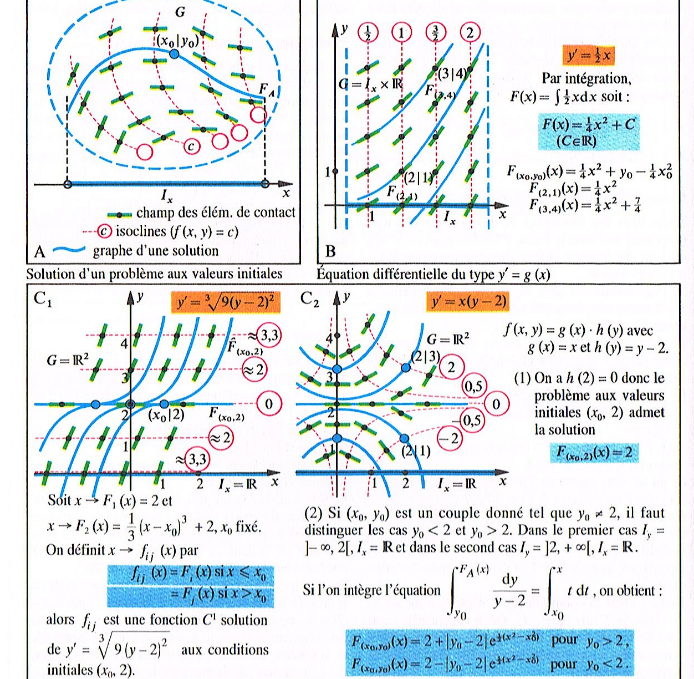
On appelle en général le (n+1)-uplet $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ (n+1)-uplet des *valeurs initiales*. Ce problème de trouver une fonction F_i solution de l'équation satisfaisant à [II] s'appelle *problème aux conditions initiales*. Une éventuelle solution est alors solution du problème aux conditions initiales.

Position du problème

Une étude systématique des éq. dif. à une variable doit permettre de répondre aux questions suivantes :
a) Sous quelles conditions une éq. dif. admet-elle une solution ? Sous quelles conditions un problème aux conditions initiales données admet-il une solution, et celle-ci est-elle unique ?
b) Quels sont les procédés pratiques permettant de résoudre ces équations ?
Pour la question a), on peut déjà dire que *la continuité de la fonction f est une condition suffisante de résolution des problèmes aux valeurs initiales*. Mais on ne peut rien dire sur la taille de l'intervalle de résolution. Des résultats complémentaires seront donnés p. 389.
Dans ce qui suit, on mettra surtout l'accent sur l'étude de la question b). On constatera tout d'abord que la résolution d'éq. dif. est en général difficile dans la pratique, même si des théorèmes assurent l'existence et l'unicité éventuelle de la solution. En effet, ces théorèmes sont très généraux, et ne fournissent pas de procédés de construction. Si l'on ne trouve pas la solution par le calcul algébrique, on cherche à l'approcher par des méthodes numériques. Des algorithmes classiques sont donnés p. 391.
On traitera surtout les équations différentielles linéaires, pour lesquelles la théorie est la plus simple, et l'on abordera le minimum indispensable pour les autres types principaux.

Applications des équations intégrales de la page 371

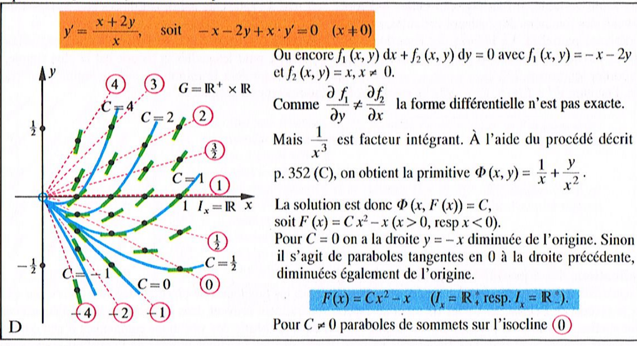
Les équations intégrales de première espèce se présentent dans les problèmes de physique les plus divers, par ex. dans la théorie de l'élasticité. Celles de seconde espèce apparaissent souvent dans la transformation d'équations différentielles, en vue d'un procédé de résolution, par ex. dans la théorie des vibrations entretenues d'une corde. Les valeurs propres sont liées aux fréquences propres, tandis que les fonctions propres de l'équation homogène correspondent à la vibration sinusoïdale fondamentale et aux harmoniques de fréquence supérieure.



Solution d'un problème aux valeurs initiales

Équation différentielle du type $y' = g(x)$

Équation différentielle à variables séparées



Facteur intégrant

Éq. dif. du premier ordre à une variable

Une éq. dif. explicite, du premier ordre, à une seule variable, s'écrit $y' = f(x, y)$ où f est une fonction définie sur un sous-ensemble G de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D'après la condition [I] de la p. 373, les fonctions définies sur un intervalle $F : I_x \to \mathbb{R}$, continûment dérivables, sont *solutions* $(x \mapsto y = F(x))$ si pour tout $x \in I_x$, $(x, F(x)) \in G$ et $F'(x) = f(x, F(x))$.

Une solution F_i s'appelle solution du pb. aux conditions initiales (x_0, y_0) (couple d'éléments dans G) si $F_i(x_0) = y_0$, d'après la condition [II], p. 373.

Rem. : Pour représenter les équations du premier ordre, on utilise souvent les champs d'éléments de contact correspondants (cf. p. 372, ill. B) : en tout point M de G on peut trouver un segment de la tangente à la courbe dite *intégrale* $y = F(x)$ qui passe par M. Son coefficient angulaire est $f(x, y)$.

Le graphe de la solution d'un problème aux valeurs initiales (x_0, y_0) doit respecter le champ et passer par le point initial (x_0, y_0) (ill. A).

Parmi les éq. du premier ordre, certaines se résolvent facilement (en général par des méthodes d'intégration) mais d'autres sont beaucoup plus malcommodes, et il faut les résoudre par approximations numériques.

Équations du premier ordre particulières

a) $y' = g(x)$ ($g : I_x \to \mathbb{R}$ continue, I_x intervalle ouvert)

Dans ce cas très simple, la solution générale est une primitive de la fonction g et peut se noter $F = \int g(x)\,dx$ (cf. p. 333 sqq.). Tout problème aux conditions initiales (x_0, y_0) possède sur I_x une solution unique

$$F_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

Ex. : ill. B.

b) $y' = g(x) \cdot h(y)$ ($g : I_x \to \mathbb{R}$ continue, $h : I_y \to \mathbb{R}$ continue, I_x et I_y intervalles ouverts)

On dit que c'est une éq. à variables séparées. La fonction $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ est continue sur $I_x \times I_y$. Pour $h(y) = 1$, on retrouve le cas précédent.

(1) Si l'on se donne un pb. aux conditions initiales (x_0, y_0), et si $h(y_0) = 0$, alors la fonction constante $F_i(x) = y_0$ est solution. Mais en général, ce pb. aux conditions initiales n'est pas soluble de façon unique (ill. C₁).

(2) Soit maintenant un pb. aux conditions initiales (x_0, y_0) avec $h(y_0) \neq 0$. A cause de la continuité de h, il existe un intervalle ouvert $\widehat{I_y}$ contenant y_0 où $h(y)$ garde un signe constant. Si l'on suppose qu'il existe une solution F_i définie sur un intervalle $\widehat{I_x}$, tel que $F_i(\widehat{I_x}) \subseteq \widehat{I_y}$,

alors il faut écrire $\frac{F_i'(x)}{h(F_i(x))} = g(x)$. En intégrant, on

obtient : $\int_{x_0}^{x} \frac{F_i'(t)}{h(F_i(t))}\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$.

D'après la règle 5, p. 337, il vient : $\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(t)}\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$.

En intégrant cette expression, on obtient localement une solution unique définie implicitement.

Ex. : ill. C₂.

c) Équation différentielle exacte

Une éq. dif. de la forme $f_1(x, y) + f_2(x, y) \cdot y' = 0$ où f_1 et f_2 $(f_2(x, y) \neq 0)$ sont deux fonctions à valeurs réelles définies sur un ouvert G de $\mathbb{R}^2$ est dite *exacte* s'il existe une fonction Φ de G dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y)$$

pour tous $(x, y) \in G$.

Rem. : Φ est donc une primitive de la fonction $f : G \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. Si l'ouvert G est simplement connexe et si f est continûment différentiable, ce que l'on suppose dans toute la suite, alors l'existence d'une primitive de f est assurée si l'on a (condition suffisante) (cf. p. 353) :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \quad \text{pour tous } (x, y) \in G.$$

Si F est solution d'une éq. dif. exacte, alors :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, F(x)) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, F(x)) \cdot F'(x) = 0, \text{ soit}$$

$\Phi(x, F(x)) = C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

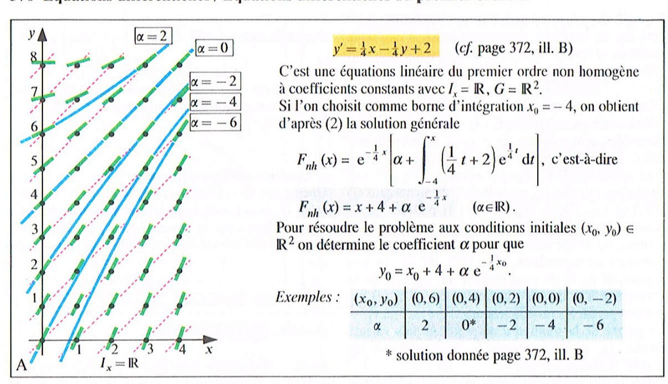
Inversement, toute fonction implicite y définie par $\Phi(x, y) = C$ $(C \in \mathbb{R})$) (cf. p. 325) est solution de l'éq. dif. exacte. En pratique, on cherchera donc à déterminer la fonction Φ (cf. p. 352, tabl. C) puis on résoudra l'équation implicite $\Phi(x, F(x)) = C$.

Si une éq. dif. de la forme $f_1(x, y) + f_2(x, y) \cdot y' = 0$ n'est pas exacte, on peut chercher une fonction $g(x, y)$ ne s'annulant pas telle que l'équation $g(x, y) \cdot f_1(x, y) + g(x, y) \cdot f_2(x, y) \cdot y' = 0$ soit, elle, exacte. $g(x, y)$ est appelé *facteur intégrant* (ou encore *multiplicateur eulerien*). Il n'existe pas de méthode générale pour trouver la fonction g.

Ex. : ill. D.

La résolution d'un pb. aux valeurs initiales (x_0, y_0) pour une éq. dif. exacte s'obtient par résolution de l'éq. implicite particulière $\Phi(x, F(x)) = \Phi(x_0, y_0)$.

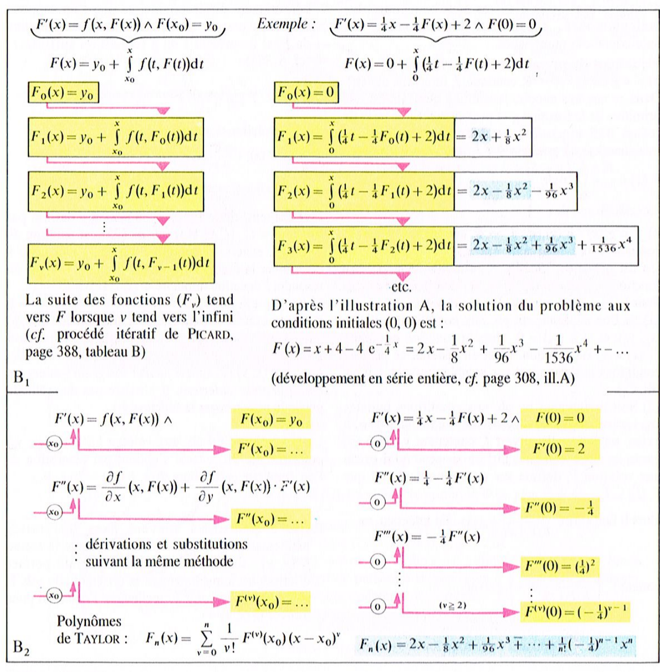
Rem. : On trouve souvent dans les traités mathématiques les éq. dif. exactes sous la forme $f_1(x, y) \cdot dx + f_2(x, y) \cdot dy = 0$, ce qui permet d'introduire immédiatement la différentielle $d\Phi$. Il suffit alors d'intégrer formellement l'équation pour trouver $\Phi(x, y) = C$.



(x_0, y_0)	(0,6)	(0,4)	(0,2)	(0,0)	(0, −2)
α	2	0*	−2	−4	−6

* solution donnée page 372, ill. B

Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants



Procédés d'approximation

d) Changement de variable

Souvent, un changement de variable permet de transformer une éq. dif. en une plus simple, pour laquelle il existe des méthodes de résolution.

Une éq. dif. de la forme $y' = f(ax + by + c)$ avec a, b, $c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, se ramène, en posant $z = ax + by + c$ (donc $z' = a + by'$) à l'équation $z' = a + b \cdot f(z)$. Cette nouvelle éq. dif. peut être résolue suivant la méthode b), p. 375. Après résolution, on revient à y par $by = z - ax - c$.

Ex. : éq. dif. de l'ill. B_1, p. 372. On pose $z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 2$, et on se ramène à l'équation $z' = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}z$.

De même, pour traiter des éq. de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, on pose $z = \frac{y}{x}$, et on se ramène à $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$.

Cette éq. dif. se résout encore par la méthode b), p. 375. Enfin, on repasse à y par $y = xz$.

Ex. : éq. dif. de l'ill. D, p. 374. En posant $z = \frac{y}{x}$, il vient $z' = \frac{1}{x}(z+1)$.

e) Éq. dif. linéaire du premier ordre

Une éq. dif. de la forme $y' + a_0(x) \cdot y = s(x)$, où a_0 et s sont deux fonctions continues définies sur un intervalle I_x à valeurs réelles, est dite *éq. dif. linéaire du premier ordre*. Si $s = 0$ sur tout I_x, l'équation est dite *homogène*, sinon elle est dite *non homogène*.

La solution générale à ce type d'équations est donnée par la **proposition :**

(1) *La fonction définie sur I_x par* $F_1(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_0(t)\,dt\right)$ *$(x_0 \in I_x)$ est solution de l'éq. dif. homogène $y' + a_0(x) \cdot y = 0$. Les solutions de cette éq. sont toutes de la forme $F_h = \alpha \cdot F_1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.*

(2) *il existe une solution particulière F_p de l'éq. non homogène définie sur I_x, par*

$$F_p(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_0(t)\,dt\right) \cdot \int_{x_0}^{x} s(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} a_0(u)\,du\right)dt \quad (x_0 \in I_x).$$

Les solutions des éq. non homogènes sont alors toutes de la forme $F_{nh} = F_p + F_h$ où F_h est solution de l'éq. homogène.

Pour prouver la partie (1) de la prop., on pose $g(x) = -a_0(x)$ et $h(y) = y$, et on applique pour $(x_0, 1) \in G$ la méthode b), p. 375. On obtient alors directement la solution F_1, et on montre facilement que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot F_1$ est également solution. Si F_h est une solution particulière, on trouve que $\left(\frac{F_h}{F_1}\right)' = 0$, donc, en appliquant la prop. 8, p. 297, il vient $F_h = \alpha \cdot F_1$.

Pour prouver l'existence de la solution particulière F_p donnée dans la partie (2) de la prop., on utilise le procédé de « *variation de la constante* ». On pose $F_p(x) = v(x) \cdot F_1(x)$, où F_1 est solution de l'équation homogène. On cherche à déterminer la fonction v. On obtient, en remplaçant F_p dans l'équation, la condition nécessaire $v'(x) = \frac{s(x)}{F_1(x)}$.

On résout facilement cette nouvelle équation (cf. a), p. 375) par $v(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{s(t)}{F_1(t)}\,dt$ $(x_0 \in I_x)$. On montre alors réciproquement que $v \cdot F_1$ est solution de l'équation non homogène, et s'écrit selon l'expression donnée au (2).

On montre ensuite que $F_p + F_h$ est toujours solution de l'éq. non homogène, par le calcul. Réciproquement, pour toute solution F_{nh} de l'éq. non homogène, $F_{nh} - F_p$ est solution de l'éq. homogène, ce qui permet de conclure.

Tout pb. aux conditions initiales est soluble de façon unique. Dans le cas homogène, $F_A(x) = y_0 F_1(x)$; dans le cas non homogène, $F_A(x) = F_p(x) + y_0 F_1(x)$.

f) Éq. dif. linéaire du premier ordre à coefficients constants

Cette éq. a la forme : $y' + a_0 \cdot y = s(x)$ $(a_0 \in \mathbb{R}$, $s : I_x \to \mathbb{R})$.

Dans le cas d'une éq. homogène, on peut bien sûr prendre $I_x = \mathbb{R}$; dans le cas non homogène, l'ensemble de définition de la solution s'identifie à celui de s.

On déduit directement de la prop. précédente que :

(1) *La solution générale de l'éq. homogène $y' + a_0 \cdot y = 0$ est $F_h(x) = \alpha \cdot e^{-a_0 x}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Le problème aux conditions initiales $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ admet une solution unique* $F_A(x) = y_0 \cdot e^{-a_0(x - x_0)}$.

(2) *La solution générale de l'éq. non homogène*

$y' + a_0 \cdot y = s(x)$ *est* $F_{nh}(x) = e^{-a_0 x}\left(\alpha + \int_{x_0}^{x} s(t) \cdot e^{a_0 t}\,dt\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R}, x_0 \in I_x)$.

Le problème aux conditions initiales $(x_0, y_0) \in I_x \times \mathbb{R}$ admet une solution unique

$$F_A(x) = e^{-a_0(x - x_0)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} s(t) \cdot e^{a_0(t - x_0)}\,dt\right).$$

Ex. : ill. A.

g) Procédés d'approximation

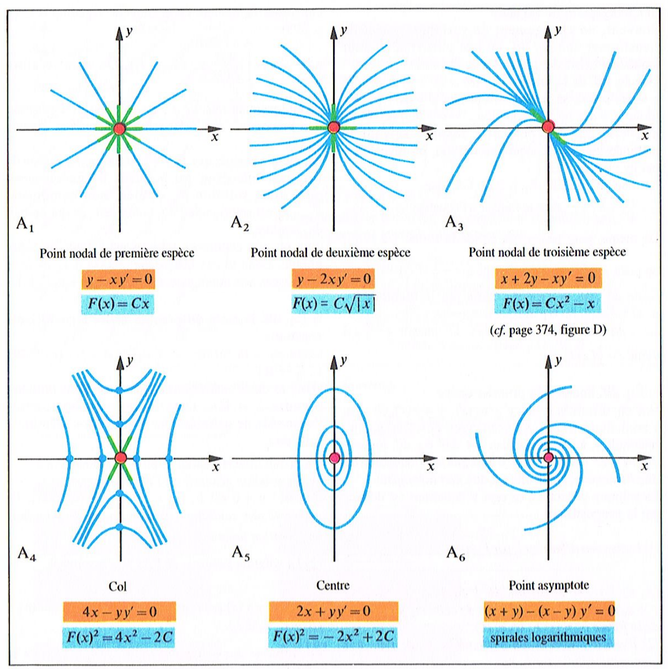
Pour déterminer approximativement la solution d'un pb. aux conditions initiales pour une éq. dif. du premier ordre $y' = f(x, y)$, on peut par ex. utiliser le procédé décrit fig. B_1. On utilise pour cela le fait que la solution F est aussi solution de

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, F(t))\,dt \quad \text{(cf. p. 388, ill. B).}$$

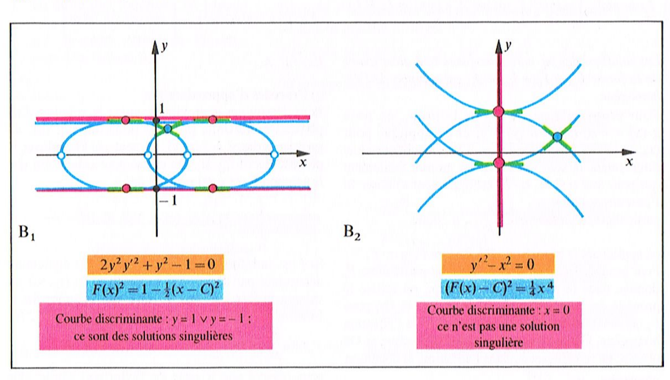
Si f est indéfiniment dérivable, on peut également déterminer par dérivations successives en (x_0, y_0) les valeurs de $F(x_0)$, $F'(x_0)$, $F''(x_0)$, etc., et approcher la fonction F par son développement de TAYLOR (p. 299)

$$F_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(x_0) \cdot (x - x_0)^\nu \quad \text{(ill. } B_2\text{),}$$

sous réserve que le reste de Taylor soit négligeable devant les autres termes.



Types de points singuliers isolés



Solutions singulières

Équations différentielles implicites du premier ordre

Soit g une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^3$, à valeurs réelles. L'éq. dif. $g(x, y, y') = 0$ est appelée éq. du premier ordre *sous forme implicite*. Le triplet $(x, y, y') \in E$, c.-à-d. l'élément de contact (p. 372, ill. B), n'est pas forcément déterminé par la connaissance du couple (x, y).

Exemples : $y' - f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) + f_2(x, y) \cdot y' = 0$,

$$y - xy' = 0,\ y'^2 - \frac{x^2}{4} = 0\ .$$

On essaie toutefois de se ramener à une ou plusieurs formes explicites de l'éq. dif. en résolvant l'équation en y', ce qui pose souvent des problèmes de domaines de validité, donc de résolution sur des domaines séparés, comme par exemple pour $y - xy' = 0$.

Si la résolution de l'équation est possible en y', $y' = g(x, y)$, localement au voisinage d'un élément de contact (x_0, y_0, y'_0), $y'_0 = g(x_0, y_0)$, celui-ci est dit *régulier*. Dans le cas contraire, on parle d'élément de contact *singulier*.

En se plaçant dans les conditions usuelles, g et ses dérivées partielles premières sont continues au voisinage de (x_0, y_0, y'_0). Sous ces hypothèses, la condition suivante suffit pour assurer la régularité de (x_0, y_0, y'_0) :

$$(1)\ g(x_0, y_0, y'_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0\ .$$

Cela suffit également pour avoir un pb. aux conditions initiales (x_0, y_0) soluble de façon unique.

Les éléments de contact (x_0, y_0, y'_0) ne peuvent alors être singuliers que si

$$(2)\ \ g(x_0, y_0, y'_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y'}(x_0, y_0, y'_0) = 0\ .$$

Bien que ce ne soit qu'une condition nécessaire, elle est bien utile pour déterminer pratiquement des éléments de contact singuliers. En éliminant y'_0 entre les deux équations de (2), on peut en particulier déterminer le lieu de ces points. Cet ensemble est appelé *courbe discriminante* de l'éq. dif..

Ex. : La courbe discriminante de l'équation $y - xy' = 0$ est donnée d'après (2) par la résolution du système $y - xy' = 0$ et $x = 0$. Il s'agit donc du point $(0, 0)$.

Effectivement $y' = \frac{y}{x}$ ne peut localement représenter

$y - xy' = 0$ dans un voisinage de $(0, 0)$ puisque la valeur 0 est interdite à x. Les éléments de contact $(0, 0, y'_0)$ sont singuliers.

La courbe discriminante de l'équation $2\,y^2\,y'^2 + y^2 - 1 = 0$ est de même donnée par le système $2\,y^2\,y'^2 + y^2 - 1 = 0$ et $4\,y^2\,y' = 0$. Il s'agit donc des points (x, y) tels que $y = \pm 1$ (cf. ill. B_1).

Une *solution F* de l'éq. dif. est dite *singulière* si l'élément de contact $(x, F(x), F'(x))$ est singulier pour tout $x \in I_x$. C'est le cas des deux fonctions $y = \pm 1$ de l' ill. B_1.

Solutions singulières isolées

Si la courbe discriminante est constituée d'un point unique, alors les graphes des solutions autour du point singulier ont un comportement particulier. Dans les exemples des illustrations A et B, l'origine a toujours été choisie comme point singulier.

a) Point nodal

Les graphes d'un nombre infini de solutions différentes aboutissent au point singulier commun, comme dans les ill. A_1 à A_3.

Les dessins montrent clairement que les points nodaux sont de plusieurs sortes, suivant le nombre des tangentes aux courbes intégrales aboutissant au point nodal. On distingue ainsi les points nodaux de première espèce (infinité de tangentes au point nodal), de seconde espèce (nombre fini de tangentes supérieur ou égal à 2), de troisième espèce (une seule tangente commune à toutes les courbes).

b) Col

Les graphes d'un nombre fini seulement de solutions aboutissent au point singulier commun, alors que les autres graphes n'y passent pas (ill. A_4). (point-selle.)

c) Centre

Les graphes des solutions sont des courbes fermées enfermant toutes le point singulier (ill. A_5).

d) Point asymptote

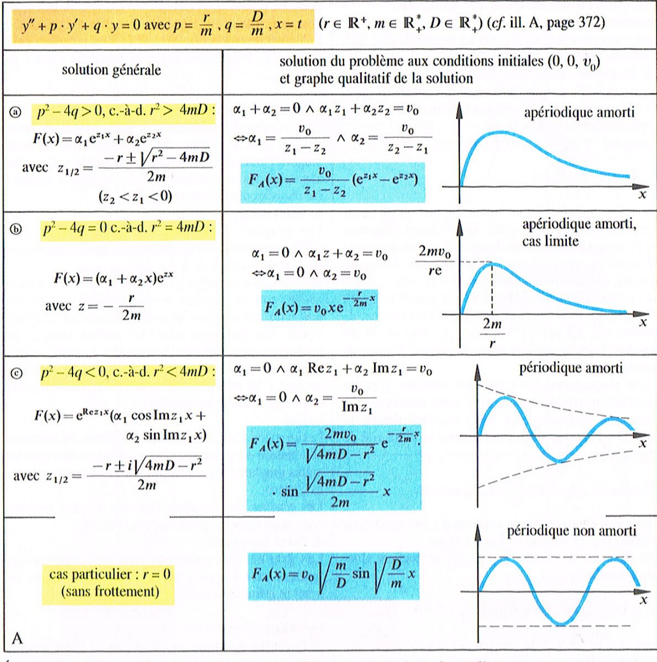
Les graphes des solutions sont des courbes qui tendent vers le point singulier en l'entourant un nombre infini de fois (ill. A_6).

Solutions singulières

Si la courbe discriminante n'est pas un point unique, mais par ex. une courbe continue et différentiable, on peut se demander si ce n'est pas la courbe représentative d'une solution singulière. C'est toujours vrai si la courbe discriminante enveloppe l'ensemble des graphes des solutions non singulières (cf. ill. B_1).

La courbe discriminante n'est pas toujours représentative d'une solution, comme dans l'ill. B_2. Elle a cependant toujours un rapport étroit avec les graphes des solutions.

Rem. : Dans l'exemple B_1, par un point (x_0, y_0) d'ordonnée $y_0 \in\ ]-1, 1[$, il passe localement deux arcs de courbes intégrales. Par un point d'ordonnée $y_0 = \pm 1$ il passe localement quatre arcs C^1 solutions : morceau de droite, morceau d'ellipse et deux morceaux mixtes (morceau de droite raccordé à un morceau d'ellipse).



$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ avec $p = \frac{r}{m}$, $q = \frac{D}{m}$, $x = t$ ($r \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{R}^*_+$, $D \in \mathbb{R}^*_+$) (*cf.* ill. A, page 372)	
solution générale	solution du problème aux conditions initiales $(0, 0, v_0)$ et graphe qualitatif de la solution
ⓐ $p^2 - 4q > 0$, c.-à-d. $r^2 > 4mD$: $F(x) = \alpha_1 e^{z_1 x} + \alpha_2 e^{z_2 x}$ avec $z_{1/2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4mD}}{2m}$ $(z_2 < z_1 < 0)$	$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \wedge \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = v_0$ $\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{v_0}{z_1 - z_2} \wedge \alpha_2 = \frac{v_0}{z_2 - z_1}$ $F_A(x) = \frac{v_0}{z_1 - z_2}(e^{z_1 x} - e^{z_2 x})$ apériodique amorti; x
ⓑ $p^2 - 4q = 0$ c.-à-d. $r^2 = 4mD$: $F(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 x)e^{zx}$ avec $z = -\frac{r}{2m}$	$\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_1 z + \alpha_2 = v_0$ $\Leftrightarrow \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = v_0$ $F_A(x) = v_0 x e^{-\frac{r}{2m}x}$ apériodique amorti, cas limite; $\frac{2mv_0}{re}$; $\frac{2m}{r}$; x
ⓒ $p^2 - 4q < 0$, c.-à-d. $r^2 < 4mD$: $F(x) = e^{\mathrm{Re}\, z_1 x}(\alpha_1 \cos \mathrm{Im}\, z_1 x + \alpha_2 \sin \mathrm{Im}\, z_1 x)$ avec $z_{1/2} = \frac{-r \pm i\sqrt{4mD - r^2}}{2m}$	$\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_1 \mathrm{Re}\, z_1 + \alpha_2 \mathrm{Im}\, z_1 = v_0$ $\Leftrightarrow \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = \frac{v_0}{\mathrm{Im}\, z_1}$ $F_A(x) = \frac{2mv_0}{\sqrt{4mD - r^2}} e^{-\frac{r}{2m}x} \cdot \sin \frac{\sqrt{4mD - r^2}}{2m} x$ périodique amorti; x
cas particulier : $r = 0$ (sans frottement) A	$F_A(x) = v_0 \sqrt{\frac{m}{D}} \sin \sqrt{\frac{D}{m}} x$ périodique non amorti; x

Équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants ($p \geqslant 0$, $q > 0$)

Pour trouver une solution particulière de $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = s(x)$, on cherche une solution de la forme indiquée, en opérant par identification.		
	$s(x)$	Forme de la solution particulière
①	$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$	$\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu$ (dans le cas $q = 0$ on pose d'abord $z = y'$)
②	$e^{rx} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$	$e^{rx} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu$, si r n'est pas solution $x \cdot e^{rx} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu$, si r est une solution simple $x^2 \cdot e^{rx} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu$, si r est une solution double } de l'équation caractéristique
③	$a_1 \sin rx$ $a_2 \cos rx$ $a_1 \sin rx + a_2 \cos rx$	$b_1 \sin rx + b_2 \cos rx$, si $(q - r^2)^2 + p^2 r^2 \neq 0$ $x(b_1 \sin rx + b_2 \cos rx)$, si $(q - r^2)^2 + p^2 r^2 = 0 \Leftrightarrow (p = 0) \wedge (q = r^2)$
B	On peut opérer de façon analogue pour un produit d'expressions des types ① et ③.	

Solutions particulières pour des fonctions perturbatrices $s(x)$ remarquables.

Équations différentielles du second ordre

Les éq. dif. du second ordre, en représentation explicite, s'écrivent $y'' = f(x, y, y')$, où f est une fonction définie sur $G \subset \mathbb{R}^3$ à valeurs réelles.

Une fonction $F : I_x \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto y = F(x)$ est solution de l'éq. dif. si elle est deux fois dérivable et si pour tout $x \in I_x$, $(x, F(x), F'(x)) \in G$ et $F''(x) = f(x, F(x), F'(x))$.

Une solution F_A est dite solution du problème aux valeurs initiales $(x_0, y_0, y_0') \in G$, si d'après [II], p. 373, $(x_0, F_A(x_0), F_A'(x_0)) = (x_0, y_0, y_0')$.

Traiter une éq. dif. du second ordre est en général plus difficile que traiter une éq. du premier ordre. Il existe beaucoup de méthodes pour des types particuliers d'éq.. On cherche en général à ramener une éq. du second ordre à un système d'éq. du premier ordre par changement de variables. Une importance particulière est à donner aux éq. linéaires du second ordre.

Résolution générale des éq. dif. linéaires du second ordre

Une éq. dif. linéaire du second ordre s'écrit sous la forme $y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = s(x)$, où a_1, a_0 et s sont des fonctions continues sur I_x à valeurs réelles. Si $s = 0$ sur tout I_x, l'éq. est dite *homogène* ; elle est dite *non homogène* dans le cas contraire.

Pour la résolution générale, on a besoin du concept d'indépendance linéaire de deux fonctions $f_1 : I_x \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I_x \to \mathbb{R}$:

Les deux fonctions f_1 et f_2 sont dites *linéairement indépendantes* si la relation fonctionnelle sur I_x $c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 = 0$ où $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ exige $c_1 = c_2 = 0$.

On définit (cf. p. 382, tab. A_1), le wronskien de deux fonctions par

$W(F_1, F_2)(x) = F_1(x) \cdot F_2'(x) - F_1'(x) \cdot F_2(x)$. On montre que deux solutions de l'éq. dif. hom. définies sur I_x, F_1 et F_2 sont linéairement indépendantes si pour tout $x \in I_x$, $W(F_1, F_2)(x) \neq 0$, et que l'on a :

Proposition :

(1) *Il existe deux solutions linéairement indépendantes F_1 et F_2 définies sur I_x pour l'éq. homogène $y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = 0$.*

L'ensemble des solutions de l'éq. homogène est l'ensemble des $F_h(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x)$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

(2) *Il existe une solution F_p définie sur I_x pour l'éq. non homogène.*

L'ensemble des solutions de l'éq. non homogène est l'ensemble des $F_{nh}(x) = F_p(x) + \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x)$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

Rem. : La justification de cette prop. est semblable à celle développée p. 383 pour les équations d'ordre n.

Tout pb. aux conditions initiales admet une solution unique.

Méthode de résolution des éq. homogènes linéaires

On cherche donc deux solutions linéairement indépendantes. Si l'on ne connaît pas au départ de solution non nulle, le problème devient très ardu ; c'est pour cela que l'on fait souvent appel, dans la pratique, lorsque les tables ou l'intuition ne suffisent pas, à des solutions approchées (p. 391). Si, par contre, on connaît déjà une solution F_1, qui de plus ne s'annule pas sur I_x, la méthode suivante permet de calculer une autre solution F_2 indépendante de F_1 :

On pose $F_2(x) = v(x) \cdot F_1(x)$, et v est alors solution de l'éq. dif.

$$v'' = -\left(2\frac{F_1'(x)}{F_1(x)} + a_1(x)\right) \cdot v' .$$

L'intégration est facile et on prend par ex.

$$F_2(x) = F_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{|F_1(t)|^2} \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a_1(u)\, du\right) dt \quad (x_0 \in I_x).$$

Calcul d'une solution particulière d'une éq. non homogène

Si F_1 et F_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'éq. homogène correspondante, on peut trouver une solution particulière de l'éq. non homogène par la « méthode de variation des constantes » en posant $F_p(x) = v_1(x) \cdot F_1(x) + v_2(x) \cdot F_2(x)$. Il suffit alors de résoudre les deux éq. dif.

$$v_1'(x) = -\frac{s(x) F_2(x)}{W(F_1, F_2)(x)} \quad \text{et}$$

$$v_1'(x) = +\frac{s(x) F_1(x)}{W(F_1, F_2)(x)} .$$

Éq. dif. linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse ici aux éq. du type $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = s(x)$ où p et q sont deux réels.

On résout d'abord l'éq. homogène $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$. Pour cela, on considère l'éq. caractéristique $z^2 + pz + q = 0$: sa résolution conduit à distinguer trois cas (cf. p. 383) :

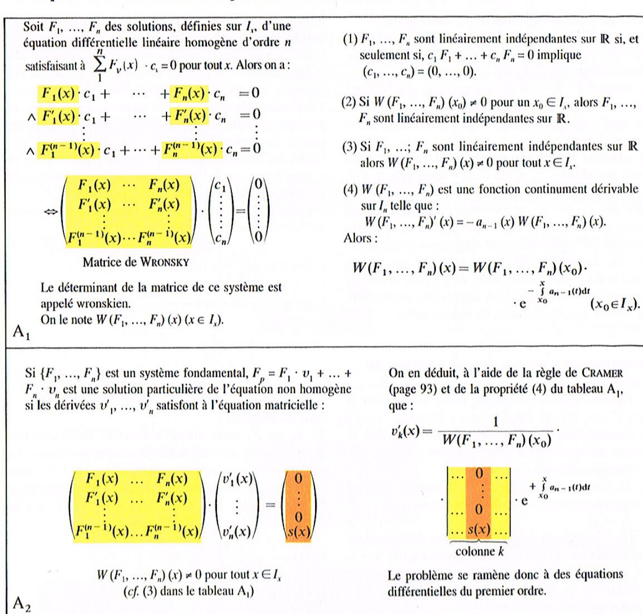
(a) $p^2 - 4q > 0$: deux solutions réelles distinctes z_1 et z_2,
(b) $p^2 - 4q = 0$: une solution réelle unique z,
(c) $p^2 - 4q < 0$: deux sol. complexes z_1 et z_2 conj.

Les solutions de l'éq. homogène sont alors :

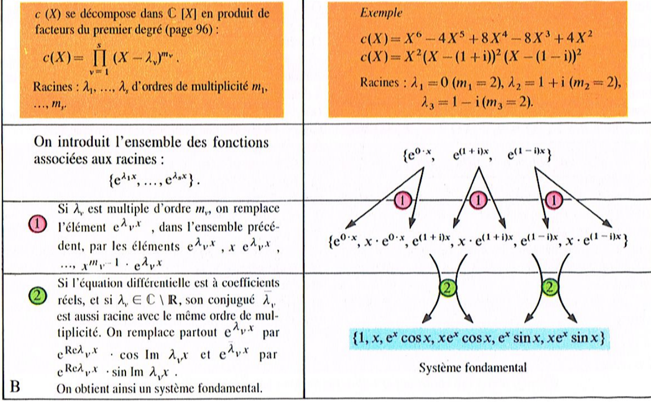
(a) $F_h(x) = \alpha_1 e^{z_1 x} + \alpha_2 e^{z_2 x}$,
(b) $F_h(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 x) e^{zx}$,
(c) $F_h(x) = e^{\mathrm{Re} z_1 x}(\alpha_1 \cos(\mathrm{Im} z_1 x) + \alpha_2 \sin(\mathrm{Im} z_1 x))$.

Ex. : ill. A.

Pour trouver une solution particulière de l'équation non homogène, on peut utiliser la méthode de variation des constantes. Il existe cependant des méthodes plus simples si s est une fonction trigonométrique, exponentielle ou une série entière (tab. B).



Indépendance linéaire, wronskien, solution particulière



Système fondamental

Éq. dif. linéaires homogènes d'ordre *n*

Une éq. dif. linéaire d'ordre n s'écrit sous la forme $y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x) \cdot y = s(x)$. Toutes les fonctions sont ici définies et continues sur un intervalle ouvert I_x. L'éq. est dite homogène pour $s = 0$, non homogène dans le cas contraire. Tout problème aux conditions initiales admet alors une solution unique et toute solution est définie sur tout I_x. On étudie ici les équations homogènes.

Leurs solutions sont des fonctions définies sur I_x, n fois continûment différentiables. On montre facilement que si F et $\widehat{F}$ sont solutions, alors $F + \widehat{F}$ et $\alpha \cdot F$ le sont aussi pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi l'ensemble $\mathfrak{L}_h$ des solutions est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace des fonctions n fois continûment différentiables sur I_x.

Pour déterminer la dimension de $\mathfrak{L}_h$, on en cherche une base, appelée aussi dans ce contexte *système fondamental*. L'indépendance linéaire de n solutions peut être facilement caractérisée par le déterminant de WRONSKY (tab. A₁). On montre qu'il existe n solutions indépendantes pour l'éq. dif., et que $n + 1$ solutions sont toujours linéairement dépendantes. La dimension de $\mathfrak{L}_h$ est donc l'ordre de l'équation, n.

Prop. 1 : *La dimension de l'espace vectoriel $\mathfrak{L}_h$ des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est n, c.-à-d. :*

$$\mathfrak{L}_h = \{F_h \mid F_h = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \cdot F_\nu \wedge \alpha_\nu \in \mathbb{R} \wedge \{F_1, \ldots, F_n\} \text{ base}\}.$$

$$F_h = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \cdot F_\nu$$ s'appelle *solution générale.*

Le problème de la résolution complète d'une éq. dif. linéaire homogène d'ordre n se ramène donc au problème de trouver une base de solutions. Cela n'est possible de façon élémentaire que pour certaines équations bien particulières.

Éq. dif. linéaire homogène d'ordre *n* à coefficients constants

Dans ce cas, les fonctions a_ν, $0 \leq \nu \leq n - 1$, sont des constantes. On cherche donc une base de solutions pour l'équation $y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y = 0$.

Si l'on cherche des solutions de la forme $F(x) = e^{\lambda x}$, on trouve la condition

$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$ (*équation caractéristique*). Le polynôme correspondant,

$P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ est appelé *polynôme caractéristique*.

Toute racine de ce polynôme nous donne une solution de l'équation. Les solutions correspondant à des racines distinctes sont linéairement indépendantes. Ainsi, si $P(X)$ admet n racines réelles distinctes, on obtient directement une base de l'espace vectoriel des solutions. En général, cependant, cette condition n'est pas remplie (cf. p. 96). Il faudra donc compléter les solutions obtenues à partir des racines réelles distinctes de $P(X)$ (s'il en existe) par d'autres fonctions. Pour cela, on peut procéder comme dans l'ill. B.

Éq. dif. linéaire non homogène d'ordre *n*

Une éq. dif. linéaire non homogène d'ordre n s'écrit $y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x) \cdot y = s(x)$ où les fonctions a_ν, $0 \leq \nu \leq n - 1$, et s sont continues, définies sur un intervalle I_x et à valeurs réelles.

Si l'on connaît une solution particulière F_p de cette équation, alors l'ensemble des solutions $\mathfrak{L}_{nh}$ est facilement caractérisé à l'aide des solutions de l'équation homogène associée

$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x) \cdot y = 0$. En effet, pour toute solution F_{nh} de l'équation non homogène, $F_{nh} - F_p$ est solution de l'équation homogène (linéarité de l'équation). On en déduit que $\mathfrak{L}_{nh} \subset F_p + \mathfrak{L}_h$; la réciproque est ensuite facile à montrer.

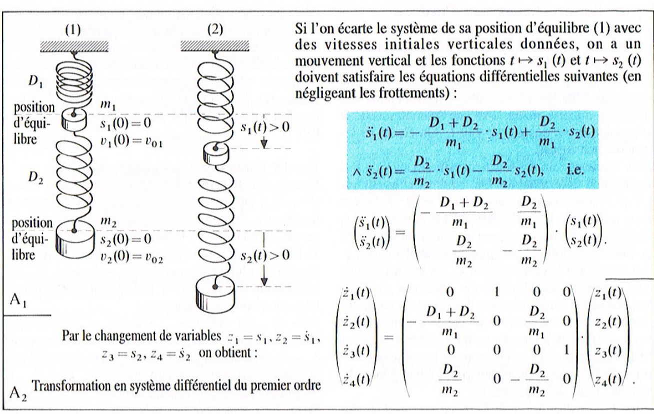
Prop. 2 : *L'ensemble des solutions $\mathfrak{L}_{nh}$ de l'équation non homogène est*

$$\mathfrak{L}_{nh} = \{F_{nh} \mid F_{nh} = F_p + F_h, F_h \in \mathfrak{L}_h\}.$$

Ainsi, $F_{nh} = F_p + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu F_\nu$ où les F_ν sont des fonctions de base de $\mathfrak{L}_h$ et les α_ν sont des réels, est la solution générale de l'équation non homogène.

L'ensemble des solutions d'une équation non homogène est donc déterminé si l'on en connaît une solution particulière. La méthode de la variation des constantes permet de trouver une telle solution si l'on connaît une base de solutions de l'équation homogène. On pose $F_p(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x) F_\nu(x)$, et on détermine les fonctions $a_\nu(x)$ comme dans le tableau A₂.

Cette méthode est très générale mais présuppose la connaissance d'une base de solutions de l'équation homogène. C'est là, en pratique, le principal obstacle. Dans le cadre de problèmes aux conditions initiales, en particulier, où l'on ne cherche pas l'ensemble des solutions, on emploie bien d'autres méthodes, comme par exemple des développements en séries entières, les transformations de LAPLACE, etc. ; elles ne peuvent être développées ici. Dans la pratique, les méthodes d'approximation numérique sont également très utiles (p. 391).



Si l'on écarte le système de sa position d'équilibre (1) avec des vitesses initiales verticales données, on a un mouvement vertical et les fonctions $t \mapsto s_1(t)$ et $t \mapsto s_2(t)$ doivent satisfaire les équations différentielles suivantes (en négligeant les frottements) :

$$\ddot{s}_1(t) = -\frac{D_1 + D_2}{m_1} \cdot s_1(t) + \frac{D_2}{m_1} \cdot s_2(t)$$
$$\wedge\ \ddot{s}_2(t) = \frac{D_2}{m_2} \cdot s_1(t) - \frac{D_2}{m_2} s_2(t), \quad \text{i.e.}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{s}_1(t) \\ \ddot{s}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{D_1 + D_2}{m_1} & \frac{D_2}{m_1} \\ \frac{D_2}{m_2} & -\frac{D_2}{m_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}.$$

Par le changement de variables $z_1 = s_1, z_2 = \dot{s}_1, z_3 = s_2, z_4 = \dot{s}_2$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{D_1 + D_2}{m_1} & 0 & \frac{D_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{D_2}{m_2} & 0 & -\frac{D_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix}.$$

A_2 Transformation en système différentiel du premier ordre

Exemple de système d'équations différentielles d'ordre 2. Transformation en système d'équations différentielles du premier ordre.

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) \dots a_{1n}(x) \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}(x) \dots a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$ $a_{ik}: I_x \to \mathbb{R}$ défini par $x \mapsto a_{ik}(x)$ dérivable

$A'(x) := (a'_{ik}(x))$ **Dérivation**

$\int_{x_0}^{x} A(t)\,dt := \left(\int_{x_0}^{x} a_{ik}(t)\,dt\right)$ **Intégration**

Règles de calcul :
(1) $(A(x) + B(x))' = A'(x) + B'(x)$
(2) $\int_{x_0}^{x} (A(t) + B(t))\,dt = \int_{x_0}^{x} A(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt$
(3) $(A(x) \cdot B(x))' = A'(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot B'(x)$
(4) Si $A(x) \cdot A'(x) = A'(x) \cdot A(x) \Rightarrow ([A(x)]^n)' = n\,A'(x) \cdot [A(x)]^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$
$(A^0 := I, I$ matrice unité$)$

B

Dérivation et intégration d'une fonction matricielle

Si l'on munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ des matrices réelles $n \times n$) (p. 89) de la norme d'algèbre $\|A\| := n \times \max\{|a_{ik}|, i,k \in \{1,\dots,n\}\}$ (p. 365), $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ devient un espace vectoriel normé dans lequel on peut étudier la convergence d'une suite de matrices (p. 367). On peut donc également étudier la convergence de séries de matrices, par analogie avec les séries réelles (p. 279). En particulier, on peut montrer que la série :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!} = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots (A^0 = E)$$ (série exponentielle d'une matrice)

est absolument convergente, puisque $\|A^\nu\| \leq \|A\|^\nu$ (norme d'algèbre) donc convergente (dimension finie).

Pour $n = 1$, il s'agit du développement en série entière de $e^{a_{11}t}$. Plus généralement on pose :

$$e^A := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!}.$$

Règles de calcul :
(1) $e^A \neq O$ (O matrice nulle) (2) $e^O = E$
(3) $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ (4) $e^A \cdot e^{-A} = E, \quad e^{-A} = (e^A)^{-1}$
(5) $\det e^A \neq 0$ (6) $e^{nA} = (e^A)^n \quad (n \in \mathbb{N})$
(7) $B(x) \cdot B'(x) = B'(x) \cdot B(x) \Rightarrow (e^{B(x)})' = B'(x) \cdot e^{B(x)} = e^{B(x)} \cdot B'(x)$
(8) $(e^{xA})' = A \cdot e^{xA} = e^{xA} \cdot A \quad (x \in \mathbb{R})$

C

Séries exponentielles de matrices

L'exemple de la figure A_1 montre qu'un problème infinitésimal, même banal, peut faire intervenir non pas une équation différentielle, mais plusieurs, et que celles-ci doivent être résolues simultanément. On parle alors de système d'équations différentielles (en abrégé système différentiel).

Systèmes d'éq. différentielles du premier ordre

On appelle *système différentiel du premier ordre* tout système de la forme

$$y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_n)$$
$$\dots$$
$$\wedge\ y'_n = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

dans lequel $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un domaine D de $\mathbb{R}^{n+1}$. Si l'on considère $y_1, \dots y_n$ et $y'_1, \dots, y'_n$ comme des n-uplets de $\mathbb{R}^n$, on peut mettre le système précédent sous la forme simplifiée suivante :

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \text{ avec } \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{f}$ est alors une fonction de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie sur D, dont les composantes sont données par $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)$.

Les *solutions* d'un système différentiel du premier ordre doivent être des fonctions dérivables $\boldsymbol{F}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ données par $\boldsymbol{F} = (F_1, \dots, F_n)$, dont toutes les composantes sont des fonctions réelles définies sur un intervalle I_x telles que pour tout $x \in I_x$,

$$(x, \boldsymbol{F}(x)) \in D \quad \text{et} \quad \boldsymbol{F}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{F}(x)).$$

Une solution $\boldsymbol{F}_A$ est dite solution d'un *problème aux conditions initiales* $(x_0, \boldsymbol{y}_0) \in D$, si on a $\boldsymbol{F}_A(x_0) = \boldsymbol{y}_0$.

Même si des conditions d'existence et d'unicité (p. 389) sont réalisées, ce que l'on supposera par la suite, la résolution de systèmes différentiels du premier ordre pose de grandes difficultés, cas particuliers compris (voir plus loin) . Même pour $n = 2$, il n'existe pas de procédé de résolution élémentaire.

Systèmes d'éq. différentielles d'ordre supérieur

Le tableau A_2 propose un exemple de système différentiel du second ordre transformé en système du premier ordre. Comme il est possible de généraliser le procédé employé à un système de dimension et d'ordre quelconques, on peut donc restreindre la théorie des systèmes d'éq. différentielles à celle des systèmes du premier ordre.

Systèmes d'éq. différentielles du premier ordre linéaires

Lorsqu'un système du premier ordre a la forme suivante :

$$y'_1 = a_{11}(x) \cdot y_1 + \dots + a_{1n}(x) \cdot y_n + s_1(x)$$
$$\dots$$
$$\wedge\ y'_n = a_{n1}(x) \cdot y_1 + \dots + a_{nn}(x) \cdot y_n + s_n(x)$$

où les fonctions $a_{ik}(i, k \in \{1, \dots, n\})$ sont toutes réelles, définies et continues sur I_x, on dit que le système est *linéaire*.

Il est commode d'écrire un système de ce type sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) \dots a_{1n}(x) \\ \dots \quad\quad \dots \\ a_{n1}(x) \dots a_{nn}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1(x) \\ \dots \\ s_n(x) \end{pmatrix}$$

i.e. $\boldsymbol{y}' = A(x) \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}(x)$, où $x \in I_x$ et $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_n)$. $A(x)$ est la *matrice des coefficients*, et $\boldsymbol{s}$ la *fonction vectorielle* dite *de perturbation*. Si $\boldsymbol{s}$ n'est pas la fonction nulle, on parle d'un système *non homogène*, sinon d'un système *homogène*.

On remarquera que toute solution est nécessairement de classe C^1.

a) Système d'éq. différentielles du premier ordre linéaires homogènes

Toute combinaison linéaire de solutions du système du premier ordre linéaire homogène

$$\boldsymbol{y}' = A(x) \cdot \boldsymbol{y}$$

est encore une solution du système. Les solutions forment donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ continûment dérivables sur I_x.

Si l'on s'intéresse à l'indépendance linéaire des éléments de cet espace vectoriel (*cf.* p. 383), on peut montrer qu'il existe n solutions indépendantes sur $\mathbb{R}$, et que $n + 1$ solutions sont toujours linéairement dépendantes. La dimension de l'espace des solutions est donc n.

Si $\{\boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_n\}$ est un *système fondamental de solutions*, c.-à-d. une base, alors la *solution générale* s'écrit :

$$\boldsymbol{F} = c_1 \cdot \boldsymbol{F}_1 + \dots + c_n \cdot \boldsymbol{F}_n, (c_\nu \in \mathbb{R})$$

Pour vérifier que n solutions $\boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_n$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$, on peut, en faisant intervenir les composantes $\boldsymbol{F}_k = (F_{1k}, \dots, F_{nk}), (k \in \{1, \dots, n\})$, passer par la matrice

$$(\boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_n)(x) = (F_{ik}(x)) = \begin{pmatrix} F_{11}(x) \dots F_{1n}(x) \\ \dots \quad\quad \dots \\ F_{n1}(x) \dots F_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

et rechercher son déterminant. S'il existe un $x_0 \in I_x$ tel que le déterminant soit non nul, $\{\boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_n\}$ est un système fondamental. La matrice d'un système fondamental est appelée *matrice fondamentale*. Elle est notée $\mathfrak{F}(x)$ et l'on a de plus $\forall x \in I_x$, $\det \mathfrak{F}(x) \neq 0$.

Si l'on regroupe les réels $c_1, \dots, c_n$ en un n-uplet $\boldsymbol{c}$ de $\mathbb{R}^n$, la solution générale peut alors s'écrire sous la forme matricielle

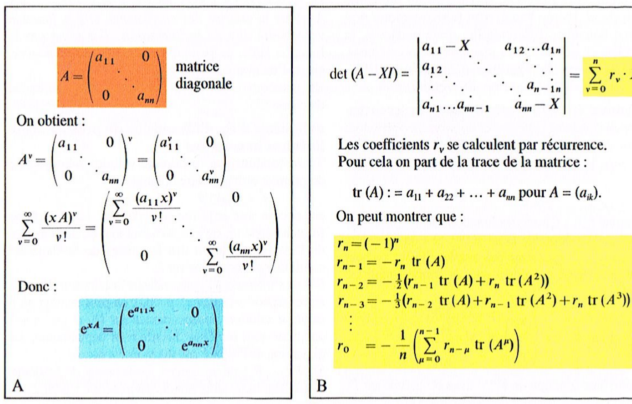
$$\boldsymbol{F}(x) = \mathfrak{F}(x) \cdot \boldsymbol{c}, (\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n).$$

Le système linéaire homogène d'équations différentielles est donc résolu quand on peut trouver une matrice fondamentale. Dans les colonnes de celle-ci, on peut lire n solutions linéairement indépendantes. Voilà pourquoi on résout, au lieu de $\boldsymbol{y}' = A(x) \cdot \boldsymbol{y}$, l'équation $\mathfrak{F}'(x) = A(x) \cdot \mathfrak{F}(x)$, où $\mathfrak{F}'(x)$ est définie comme dans le tableau B. Comme $\mathfrak{F}(x)$, $\mathfrak{F}(x) \cdot C$ sera une matrice fondamentale, à condition que $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ soit régulière (p. 91). On peut montrer que toute matrice fondamentale peut se mettre sous la forme $\mathfrak{F}(x) \cdot C$.

Des définitions et propositions du tableau B on tire le théorème particulier suivant :

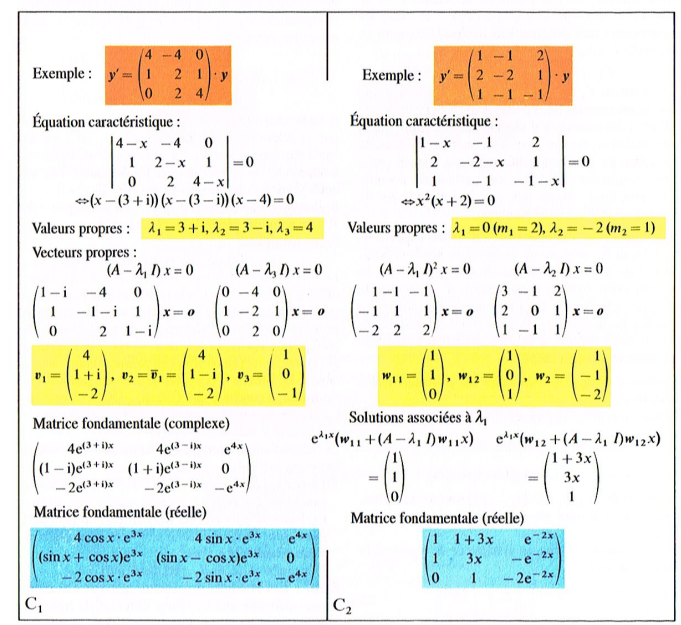
Théorème : *Si, pour le système différentiel linéaire homogène* $\boldsymbol{y}' = A(x) \cdot \boldsymbol{y}$*, on peut trouver une matrice* $B(x)$ *avec* $B'(x) = A(x)$ *et* $B(x) \cdot B'(x) = B'(x) \cdot B(x)$ *pour tout* $x \in I_x$ *alors* $e^{B(x)}$ *est une matrice fondamentale. On a alors :*
$\mathfrak{F}(x) = e^{B(x)} \cdot C \left(C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \det C \neq 0\right)$.

Rem. : Les résultats précédents peuvent s'étendre sans difficulté aux systèmes différentiels linéaires homogènes en la variable réelle x dont la matrice des coefficients $a_{ik}(x)$ est à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.



Exemple de matrice fondamentale

Équation caractéristique



Systèmes différentiels du premier ordre à coefficients constants

Système différentiel du premier ordre linéaire homogène à coefficients constants

Le tableau A_2 p. 384 donne un exemple de ce type de système. De manière générale, il s'agit d'un système de la forme

$$y' = A \cdot y \text{ avec } A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}).$$

On peut le résoudre si l'on en connaît une matrice fondamentale. Or il existe pour A une matrice $B(x)$, définie par $B(x) = x \cdot A$, telle que $B'(x) = A$ et $B(x) \cdot B'(x) = B'(x) \cdot B(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de la p. 385, $e^{x \cdot A}$ est donc une matrice fondamentale, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{F}(x) = e^{x \cdot A} \cdot C, \quad \left(C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \det C \neq 0\right).$$

Si A est diagonale, l'expression développée de $e^{x \cdot A}$ est très simple (tab. A). Sinon les notions de valeur propre et de vecteur propre (*cf.* p. 201) permettent de toute façon d'expliciter $e^{x \cdot A}$, en se ramenant d'ailleurs bien souvent au « cas diagonal ».

Valeurs propres, vecteurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$: on appelle *valeurs propres* de A les solutions de l'*équation caractéristique* $\det(A - xI) = 0$, prises dans $\mathbb{C}$.

Comme le polynôme correspondant $\det(A - XI)$ (*cf.* tab. B) est de degré n et se décompose complètement dans $\mathbb{C}[X]$ (p. 96), la somme des ordres de multiplicité de ses racines dans $\mathbb{C}$ vaut n. On a donc des valeurs propres *réelles* ou *non réelles*, *simples* ou *multiples* pour la matrice A. Si λ est une valeur propre non réelle, alors son complexe conjugué $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre, avec le même ordre de multiplicité.

Si λ est une valeur propre de la matrice A, alors le système d'équations $(A - \lambda I) \cdot x = 0$ admet des solutions non nulles dans $\mathbb{C}^n$, puisque $\det(A - \lambda I) = 0$. Chacune de ces solutions est appelée *vecteur propre* de A associé à la valeur propre λ.

Les vecteurs propres associés à une valeur propre réelle peuvent, sans restriction, être pris dans $\mathbb{R}^n$. Si $v \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\bar{v}$ (vecteur obtenu en conjugant les composantes complexes de v) est un vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$.

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes de A sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^n$. Si λ est une valeur propre d'ordre m, il y a au plus m vecteurs propres associés à λ linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^n$. Plus précisément l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ, complété par 0, est un sous-espace de dimension $\leq m$ dans $\mathbb{C}^n$ (sous-espace propre associé à λ).

Matrice fondamentale

(1) Il est facile de montrer que pour chaque valeur propre λ de A et pour chaque vecteur propre v associé à λ, la fonction définie par $e^{\lambda x} \cdot \boldsymbol{v}$ est une solution, éventuellement complexe, de $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$.

Si les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A sont *toutes simples*, avec pour vecteurs propres associés $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ (qui sont donc linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^n$), alors la matrice

$$(e^{\lambda_1 x} \cdot \boldsymbol{v}_1, \ldots, e^{\lambda_n x} \cdot \boldsymbol{v}_n)$$

dont les colonnes valent $e^{\lambda_\nu x} \cdot \boldsymbol{v}_\nu$, est une *matrice fondamentale*, éventuellement *complexe*, de $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$.

Si certaines valeurs propres ne sont pas réelles, il est préférable de la transformer en matrice fondamentale réelle. Sans restreindre le cas général, on peut supposer que $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2k}$ sont les valeurs propres de A, groupées de telle sorte que $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \ldots \lambda_{2k} = \bar{\lambda}_{2k-1}$. On remplace ensuite les $2k$ premières colonnes de la matrice précédente par

Re $(e^{\lambda_1 x} \cdot \boldsymbol{v}_1)$, Im $(e^{\lambda_1 x} \cdot \boldsymbol{v}_1)$ …, Re $(e^{\lambda_{2k-1} x} \cdot \boldsymbol{v}_{2k-1})$, Im $(e^{\lambda_{2k-1} x} \cdot \boldsymbol{v}_{2k-1})$,

ce qui permet d'obtenir une *matrice fondamentale réelle* de $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$. La partie réelle (resp. imaginaire) d'un vecteur est définie à partir de ses composantes.

Ex. : tableau C_1.

(2) C'est le cas où des valeurs propres sont *multiples*. La situation est alors plus compliquée, car on ne peut pas toujours trouver n vecteurs propres indépendants. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres de A et m_i leurs ordres de multiplicité $\left(\sum_{i=1}^{s} m_i = n\right)$; on montre alors que la formule

$$e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{\nu=0}^{m_i - 1} \frac{(A - \lambda_i I)^\nu \cdot \boldsymbol{w}_i}{\nu!} x^\nu \;/\; (i \in \{1, \ldots, s\}),$$

dans laquelle $\boldsymbol{w}_i$ est un vecteur non nul satisfaisant l'équation vectorielle $(A - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = 0$, définit une solution non nulle, éventuellement complexe, de $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$. Comme pour chaque i il y a m_i solutions de ce type indépendantes et comme les λ_i sont distincts deux à deux, on obtient en tout n solutions indépendantes de $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$, qui forment une matrice fondamentale éventuellement complexe.

La transformation en matrice fondamentale réelle se fait ensuite comme dans la partie (1).

Ex. : tableau C_2.

b) Système d'équations différentielles du premier ordre linéaire, non homogène

Soit $\boldsymbol{F}_p$ une *solution particulière* quelconque du système différentiel linéaire non homogène

$$\boldsymbol{y}' = A(x) \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}(x),$$

alors la solution générale s'écrit

$$\boldsymbol{F}_{ih}(x) = \boldsymbol{F}_p(x) + \mathfrak{F}(x) \cdot \boldsymbol{c} \qquad (\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n),$$

où $\mathfrak{F}(x)$ est une matrice fondamentale du système homogène associé $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$.

Pour trouver une solution particulière, on peut par exemple poser $\boldsymbol{F}_p(x) = \mathfrak{F}(x)\, \boldsymbol{v}(x)$, que l'on porte dans l'équation différentielle non homogène en calculant $\boldsymbol{v}$ pour qu'elle soit satisfaite (méthode de *variation de la constante*). On obtient alors

$$\boldsymbol{F}_{ih}(x) = \mathfrak{F}(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \mathfrak{F}(t)^{-1} \boldsymbol{s}(t)\, dt + \mathfrak{F}(x) \cdot \boldsymbol{c}$$

Rem. : L'intégrale qui apparaît est définie comme dans le tableau B p. 384.

Problème aux conditions initiales

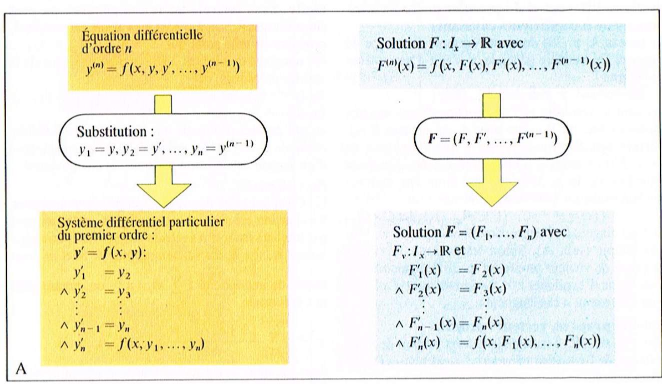
Pour un problème aux conditions initiales $\left((x_0, y_0) \in D\right)$, on doit avoir :

$$\boldsymbol{F}_A(x) = \mathfrak{F}(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \mathfrak{F}(t)^{-1} \boldsymbol{s}(t)\, dt + \mathfrak{F}(x) \cdot \boldsymbol{c}$$

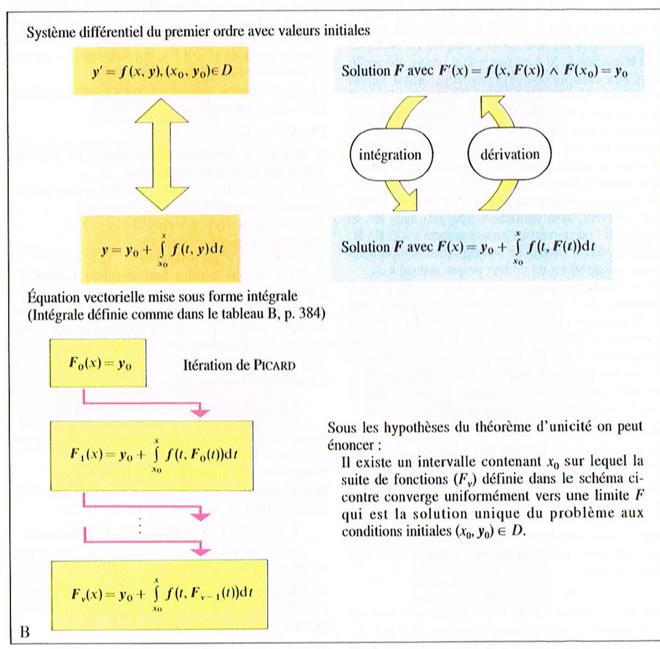
et $\boldsymbol{F}_A(x_0) = \boldsymbol{y}_0$.

En introduisant x_0 dans la première équation on trouve $\boldsymbol{c} = \mathfrak{F}(x_0)^{-1} \cdot \boldsymbol{y}_0$. On en déduit la solution unique du problème aux conditions initiales :

$$\boldsymbol{F}_A(x) = \mathfrak{F}(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \mathfrak{F}(t)^{-1} \boldsymbol{s}(t)\, dt + \mathfrak{F}(x) \cdot \mathfrak{F}(x_0)^{-1} \cdot \boldsymbol{y}_0.$$



Équation différentielle d'ordre n et système différentiel d'ordre 1



Itération de Picard

Dans les pages précédentes concernant les équations et les systèmes différentiels, on a laissé de côté certains résultats d'existence et d'unicité en résolvant, éventuellement de façon unique, des problèmes aux conditions initiales.
Pour démontrer ces résultats, il est utile de transformer les équations différentielles d'ordre n, données explicitement, en systèmes différentiels du premier ordre (fig. A). De la même manière, on peut écrire les systèmes différentiels d'ordre supérieur à 1 sous la forme de systèmes du premier ordre (p. 385). Il est donc suffisant d'énoncer les théorèmes d'existence et d'unicité dans le cas de systèmes différentiels du premier ordre.
On considérera donc des systèmes de la forme (*cf.* p. 385)

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}),$$

dans laquelle $\mathbf{f}$ est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et donnée par ses composantes $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$.
Pour $n = 1$, il s'agit d'une équation du premier ordre explicite :

$$y' = f(x, y), \quad f : D \to \mathbb{R}\ (D \subseteq \mathbb{R}^2).$$

Th. d'existence

La question de l'existence d'une solution peut se poser ainsi :

Quelles sont des conditions sur $\mathbf{f}$ permettant de trouver une solution d'un problème aux conditions initiales $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ données?

Dans ce cas, on ne s'intéresse donc pas à la « taille » de l'intervalle de définition d'une solution. La méthode permettant de prolonger les solutions sur des intervalles plus étendus sera traitée à part (problème du prolongement, *cf.* ci-dessous).
Une réponse à la question de l'existence est donnée par le

Th. d'existence de Peano

Si $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ est un système différentiel dans lequel $\mathbf{f}$ est continue sur D (domaine de $\mathbb{R}^{n+1}$), alors tout problème aux conditions initiales $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ possède une solution.

La continuité de $\mathbf{f}$ est donc suffisante pour prouver l'existence d'une solution à tout problème aux conditions initiales, mais *elle ne l'est pas* pour assurer l'*unicité* de cette solution, comme l'illustre l'exemple de la figure C_1 p. 374.

Th. d'unicité

La question de l'unicité se pose ainsi :

Quelles sont des conditions sur $\mathbf{f}$ permettant de trouver, pour tout problème aux conditions initiales $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ données, un intervalle I_x et une solution unique définie sur I_x ?

Ici encore, on ne s'intéresse pas à la taille de l'intervalle. Pour résoudre le problème de l'unicité, il faut certainement rechercher une condition plus forte que la continuité de $\mathbf{f}$. Une condition suffisante, mais non nécessaire, est la condition locale de Lipschitz, à laquelle il faut ajouter la continuité de $\mathbf{f}$.

Déf. : $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ est *globalement lipschitzienne* sur D (domaine de $\mathbb{R}^{n+1}$) si et seulement s'il existe $S \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $(x, \mathbf{y})$, $(x, \hat{\mathbf{y}})$ éléments de D on ait $|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \hat{\mathbf{y}})| \leq S \cdot |\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}|$.

$\mathbf{f}$ est *localement lipschitzienne* sur D, si pour tout $(x, \mathbf{y}) \in D$ on peut trouver un voisinage ouvert connexe de $(x, \mathbf{y})$ dans D sur lequel la condition globale de Lipschitz est satisfaite.

Si la condition globale de Lipschitz est satisfaite, alors la condition locale l'est aussi.
On en déduit le théorème suivant:

Th. d'unicité : *Soit $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ un système différentiel du premier ordre, avec $\mathbf{f}$ continue et localement lipschitzienne sur le domaine D ; alors tout problème aux conditions initiales $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ possède une unique solution définie sur un certain intervalle I_x.*

Rem. : Pour démontrer ce théorème, on utilise le *procédé d'itération de* Picard (fig. B).

En pratique, pour s'assurer du caractère lipschitzien de $\mathbf{f}$, on peut utiliser le théorème suivant, applicable dans les cas les plus courants :

Th. : *Si $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ possède sur D des dérivées partielles par rapport à chacune des composantes $y_1, \ldots, y_n$ de $\mathbf{y}$, continues sur D, alors $\mathbf{f}$ est localement lipschitzienne sur D.*

Vérifier la continuité de $\mathbf{f}$ et celle de ses dérivées partielles en y_i sur D suffit donc à assurer l'existence et l'unicité de la solution sur un certain intervalle de tout problème aux conditions initiales. Si l'on applique cela au cas d'une équation différentielle d'ordre n, cela revient à vérifier la continuité de f,

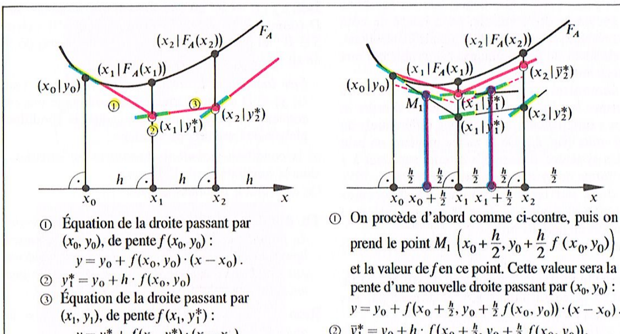
$$\frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}.$$

Pour les *systèmes différentiels linéaires* du premier ordre, et donc aussi pour les *équations différentielles linéaires* d'ordre n, des vérifications de ce type deviennent inutiles, car la continuité des fonctions coefficients et celle de la fonction de perturbation sur un intervalle commun I_x suffisent à assurer l'existence et l'unicité de la solution sur I_x de tout problème aux conditions initiales.

Prolongement

Si l'on exclut le cas des systèmes différentiels linéaires du premier ordre pour lesquels ne se pose aucun problème de prolongement, les théorèmes d'existence et d'unicité ne donnent aucune indication sur la façon de prolonger une solution en dehors de l'intervalle théorique qui peut être très petit. Mais on peut, sous les hypothèses du théorème d'unicité (*cf.* ci-dessus), montrer que pour tout problème aux conditions initiales, il existe un intervalle ouvert maximal sur lequel on peut prolonger de façon unique la solution du problème.

On notera que cet intervalle peut être borné même si f est de classe infinie sur $\mathbb{R}^2$ (*ex.* : $y' = 1 + y^2$).



① Équation de la droite passant par (x_0, y_0), de pente $f(x_0, y_0)$:

$$y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0).$$

② $y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$

③ Équation de la droite passant par (x_1, y_1), de pente $f(x_1, y_1^*)$:

$$y = y_1^* + f(x_1, y_1^*) \cdot (x - x_1),$$

etc.

$$y_{v+1}^* = y_v^* + h \cdot f(x_v, y_v^*)$$

A₁ $(v \in \mathbb{N}, x_{v+1} - x_v = h, y_0^* = y_0)$

① On procède d'abord comme ci-contre, puis on prend le point $M_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)\right)$ et la valeur de f en ce point. Cette valeur sera la pente d'une nouvelle droite passant par (x_0, y_0) :

$$y = y_0 + f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} f(x_0, y_0)) \cdot (x - x_0).$$

② $\bar{y}_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} f(x_0, y_0)),$

etc.

$$\bar{y}_{v+1}^* = \bar{y}_v^* + \tfrac{h}{2} \cdot f(x_v + \tfrac{h}{2}, \bar{y}_v^* + \tfrac{h}{2} f(x_v, \bar{y}_v^*)).$$

A₂ $(v \in \mathbb{N}, x_{v+1} - x_v = h, \bar{y}_0^* = y_0)$

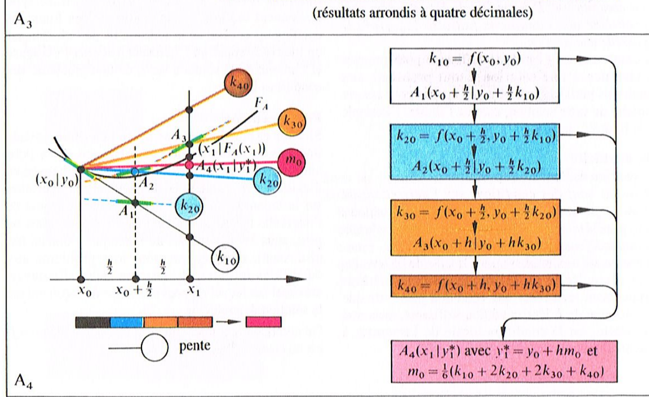
$y' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 2.$

$F_A(0) = 0,$
$F_A(x) = x + 4 - 4e^{-\frac{1}{4}x}$
(fig. A, p. 376)

x_v \ y_v^*	Méthode d'EULER-CAUCHY $h = 0{,}5$	Méthode d'EULER-CAUCHY $h = 0{,}1$	Amélioration $h = 0{,}1$	Méthode de RUNGE-KUTTA $h = 0{,}1$	$F_A(x_v)$
0	0	0	0	0	0
0,1	—	0,2000	0,1988	0,1988	0,1988
0,2	—	0,3975	0,3951	0,3951	0,3951
0,3	—	0,5925	0,5890	0,5890	0,5890
0,4	—	0,7852	0,7806	0,7807	0,7807
0,5	1,0000	0,9756	0,9700	0,9700	0,9700
0,6	—	1,1637	1,1571	1,1572	1,1572
0,7	—	1,3496	1,3421	1,3422	1,3422

(résultats arrondis à quatre décimales)

A₃



A₄

Méthodes numériques

La résolution d'équations différentielles, même du premier ordre, peut se révéler fort difficile. C'est pourquoi il est important de connaître des méthodes d'approximation des solutions.
Les méthodes du type décrit dans la figure B p. 376 n'ayant qu'un domaine d'application très limité, et les procédés graphiques restant très imprécis, il faut rechercher des algorithmes susceptibles d'être utilisés par une machine et capables de donner les résultats avec une précision donnée.

Méthodes numériques

On n'abordera dans la suite que le cas d'équations différentielles du premier ordre ; ce n'est pas une restriction essentielle, dans la mesure où les procédés présentés s'étendent aux systèmes différentiels du premier ordre, et permettent donc aussi de traiter numériquement les équations différentielles d'ordre supérieur.
On supposera toujours, pour l'équation $y' = f(x, y)$, que le problème aux conditions initiales $(x_0, y_0) \in D$ admet une solution unique. La solution d'origine (x_0, y_0) dans l'intervalle I_x sera notée F_A. Les méthodes numériques doivent donc, partant de (x_0, y_0) et de $y' = f(x, y)$, conduire à des points (x_v, y_v^*) tels que l'on ait $y_v^* \approx F_A(x_v)$ avec une précision donnée. À ces points on pourra ensuite appliquer les méthodes des pp. 313 sqq.
On distingue parmi les méthodes les *procédés de départ*, qui donnent les premiers points, et les *procédés de raccordement*, qui, à partir des points donnés par les procédés de départ, conduisent à de nouveaux points par l'intermédiaire de peu de calculs. Comme exemples de procédés de départ on peut citer ceux d'EULER-CAUCHY et de RUNGE-KUTTA, comme exemple de procédé de raccordement celui de MILNE.

Méthode d'EULER-CAUCHY

Cette méthode, décrite dans la figure A₁, consiste à approcher le graphe de la fonction F_A par une ligne brisée. Le *calcul par récurrence*

$y_{v+1}^* = y_v^* + h \cdot f(x_v, y_v^*)$, $(y_0^* = y_0, v \in \mathbb{N})$

conduit évidemment à une erreur absolue qui croît avec l'indice. On peut compenser ce défaut en prenant un pas h plus petit, mais le nombre d'opérations à effectuer augmente alors considérablement.

Ex. : $y' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 2,$

$$y_{v+1}^* = \frac{1}{4}(h \cdot x_v + (4-h) y_v^* + 8h) \text{ (fig. A}_3\text{)}.$$

On peut opérer avec un pas plus grand, et donc avec moins d'étapes de calcul, en utilisant une des *améliorations du procédé*, par exemple (voir fig. A₂)

$$\bar{y}_{v+1}^* = \bar{y}_v^* + hf\left(x_v + \frac{h}{2}, \bar{y}_v^* + \frac{h}{2} f(x_v, \bar{y}_v^*)\right).$$

Ex. : $y' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 2,$

$$\bar{y}_{v+1}^* = \frac{(8h - h^2)x_v + (32 - 8h + h^2)\bar{y}_v^* + 64h - 4h^2}{32}.$$

Méthode de RUNGE-KUTTA

Cette méthode, qui dans le cas où $f(x, y) = f(x)$ s'identifie à la règle de KEPLER (p. 340), consiste à utiliser la formule de récurrence suivante

$$y_{v+1}^* = y_v^* + h \cdot \frac{1}{6}(k_{1v} + 2k_{2v} + 2k_{3v} + k_{4v}),$$

$(y_0^* = y_0, v \in \mathbb{N})$

avec $k_{1v} = f(x_v, y_v^*)$

$$k_{2v} = f\left(x_v + \frac{h}{2}, y_v^* + \frac{h}{2} k_{1v}\right),$$

$$k_{3v} = f\left(x_v + \frac{h}{2}, y_v^* + \frac{h}{2} k_{2v}\right),$$

$$k_{4v} = f\left(x_v + \frac{h}{2}, y_v^* + \frac{h}{2} k_{3v}\right).$$

Ex. : tableau A₃.
Il est intéressant de justifier la formule au moins pour le cas $v = 0$.Comme dans la méthode d'EULER-CAUCHY, on veut approcher la valeur de $F_A(x_1)$ pour $x_1 - x_0 = h$ donné. Si l'on suppose que les fonctions utilisées sont développables en séries de TAYLOR, on peut écrire

$$F_A(x_1) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} F_A^{(\mu)}(x_0) \cdot (x_1 - x_0)^\mu, \text{ i.e.}$$

$$F_A(x_1) = y_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} h^\mu \cdot F_A^{(\mu)}(x_0).$$

Le calcul explicite des dérivées successives $F_A^{(\mu)}(x_0)$ n'est malheureusement pas simple, à cause du nombre vite important de termes à calculer. On recherche donc un procédé permettant de calculer implicitement un grand nombre de dérivées, et ce seulement à partir de valeurs de la fonction f. On obtient un résultat de ce type en définissant une pente barycentrique de la droite passant par (x_0, y_0) et (x_1, y_1^*) :

$$m_0 := \frac{1}{6}(k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40}),$$

et en calculant la valeur approchée de y par :

$$y_1^* = y_0 + h \cdot m_0 \text{ (fig. A}_4\text{)}.$$

Si on développe $y_0 + h \cdot m_0$ en série entière, on constate que la série ne diffère de celle de $F_A(x_1)$ donnée plus haut qu'à partir du sixième terme (termes en $h^5, h^6, \ldots$).
Quand on veut calculer plusieurs valeurs approchées par la méthode de RUNGE-KUTTA, on peut réduire le nombre d'opérations en utilisant un procédé de raccordement comme celui de MILNE donné ci-dessous.

Procédé de MILNE

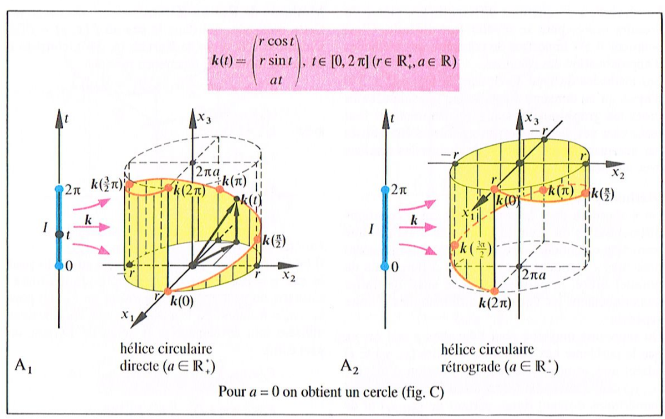
Le procédé de MILNE part de la supposition que trois valeurs approchées, par exemple y_1^*, y_2^* et y_3^*, ont déjà été calculées avec une précision suffisante.On calcule alors la quatrième par la formule suivante

$$y_4^* = y_0 + \frac{4h}{3}(2l_1 - l_2 + 2l_3),$$

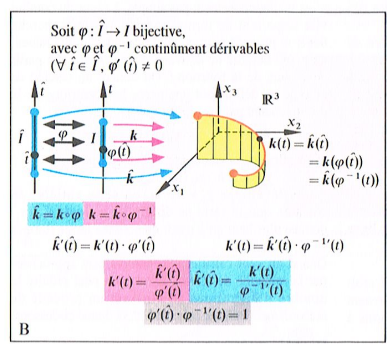
où l'on a $l_i = f(x_i, y_i^*)$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$.
On peut avoir une idée de l'erreur commise sur y_4^* en le comparant à

$$y_4^{**} = y_2 + \frac{h}{3}(l_2 + 4l_3 + l_4), \qquad l_4 = f(x_4, y_4^*).$$

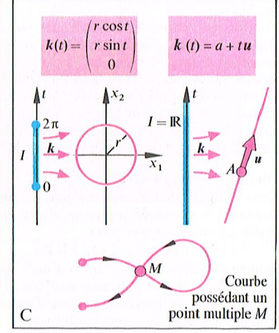
On calculera ensuite $y_5^*, y_6^*, \ldots$ de façon analogue.



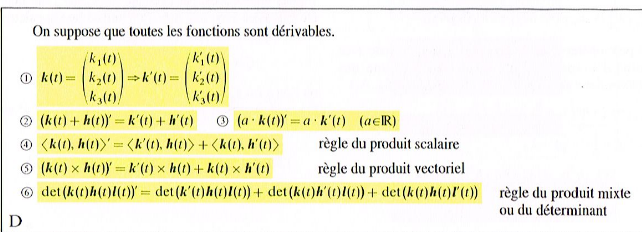
Arcs de courbes, représentation paramétrique d'hélices circulaires et de cercle



Changement de paramètre admissible



Courbes



Règles de dérivation

Généralités

Comme son nom l'indique, la géométrie différentielle est une discipline qui, au moyen de notions et de méthodes issues du calcul différentiel et du calcul intégral, étudie les propriétés géométriques d'ensembles particuliers de points de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$, et le cas échéant de $\mathbb{R}^n$.

On étudiera dans les pages qui suivent, d'une part les courbes (arcs de courbes, pp. 392-403), d'autre part les surfaces (nappes régulières, pp. 404-417). On verra que certaines courbes tracées sur une surface sont fondamentales pour l'étude de celle-ci. On ne présentera intégralement que la géométrie différentielle locale, i.e. l'étude des propriétés au voisinage d'un point ; la géométrie différentielle globale ne sera qu'occasionnellement abordée.

L'étude locale est étayée par l'introduction, en un point, de la tangente à une courbe, et du plan tangent à une surface.

Afin que la présentation, déjà très condensée, reste lisible, on n'utilisera pas l'écriture tensorielle. On a cependant ajouté quelques notions sur les tenseurs (p. 418 sq.) et sur la géométrie riemannienne.

Notion de courbe en géométrie différentielle

La notion générale de courbe telle qu'elle a été développée dans le cadre de la topologie (p. 235) ne convient pas aux objectifs de la géométrie différentielle. Il faut adapter la notion d'arc pour en faire un concept utilisable ici. On commence par la notion d'*arc de Jordan* :

Déf. 1 : On désigne par *arc de Jordan dans* $\mathbb{R}^n$ toute partie C de $\mathbb{R}^n$ qui peut être considérée comme l'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par une application continue injective.

Si l'on munit l'espace d'un système de coordonnées cartésiennes, cela revient à l'écriture suivante, en dimension 3 :

$$k : I \to \mathbb{R}^3 \text{ définie par } t \to k(t) = \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ k_3(t) \end{pmatrix},$$

où les k_i sont des fonctions continues du *paramètre* $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $k(t) \neq k(t^*)$ pour $t \neq t^*$.

Le segment $[a, b]$ étant un compact de $\mathbb{R}$ et k étant continue pour la topologie usuelle, l'arc de Jordan C est un compact de $\mathbb{R}^3$: k est une application continue bijective de $[a,b]$ sur C, donc k^{-1} est continue. Si $\hat{k}$ est un autre paramétrage continu de C, défini sur $[\hat{a}, \hat{b}]$, $k^{-1} \circ \hat{k}$ est une bijection bicontinue de $[\hat{a}, \hat{b}]$ sur $[a, b]$, donc un homéomorphisme de segments (on rappelle qu'un homéomorphisme de segments est défini par une fonction continue strictement monotone). Réciproquement si φ est un homéomorphisme d'un segment $[\hat{a}, \hat{b}]$ sur le segment $[a, b]$, $k \circ \varphi$ définit un autre paramétrage continu de C. On remarquera que l'ensemble $\{k(a), k(b)\}$ est globalement conservé par changement de paramétrage continu. Les deux points $k(a)$ et $k(b)$ s'appellent les extrémités de l'arc de Jordan C.

On va maintenant vers des concepts plus généraux.

Déf. 2 : On appelle *arc paramétré* de classe C^r tout couple (I, k) d'un intervalle quelconque $I \subset \mathbb{R}$ et d'une application k de I dans $\mathbb{R}^3$, de classe C^r $(r \in \mathbb{N})$.

Un arc paramétré n'est pas une partie de $\mathbb{R}^3$. Si I est un segment et si k est injective, $Im\ k$ est un arc de Jordan, puisque k est au moins continue.

Si (I, k) et (J, h) sont deux arcs paramétrés de classe C^r, on dit que le second est équivalent au premier s'il existe un difféomorphisme φ de classe C^r de J sur I tel que $h = k \circ \varphi$. Il s'agit d'une relation d'équivalence. (On rappelle qu'un difféomorphisme de classe C^r de J sur I est un homéomorphisme de J sur I, r fois continûment dérivable si $r > 0$, et qu'il en est de même pour φ^{-1} de I sur J.)

Déf. 3 : Une classe d'équivalence d'arcs paramétrés de classe C^r s'appelle *arc géométrique de classe* C^r, et tout représentant d'un arc géométrique Γ de classe C^r porte le nom de *paramétrage admissible de* Γ. Si $(I, k) \in \Gamma$, $Im\ k$ ne dépend pas du choix de (I, k) dans Γ. C'est l'image de Γ : elle est nécessairement connexe.

Déf. 4 : Si (I, k) est un paramétrage admissible de Γ et si $M \in Im(\Gamma)$, le cardinal de l'ensemble $k^{-1}(M)$ est indépendant du choix de (I, k). S'il vaut 1, on dit que M est *simple* ; s'il vaut p entier > 1, on dit que M est *multiple d'ordre p*. Un arc géométrique est simple si tous les points de son image sont simples, c.-à-d. s'il admet un paramétrage admissible injectif (alors tous les paramétrages admissibles sont injectifs). L'image d'un arc géométrique simple s'appelle un *arc simple* (fig. C). Un arc de Jordan est un arc simple.

Déf. 5 : On appelle *courbe de Jordan* ou *courbe fermée simple* l'image d'un arc géométrique $[\![([a, b], k)]\!]$ tel que d'une part $k(a) = k(b)$ et que, d'autre part, la restriction de k à $[a, b[$ soit injective. Une telle courbe est homéomorphe à un cercle (fig. C).

Déf. 6 : Ici α et β peuvent être infinis. Un arc géométrique est dit C^r *par morceaux* s'il admet un paramétrage admissible $((\alpha, \beta), k)$, k étant nécessairement continue, tel qu'il existe une subdivision finie de (α, β), $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{q-1} < t_q = \beta$ pour laquelle les restrictions de k aux intervalles $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{q-1}, t_q]$ sont toutes de classe C^r (la propriété reste valable pour tout changement de paramétrage admissible $t = \varphi(\lambda)$ de classe C^r).

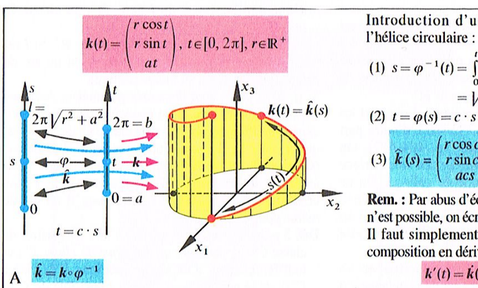
Déf. 7 : Un *chemin* est un arc géométrique $[\![([a, b], k)]\!]$ où k est C^1 par morceaux sur le segment $[a, b]$.

Déf. 8 : Un *arc de courbe* est l'image d'un arc géométrique $[\![(I, k)]\!]$ ayant un nombre fini de points multiples, ceux-ci étant tous d'ordre fini.

Un arc de courbe L est donc une réunion finie d'arcs simples $A_1, \ldots, A_q$ ne pouvant se rencontrer qu'en leurs extrémités. Pour tout $M_0 \in L$ et tout t_0 tel que $M_0 = k(t_0)$, il existe $\eta > 0$ tel que $([t_0 - \eta, t_0 + \eta] \cap I, k)$ définisse un arc simple.

Déf. 9 : Une *courbe* est une réunion au plus dénombrable d'arcs de courbe (*ex. :* courbe représentative de la fonction tangente).

Rem. : Le tableau D présente quelques règles de dérivation importantes et faciles à vérifier.



Introduction d'un paramétrage normal de l'hélice circulaire :

(1) $s = \varphi^{-1}(t) = \int_0^t \sqrt{\langle k'(\mu), k'(\mu)\rangle}\, d\mu = \sqrt{r^2+a^2} \cdot t$

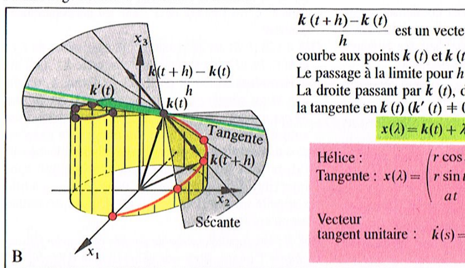
(2) $t = \varphi(s) = c \cdot s$ avec $c = (r^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}$

(3) $\hat{k}(s) = \begin{pmatrix} r\cos cs \\ r\sin cs \\ acs \end{pmatrix} = k(s)$

Rem. : Par abus d'écriture, quand aucune confusion n'est possible, on écrit $k(s)$ au lieu de $\hat{k}(s)$.
Il faut simplement faire attention à la règle de composition en dérivant ; si s croît avec t, on a :

$$k'(t) = \dot{k}(s) \cdot s'(t) = \dot{k}(s) \cdot |k'(t)| .$$

Paramétrage normal d'une hélice circulaire



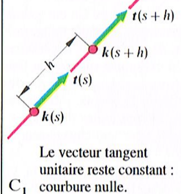
$\dfrac{k(t+h) - k(t)}{h}$ est un vecteur directeur de la sécante à la courbe aux points $k(t)$ et $k(t+h)$.
Le passage à la limite pour $h \to 0$ donne $k'(t)$.
La droite passant par $k(t)$, de vecteur directeur $k'(t)$, est la tangente en $k(t)$ ($k'(t) \neq 0$) :

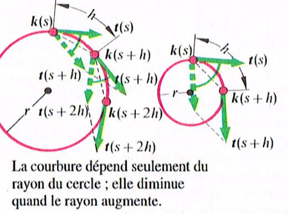
$$x(\lambda) = k(t) + \lambda \cdot k'(t), \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Hélice :
Tangente : $x(\lambda) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ at \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ a \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Vecteur tangent unitaire : $\dot{k}(s) = t(s) = \begin{pmatrix} -rc\sin cs \\ rc\cos cs \\ ac \end{pmatrix}$

Tangente





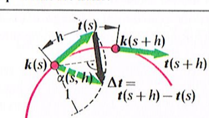


Le vecteur tangent unitaire reste constant : courbure nulle.

La courbure dépend seulement du rayon du cercle ; elle diminue quand le rayon augmente.

La courbure varie le long de la courbe.

C_1



$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\alpha(s,h)}{h}$ est une mesure de la courbure en $k(s)$.

Comme $|\Delta t| = 2\sin\dfrac{\alpha(s,h)}{2}$ on obtient :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(s,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}\alpha(s,h)}{\sin\frac{1}{2}\alpha(s,h)} \cdot \frac{|\Delta t|}{h}\right) = 1 \cdot |\dot{t}(s)| = |\ddot{k}(s)| .$$

Ce résultat est utilisé comme définition de la courbure.

C_2

Courbure de l'hélice :

$$\ddot{k}(s) = \begin{pmatrix} -rc^2\cos cs \\ -rc^2\sin cs \\ 0 \end{pmatrix}, c = (r^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow |\ddot{k}(s)| = \frac{r}{r^2+a^2}$$

Courbure du cercle :

$$\ddot{k}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}\cos\frac{1}{r}s \\ -\frac{1}{r}\sin\frac{1}{r}s \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\ddot{k}(s)| = \frac{1}{r}$$

C_3

Courbure

Orientation d'un arc de Jordan

Soit $([a, b], k)$ un paramétrage admissible d'un arc de Jordan C, d'extrémités $A = k(a)$, $B = k(b)$. Ce paramétrage induit sur C un ordre total par $M \leq \widehat{M}$ si, et seulement si, $k^{-1}(M) \leq k^{-1}(\widehat{M})$: si t croît de a vers b, $M = k(t)$ parcourt C de A vers B. Si on change de paramétrage admissible, $k = h \circ \varphi$ et si $\lambda = \varphi(t)$ est croissante, le sens de parcours, c.-à-d. l'ordre induit sur C, est le même (lorsque λ croît, M va de A vers B). En revanche, si φ est décroissante, le parcours se fera en sens contraire : lorsque λ croît, M va de B vers A : on trouve l'ordre opposé. Il y a donc *deux orientations possibles*. Cette propriété d'orientation se généralise aux arcs simples.

Arcs géométriques réguliers

Soit (I, k) un paramétrage admissible d'un arc géométrique de classe C^r. S'il existe $p \leq r$ tel que, quel que soit $t \in I$, les vecteurs $k'(t),\ldots, k^{(p)}(t)$ soient linéairement indépendants, la propriété se transmet par changement de paramétrage admissible de classe C^r. On dit que l'arc géométrique est *p-régulier*. De plus, quel que soit $t \in I$, quel que soit $q \leq p$, le sous-espace vectoriel $V(t, q) = \mathrm{Vec}\left(k'(t),\ldots, k^{(q)}(t)\right)$ est invariant par changement de paramétrage admissible de classe r. Ce sous-espace s'appelle sous-espace vectoriel *caractéristique* d'ordre q au point $M(t)$. Il est de dimension q.

Un paramétrage intrinsèque : l'abscisse curviligne

Si on se place dans un espace euclidien, la longueur d'un arc de Jordan d'extrémités A et B, orienté de A vers B, est, si elle existe, la borne supérieure de l'ensemble des longueurs $\sum_{i=0}^{p-1} \left|\overrightarrow{M_iM_{i+1}}\right|$ des lignes polygonales inscrites dans l'arc dont les sommets consécutifs M_i sont tels que
$A = M_0 < M_1 \ldots < M_{p-1} < M_p = B$. Si cette borne $L(\widehat{AB})$ existe, on dit que l'arc est rectifiable : $L(\widehat{AB})$ est indépendante de l'orientation de l'arc ; elle vérifie la relation de Chasles : si $A < M < B$, les arcs $\widehat{AM}$ et $\widehat{MB}$ sont rectifiables et $L(\widehat{AB}) = L(\widehat{AM}) + L(\widehat{MB})$. $L(\widehat{AB})$ est évidemment indépendante, de par sa définition, du paramétrage admissible.
Une condition suffisante d'existence de $L(\widehat{AB})$ est que l'arc de Jordan soit C^1 par morceaux. Pour un arc de classe C^1, défini par $([a, b], k)$,

$$L(\widehat{AB}) = \int_a^b |k'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\langle k'(t), k'(t)\rangle}\,dt .$$

On peut alors introduire une *abscisse curviligne* s sur l'arc, d'origine $M(t_0)$, en posant pour un point M de paramètre t, $s = \varepsilon\int_{t_0}^{t} |k'(\mu)|\,d\mu$, $\varepsilon = +1$ ou -1 selon l'orientation de l'arc $\widehat{AB}$; s sera la longueur positive, ou négative, de l'arc orienté $\widehat{CM}$, selon la position de M par rapport à $M(t_0)$. Comme $\dfrac{ds}{dt} = \varepsilon|k'(t)|$, on voit que si l'arc est 1-régulier, s est un paramètre admissible. Vu sa signification, il joue un rôle intrinsèque à l'arc. On l'appelle *paramètre normal*. Cette notion d'abscisse curviligne s'étend aux arcs simples réguliers. *Ex. :* fig. A.
Si $s \to k(s)$ est un paramétrage normal d'un arc simple 1-régulier, de classe $r > 1$, il est d'usage de noter $\dot{k}(s)$, $\ddot{k}(s)$ les dérivées successives. On a

$$s = \int_0^s |\dot{k}(\mu)|\,d\mu \text{, d'où } |\dot{k}(s)| = 1 .$$

Tangente, vecteur tangent unitaire

La tangente en un point M_0 d'un arc de Jordan est la limite, si elle existe, d'une sécante (M_0M), lorsque M tend vers M_0, $M \neq M_0$. Si (I, k) est un paramétrage admissible, on a $M = k(t)$: alors dire que M tend vers M_0 équivaut à dire que t tend vers t_0, puisque k est bicontinue. Si l'arc est 1-régulier, la sécante qui est dirigée par $\dfrac{k(t) - k(t_0)}{t - t_0}$ aura donc comme direction limite $k'(t_0)$: c'est un vecteur directeur de la tangente. Celle-ci ne dépend pas du paramétrage admissible (premier sous-espace caractéristique).
Si l'arc est paramétré normalement, $t(s) = \dot{k}(s)$ est un vecteur unitaire. Il *oriente* la tangente dans le sens correspondant aux s croissants sur l'arc (deux choix possibles). Toutes ces notions et celles qui suivent sont valables pour un arc simple.

Courbure, vecteur courbure, normale principale

Il s'agit d'étudier ici un arc simple C qui n'est pas rectiligne. On le suppose 1-régulier et de classe C^2 au moins. Pour estimer le « comportement courbe » d'un tel arc, on peut considérer des sous-arcs consécutifs de longueur h assez petite et associer à chacun d'entre eux le quotient par h de l'angle des tangentes à leurs extrémités. Si C est un arc de cercle de rayon R, tous ces quotients valent R^{-1}. Sinon, plus son quotient est élevé, plus l'arc se « courbe » (fig. C_1). Les résultats de la figure C_2 conduisent alors à définir la courbure comme suit :

On appelle *courbure* $\chi(s)$ au point $k(s)$ d'un arc simple paramétré normalement la norme euclidienne de la dérivée seconde de k :

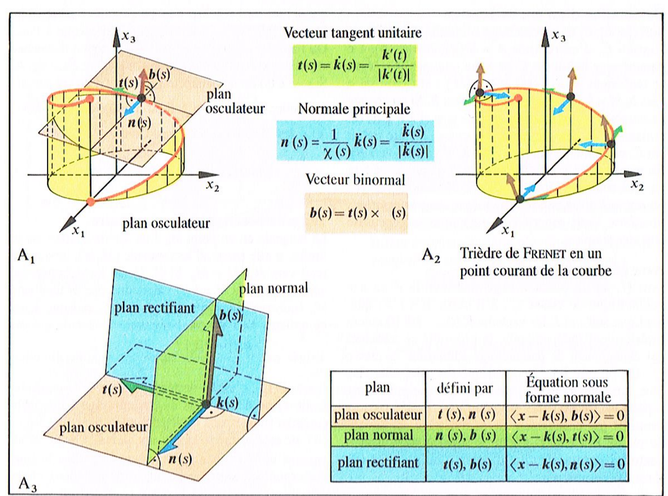
$$\chi(s) = |\ddot{k}(s)|, \text{ i.e } \chi(s)^2 = \langle\ddot{k}(s), \ddot{k}(s)\rangle, \chi(s) \geq 0.$$

$\ddot{k}(s)$ est appelé *vecteur courbure* ; il est *orthogonal* au vecteur tangent $\dot{k}(s)$, car en dérivant $<\dot{k}(s), \dot{k}(s)> = 1$ on obtient $<\dot{k}(s), \ddot{k}(s)> = 0$. Quand $\chi(s) \neq 0$, on obtient un vecteur unitaire en effectuant l'opération :

$$n(s) := \frac{1}{\chi(s)}\ddot{k}(s).$$

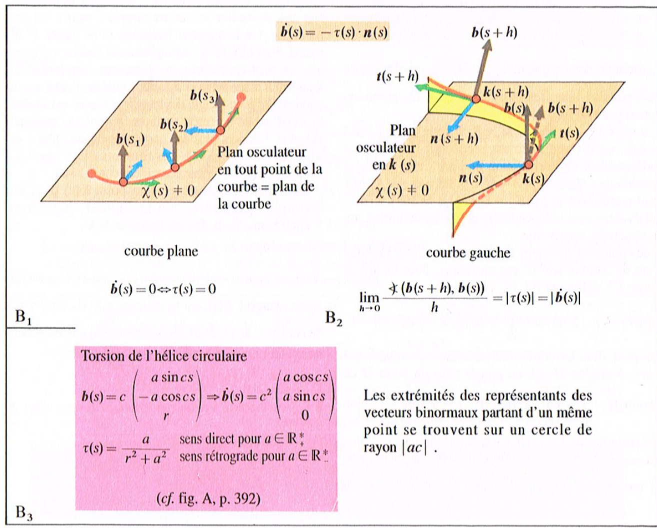
$n(s)$ est appelé *vecteur normal principal* (fig. A p. 396).
On a donc aussi :

$$n(s) = \frac{1}{\chi(s)}\dot{t}(s), \text{ i.e. } \dot{t}(s) = \chi(s) \cdot n(s).$$



plan	défini par	Équation sous forme normale
plan osculateur	$t(s), n(s)$	$\langle x - k(s), b(s) \rangle = 0$
plan normal	$n(s), b(s)$	$\langle x - k(s), t(s) \rangle = 0$
plan rectifiant	$t(s), b(s)$	$\langle x - k(s), n(s) \rangle = 0$

Trièdre de Frenet



Torsion

Cercle de courbure, plan osculateur

On appelle *rayon de courbure* l'inverse $\frac{1}{\chi(s)}$ de la courbure $(\chi(s) \neq 0)$. Cette définition se justifie par le fait qu'en tout point de l'arc simple où la courbure n'est pas nulle, la « meilleure approximation » de l'arc simple par un arc de cercle est obtenue avec un cercle qui a pour rayon le rayon de courbure. On appelle ce cercle *cercle de courbure* ou *cercle osculateur* au point considéré (*cf.* fig. B_3 p. 398). Il se situe dans le plan dit osculateur, défini par la tangente et le vecteur normal principal. Il est centré au point $k(s) + \frac{1}{\chi(s)} n(s)$ (fig. A_1).

Parmi tous les plans qui passent par un point donné de l'arc simple, le plan osculateur est celui qui a le « meilleur contact » avec lui (voir p. 399).

Vecteur binormal, trièdre de Frenet

On peut choisir comme vecteur normal au plan osculateur en un point de l'arc simple le produit vectoriel (p. 193) du vecteur tangent unitaire et du vecteur normal principal en ce point, c.-à-d.

$$b(s) := t(s) \times n(s) \qquad \text{(fig. } A_1\text{)}.$$

On l'appelle *vecteur binormal.*

Les trois vecteurs $t(s)$, $n(s)$ et $b(s)$ forment donc dans cet ordre une *base orthonormale directe*, que l'on appelle *trièdre de Frenet* de l'arc simple (fig. A_2).

Les variations du trièdre de Frenet que l'on observe en parcourant l'arc permettent de caractériser celui-ci (voir plus loin).

Les plans formés par les vecteurs de cette base et passant par le point de l'arc sont, outre le plan osculateur, le *plan normal* (formé par les deux vecteurs normaux) et le *plan rectifiant.*

Formules de Frenet

Pour étudier les variations du trièdre de Frenet lorsque l'on parcourt un arc simple paramétré normalement de classe C^3, le plus simple est d'utiliser les vecteurs $\dot{t}(s)$, $\dot{n}(s)$ et $\dot{b}(s)$. En chaque point de l'arc, on peut exprimer ces dérivées par rapport à s de manière unique dans la base de Frenet :

$$\dot{t}(s) = a_{11}(s)\, t(s) + a_{12}(s)\, n(s) + a_{13}(s)\, b(s),$$

$$\dot{n}(s) = a_{21}(s)\, t(s) + a_{22}(s)\, n(s) + a_{23}(s)\, b(s),$$

$$\dot{b}(s) = a_{31}(s)\, t(s) + a_{32}(s)\, n(s) + a_{33}(s)\, b(s).$$

En multipliant scalairement chacune de ces équations par $t(s)$, $n(s)$ et $b(s)$ et en utilisant les propriétés de ces vecteurs, on obtient :

$$a_{11}(s) = a_{13}(s) = a_{22}(s) = a_{31}(s) = a_{33}(s) = 0,$$
$$a_{12}(s) = -a_{21}(s) = \chi(s),$$
$$a_{23}(s) = -a_{32}(s) = \tau(s),$$

avec $\tau(s)^2 := \langle \dot{b}(s), \dot{b}(s) \rangle$, i.e. $|\tau(s)| = |\dot{b}(s)|$,

où $\chi(s)$ désigne la courbure.

Ce calcul permet d'obtenir les *formules de Frenet*, très importantes dans le cadre de la théorie des courbes :

$$\dot{t}(s) = \chi(s)\, n(s),$$

$$\dot{n}(s) = -\chi(s)\, t(s) + \tau(s)\, b(s),$$

$$\dot{b}(s) = -\tau(s)\, n(s)$$

Reste à interpréter $\tau(s)$.

Torsion d'une courbe

Le réel $\tau(s)$, qui intervient dans les équations de Frenet et que l'on nomme torsion, s'annule sur tout l'intervalle de paramétrage si l'arc est *plan*, comme le montre la troisième équation de Frenet (fig. B_1). Aux points où il ne s'annule pas, il donne une indication sur la façon dont la courbe s'écarte d'une courbe plane. Pour comprendre cela on considère le plan osculateur et le vecteur binormal $b(s)$ au point $k(s)$, ainsi que le plan osculateur et le vecteur binormal $b(s+h)$ au point $k(s+h)$, $h > 0$. On peut alors « mesurer » la différence entre l'arc étudié et un arc plan en prenant le quotient de l'angle des vecteurs $b(s)$ et $b(s+h)$ par la longueur h de l'arc liant $k(s)$ et $k(s+h)$. La valeur limite du rapport, donnée dans la figure B_2, correspond à $|\tau(s)|$. Il est donc logique de prendre $\tau(s)$ comme « mesure » de l'écart, au point considéré, entre l'arc étudié et un arc plan. C'est pourquoi on appelle ce réel *torsion*.

Contrairement à la courbure, la torsion peut être négative. La convention adoptée pour la définition de la torsion $a_{23}(s) = -a_{32}(s) = \tau(s)$ fait que $\tau(s)$ est positive pour une hélice circulaire directe (fig. A_1). On dit que la torsion est *droite* ou *gauche*, selon qu'elle est positive ou négative (fig. B_3).

On notera que ni la courbure ni la torsion ne dépendent de l'orientation de l'arc simple auquel elles sont associées.

Formules donnant la courbure et la torsion

$$\chi(s) = |\ddot{k}(s)|, \ [\chi(s)]^2 = \langle \ddot{k}(s), \ddot{k}(s) \rangle$$

$$\chi(t) = \frac{|k'(t) \times k''(t)|}{|k'(t)|^3}$$

$$= \sqrt{\frac{\langle k'(t), k'(t) \rangle \cdot \langle k''(t), k''(t) \rangle - \langle k'(t), k''(t) \rangle^2}{\langle k'(t), k'(t) \rangle^3}}$$

(en utilisant la formule de Lagrange)

$$\tau(s)[\chi(s)]^2 = \det(\dot{k}(s), \ddot{k}(s), \dddot{k}(s)) \quad \text{(produit mixte)}$$

$$\tau(s) = \frac{\det(\dot{k}(s), \ddot{k}(s), \dddot{k}(s))}{\langle \ddot{k}(s), \ddot{k}(s) \rangle}$$

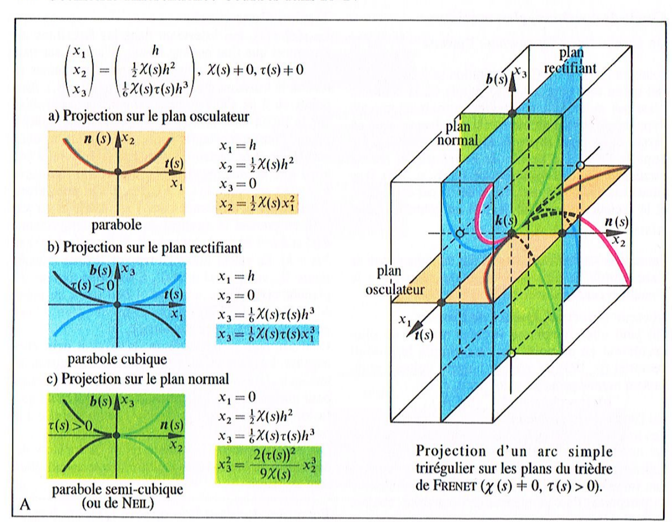
$$\tau(s) = \frac{\det(k'(t), k''(t), k'''(t))}{\langle k'(t), k'(t) \rangle \cdot \langle k''(t), k''(t) \rangle - \langle k'(t), k''(t) \rangle^2}$$

Théorème fondamental de la théorie des courbes

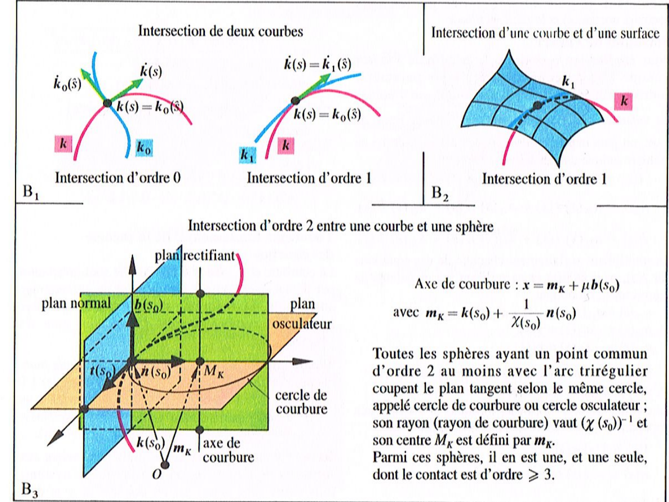
La courbure et la torsion d'une courbe sont invariantes par déplacement ou par changement de paramétrage admissible. Le théorème suivant montre qu'elles forment un *système complet d'invariants* pour les courbes de $\mathbb{R}^3$.

Théorème fondamental : *Soient χ et τ deux fonctions continues de $[0, l]$ dans $\mathbb{R}$, telles que $\chi(s) > 0$ pour tout $s \in [0, l]$; alors il existe localement, à un déplacement près, un et un seul arc simple de classe C^3 ayant pour courbure $\chi(s)$ et pour torsion $\tau(s)$.*

Rem. : Pour démontrer ce théorème, on revient aux formules de Frenet et on montre que le système différentiel ainsi défini par les données de χ et de τ admet une solution locale unique à un déplacement près.



Représentation canonique



Configurations de contact

Représentation canonique d'un arc simple

Soit un arc simple de classe C^3, 3-régulier, paramétré normalement : $s \to \boldsymbol{k}(s)$; $\chi(s)$ et $\tau(s)$ sont donc non nuls. On peut alors écrire le développement de TAYLOR suivant :

$$\boldsymbol{k}(s+h) = \boldsymbol{k}(s) + h \cdot \dot{\boldsymbol{k}}(s) + \frac{1}{2}h^2 \cdot \ddot{\boldsymbol{k}}(s) + \frac{1}{6}h^3 \cdot \dddot{\boldsymbol{k}}(s) + \boldsymbol{R}(s,h) \qquad (1).$$

Grâce aux formules de FRENET (p. 397), on en tire :

$$\boldsymbol{k}(s+h) - \boldsymbol{k}(s) = \left(h - \frac{1}{6}h^3(\chi(s))^2\right) \cdot \boldsymbol{t}(s) + \left(\frac{1}{2}h^2\chi(s) + \frac{1}{6}h^3\dot{\chi}(s)\right)\boldsymbol{n}(s) + \frac{1}{6}h^3\chi(s)\tau(s)\boldsymbol{b}(s) + \boldsymbol{R}(s,h) \qquad (2).$$

On choisit le repère d'origine $\boldsymbol{k}(s)$ et de base $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{b}(s), \boldsymbol{k}(s)\}$; en limitant le développement de chaque composante à la plus petite puissance de h, on obtient la *représentation canonique de l'arc simple* au voisinage de l'un de ses points :

$$\boldsymbol{k}(s+h) = \begin{pmatrix} h \\ \frac{1}{2}\chi(s)h^2 \\ \frac{1}{6}\chi(s)\tau(s)h^3 \end{pmatrix} + \overline{\boldsymbol{R}}(s,h) \qquad (3).$$

En négligeant $\overline{\boldsymbol{R}}(s, h)$ et en projetant le résultat obtenu sur les trois plans du repère de FRENET, on obtient finalement les « paraboles » représentées dans la figure A, qui indiquent la façon dont l'arc étudié s'éloigne du point $\boldsymbol{k}(s)$ dans ce repère. On voit donc, si $\chi(s) \neq 0$, que, localement, l'arc traverse son plan tangent, mais reste toujours du côté du plan rectifiant vers lequel pointe la normale principale.

Configurations de contact

Si on étend le développement polynomial (1) à $(n+1)$ termes, on obtient la $n^{\text{ième}}$ *approximation de l'arc* au voisinage de $\boldsymbol{k}(s)$. La première approximation de l'arc donne la tangente en $\boldsymbol{k}(s)$, la deuxième donne le plan osculateur.

Comme on le voit dans la figure B_1, deux arcs simples peuvent se rencontrer de différentes façons. Pour étudier la configuration d'un point commun à deux arcs simples réguliers, on peut comparer les approximations de ceux-ci au voisinage du point commun.

Si deux arcs simples réguliers ont des tangentes distinctes en un point commun, on dit que ce point est d'ordre 0. Si les tangentes sont confondues, on peut orienter les deux arcs de telle sorte qu'ils aient même vecteur unitaire pour leur tangente commune, par un bon choix des paramètres normaux. Si les dérivées par rapport à ces paramètres normaux sont égales jusqu'à l'ordre n, on dit que *le contact est d'ordre n au moins* (il est au moins d'ordre 1).

On dit qu'un point commun à deux arcs simples réguliers est *exactement d'ordre n* s'il est d'ordre n sans être d'ordre $n+1$.

On peut également étudier l'intersection d'un arc simple avec une surface S régulière (*cf.* p. 405). On suppose que celle-ci est définie par $F(\boldsymbol{x}) = 0$, F étant une fonction à valeurs dans ℝ de classe C^r sur un ouvert Ω contenant S, de différentielle $\mathrm{d}F$ ne s'annulant en aucun point de Ω $(r \geq 1)$. Si $M = \boldsymbol{k}(t)$ est un arc simple régulier, défini par un paramétrage admissible de classe C^r, on dira que $M_0 = \boldsymbol{k}(t_0)$ est un *point commun d'ordre n au moins* avec S, si d'une part $F(\boldsymbol{k}(t_0)) = 0$, et si d'autre part les dérivées successives de $t \to F(\boldsymbol{k}(t))$ sont toutes nulles en t_0 jusqu'à l'ordre n au moins. Cette propriété est indépendante des représentations admissibles de l'arc et de S.

a) **Intersection d'un arc simple et d'un plan**

On suppose que l'arc simple paramétré normalement a une courbure non nulle. Si l'on donne une équation du plan sous forme normale : $< \boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}(s_0), \boldsymbol{u}(s_0) > = 0$, on en a bien une représentation implicite. Selon les dérivations indiquées, on voit qu'une intersection du premier ordre doit vérifier :

$\langle \dot{\boldsymbol{k}}(s_0), \boldsymbol{u}(s_0) \rangle = 0$, i.e. un vecteur tangent à l'arc doit être orthogonal au vecteur normal au plan (le plan doit contenir la tangente à l'arc). Pour une intersection d'ordre 2, on a la condition supplémentaire $\langle \ddot{\boldsymbol{k}}(s_0), \boldsymbol{u}(s_0) \rangle = 0$. $\boldsymbol{n}(s_0)$ est donc orthogonal à $\boldsymbol{u}(s_0)$, ce qui implique que le plan est confondu avec le plan osculateur à l'arc. Si $\tau(s_0) \neq 0$, l'intersection ne peut être d'ordre supérieur à 2.

b) **Intersection d'un arc simple et d'une sphère**

On suppose de nouveau que $\chi(s_0) \neq 0$. La sphère est représentée par l'équation implicite

$< \boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{m} > - r^2 = 0$ (*cf.* p. 197). On a d'abord évidemment $< \boldsymbol{k}(s_0) - \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}(s_0) - \boldsymbol{m} > - r^2 = 0$; les conditions pour un contact d'ordre > 0 s'obtiennent par dérivations successives par rapport à s de $< \boldsymbol{k}(s) - \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}(s) - \boldsymbol{m} >$. Pour un *contact du premier ordre*, on a : $\langle \dot{\boldsymbol{k}}(s_0), \boldsymbol{k}(s_0) - \boldsymbol{m} \rangle = 0$, i.e. la sphère est centrée dans le plan normal et passe par $\boldsymbol{k}(s_0)$.

Un *contact d'ordre 2* n'est possible qu'avec des sphères dont le centre se trouve sur une certaine droite du plan normal, que l'on appelle *axe de courbure.* En effet, la condition $\langle \ddot{\boldsymbol{k}}(s_0), \boldsymbol{k}(s_0) - \boldsymbol{m} \rangle + 1 = 0$ jointe à la condition $\langle \dot{\boldsymbol{k}}(s_0), \boldsymbol{k}(s_0) - \boldsymbol{m} \rangle = 0$ donne :

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{k}(s_0) + \frac{1}{\chi(s_0)}\boldsymbol{n}(s_0) + \mu \boldsymbol{b}(s_0), \ \mu \in \mathbb{R}.$$

L'axe de courbure est donc l'axe du cercle osculateur (fig. B_3).

Un *contact d'ordre* 3 n'est, quant à lui, possible qu'avec une seule sphère $(\tau(s_0) \neq 0)$, que l'on appelle *sphère de courbure* ou *sphère osculatrice*. Elle a pour centre

$$\boldsymbol{m}_s = \boldsymbol{k}(s_0) + \frac{1}{\chi(s_0)}\boldsymbol{n}(s_0) + \mu_s \boldsymbol{b}(s_0)$$

et pour rayon $r_s = \sqrt{\left(\frac{1}{\chi(s_0)}\right)^2 + \mu_s^2}$ avec

$$\mu_s = -\frac{\dot{\chi}(s_0)}{(\chi(s_0))^2} \cdot \frac{1}{\tau(s_0)}.$$

On peut démontrer que l'arc décrit par $\boldsymbol{m}_s$ quand s varie admet pour tangente en $\boldsymbol{m}_s$ l'axe de courbure.

$t(s)$ e ε

$\varepsilon = \sphericalangle(t(s), e)$

$b(s)$ e ε $t(s)$ $n(s)$ $\chi(s) \neq 0$

Les extrémités des vecteurs ayant une origine commune fixe et équipollents aux vecteurs $t(s)$ décrivent un arc de cercle dans le cas d'une hélice.

$$\langle t(s), e\rangle = \text{const.} \Rightarrow \langle \dot{t}(s), e\rangle = 0 \Rightarrow n(s) \perp e$$
$$\Rightarrow e = \cos\varepsilon \cdot t(s) + \sin\varepsilon \cdot b(s)$$
$$\Rightarrow \dot{e} = \cos\varepsilon \cdot \dot{t}(s) + \sin\varepsilon \cdot \dot{b}(s),\ \dot{e} = o$$
$$\Rightarrow o = (\chi(s)\cdot\cos\varepsilon - \tau(s)\cdot\sin\varepsilon)\cdot n(s)$$
$$\Rightarrow 0 = \chi(s)\cdot\cos\varepsilon - \tau(s)\cdot\sin\varepsilon$$
$$\Rightarrow \frac{\tau(s)}{\chi(s)} = \frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} = \text{cotan}\,\varepsilon$$

A_1

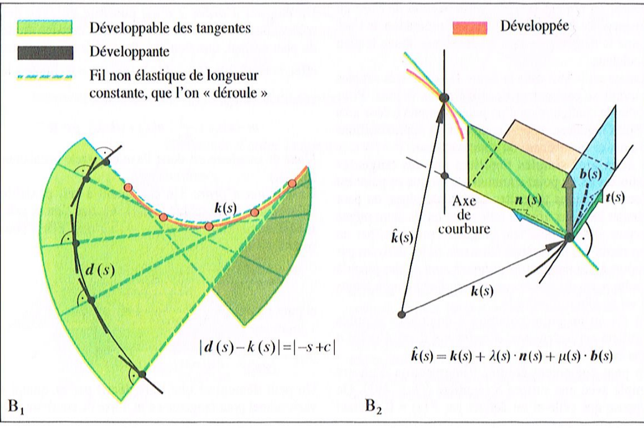
e Cylindre

Cylindre déroulé sur un plan

e

A_2

Hélice



Développées et développantes d'une courbe

Arcs sphériques

Les arcs tracés sur une sphère sont dits *sphériques*. D'après les résultats de la page 399 concernant la sphère osculatrice en un point, la sphère sur laquelle l'arc est tracé doit lui être osculatrice en chacun de ses points, lorsque $k \in C^3$, $\chi(s) \neq 0$ et $\tau(s) \neq 0$. Le rayon r_s de la sphère osculatrice et son centre m_s sont alors constants. On en déduit qu'un arc satisfaisant les hypothèses ci-dessus est sphérique si, et seulement si, on a, pour tout s :

$$\frac{\tau(s)}{\chi(s)} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\chi}(s)}{(\chi(s))^2 \cdot \tau(s)}\right) = 0\ .$$

Hélices

On appelle *hélices* les arcs dont le vecteur tangent $t(s)$ en un point quelconque forme un angle constant avec un vecteur unitaire donné e ; l'hélice circulaire de la figure A_1 page 392 en est un exemple, le vecteur e étant alors $e = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Tous les arcs plans sont également des hélices. On peut caractériser les hélices de C^3 de courbure non nulle par une relation entre la courbure et la torsion : un arc de C^3 dont la courbure ne s'annule pas est une hélice si, et seulement si, $\frac{\tau(s)}{\chi(s)} = \text{const.}$. La constante vaut $\text{cotan}(t(s), e)$ (fig. A_1).

Rem. : Les droites passant par les points de l'arc et de vecteur directeur e décrivent un cylindre (au sens large), appelé cylindre rectifiant ; si l'on déroule l'ensemble sur un plan, l'arc devient une droite (fig. A_2). Inversement, les arcs tracés sur un cylindre possédant cette propriété sont des hélices.
Les hélices circulaires sont des hélices dont le cylindre rectifiant est un cylindre de révolution, et de plus ce sont les seuls arcs de C^3 possédant simultanément une courbure et une torsion constantes.

Développantes d'un arc

On a vu page 395 que la tangente en un point $k(s)$ de l'arc était définie par

(1) $x(\lambda) = k(s) + \lambda t(s), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des tangentes à l'arc forme la *surface* dite *développable des tangentes* à l'arc (fig. B_1), dont une représentation paramétrique est

(2) $x(s, \lambda) = k(s) + \lambda \cdot t(s), \qquad s \in I, \lambda \in \mathbb{R}$.

Si l'on fait varier s en associant à chaque s un certain λ, on obtient par ce procédé de nouveaux arcs tracés sur la développable des tangentes. Ces arcs sont donnés par leur représentation paramétrique

(3) $\bar{k}(s) = k(s) + \lambda(s)\, t(s), \qquad s \in I$.

On appelle *développantes de* k ceux de ces arcs qui coupent orthogonalement les tangentes à la courbe k (fig. B_2). De la condition $\langle \dot{\bar{k}}(s), t(s)\rangle = 0$ on tire immédiatement qu'il faut que $\dot{\lambda}(s) = -1$. Les développantes de k ont donc pour représentation paramétrique

(4) $d(s) = k(s) + (-s + c)\, t(s), \qquad s \in I$,

avec $c \in \mathbb{R}$. Tout arc régulier de C^2 possède donc une famille à un paramètre de développantes. On a évidemment $|d(s) - k(s)| = |-s + c|$, si bien que l'on peut construire une développante comme le montre la figure B_1. Cette construction explique le choix du terme « développante ».

Rem. : L'utilisation de la notation s dans la représentation paramétrique (4) ne signifie pas que les développantes admettent s comme paramétrage normal. En général, s n'est *que* la longueur de l'arc k.

Développées d'un arc

On peut s'intéresser au problème inverse de celui consistant à trouver les développantes d'un arc. Étant donné un arc k, on doit déterminer les arcs $\hat{k}$ dont k est une développante. Pour tout $k \in C^3$ avec $\chi(s) \neq 0$, on trouve une famille à un paramètre d'arcs de ce type, que l'on appelle *développées de* k.

Pour donner une représentation paramétrique d'une développée, on écrit, comme dans la figure B_2, l'équation

$$\hat{k}(s) = k(s) + \lambda(s)\, n(s) + \mu(s)\, b(s),$$

où les fonctions $\lambda(s)$ et $\mu(s)$ sont à déterminer de telle sorte que $\dot{\hat{k}}(s)$ et $\lambda(s) n(s) + \mu(s) b(s)$ soient colinéaires.

On calcule $\dot{\hat{k}}(s)$ en utilisant les formules de FRENET (p. 397). Le produit vectoriel du résultat obtenu par $\lambda(s) n(s) + \mu(s) b(s)$ doit être nul. On en déduit $\lambda(s) = \frac{1}{\chi(s)}$ et une équation différentielle pour $\mu(s)$, dont la solution est $\mu(s) = \frac{1}{\chi(s)}\, \text{cotan}\left(\int_0^s \tau(t)\, dt + C\right)$.

C étant une constante réelle que l'on peut choisir arbitrairement, on obtient une famille de développées de représentation paramétrique

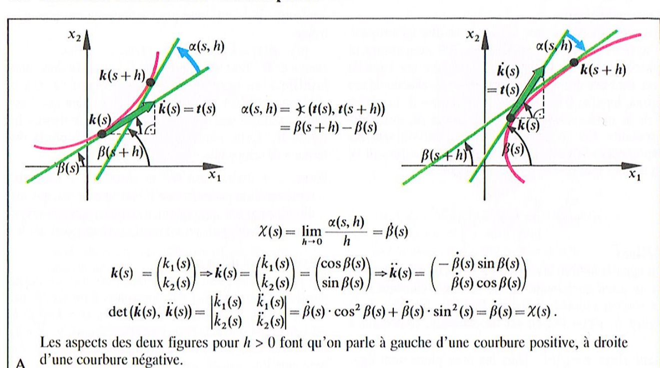
$$\hat{k}(s) = k(s) + \frac{1}{\chi(s)}\, n(s) + \frac{1}{\chi(s)}\, \text{cotan}\left(\int_0^s \tau(t)\, dt + C\right) b(s) \qquad (5).$$

Rem. : Comme précédemment, la longueur s de l'arc k n'est pas en général un paramètre normal des développées.

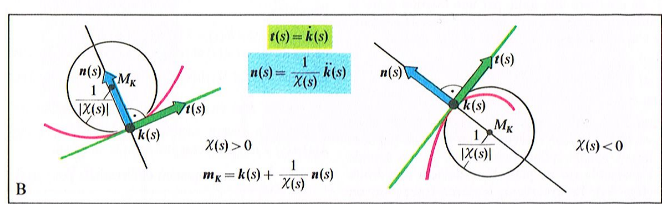
En comparant cette représentation paramétrique avec celle de l'axe de courbure (fig. B_3 p. 398), on constate que toutes les développées sont tracées sur la *surface engendrée* par l'axe de courbure, représentée par

$$x(s, \mu) = k(s) + \frac{1}{\chi(s)}\, n(s) + \mu\, b(s),\ (s, \mu) \in \mathbb{R}^2 \qquad (6).$$

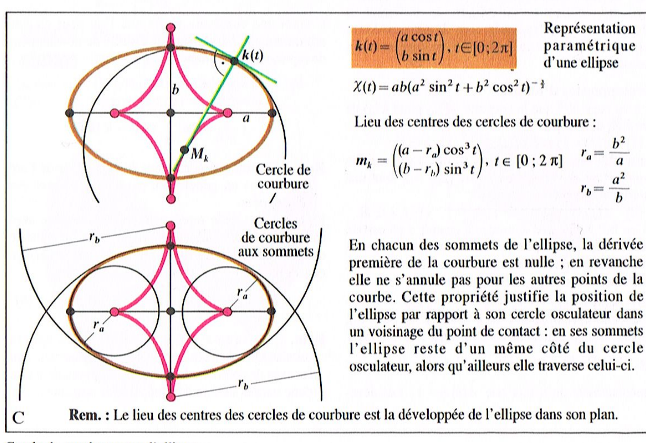
Rem. : Lorsque s varie, le centre de la sphère osculatrice à k décrit un arc dont les tangentes sont les axes de courbure de k. Les développées de k sont donc tracées sur une développable de tangentes.



Courbure d'une courbe plane



Base de Frenet, courbure et cercle de courbure



Cercle de courbure pour l'ellipse

Courbes planes

Une courbe plane, dans le cadre de la théorie des courbes dans $\mathbb{R}^3$, est tout simplement un arc particulier dont la torsion $\tau(s)$ est nulle en tout point (p. 397). On peut donc simplifier les résultats de la théorie des arcs dans $\mathbb{R}^3$. Si l'on traite cependant les courbes planes à part, c'est qu'il est possible d'introduire dans le plan des propriétés intéressantes, car dans un plan euclidien que l'on oriente, on peut construire des angles orientés, processus impossible dans $\mathbb{R}^3$ même muni d'une orientation.

Représentations d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$

a) Représentation paramétrique

Les *représentations paramétriques* d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$ se font à l'aide de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ données par leurs composantes

$$k(t) = \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}, t \in I. \qquad \textit{Ex. : fig. C.}$$

La notion de changement de paramétrage admissible se définit comme dans $\mathbb{R}^3$ (*cf.* p. 393).
Si $k \in C^1$ et si l'arc est régulier, l'abscisse curviligne s peut être prise comme *paramètre normal*. On définit le *vecteur tangent* $t(s)$ par $t(s) = \dot{k}(s)$.

b) Représentation explicite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant des propriétés de dérivabilité convenables ; le graphe de cette fonction peut être considéré comme une courbe. L'écriture $y = f(x)$ s'appelle *équation explicite* de la courbe. On en tire facilement une représentation paramétrique :

$$k_f(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Les propriétés de dérivabilité de k_f sont celles de f.

c) Représentation implicite

Quand une courbe k satisfait une équation du type $F(x_1, x_2) = 0$, c.-à-d. quand on a $F(k_1(t), k_2(t)) = 0$ pour tout t, on parle d'*équation implicite* de la courbe. F est alors une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ avec des propriétés de dérivabilité données (résolution dans un voisinage p. 325). Si, par exemple, F possède deux dérivées partielles qui ne s'annulent pas simultanément, l'équation de la *tangente* en un point (x_{01}, x_{02}) de la courbe s'écrit :

$$(x_1 - x_{01}) \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) + (x_2 - x_{02}) \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) = 0.$$

Courbure d'une courbe plane

Le plan euclidien est orienté. L'angle d'un couple de vecteurs non nuls (et non d'une paire) est un réel défini à 2π près ; on peut convenir de le prendre dans $]-\pi, \pi]$. Un arc orienté de classe C^1 et régulier peut être muni d'un paramétrage normal correspondant à son sens d'orientation $s \to k(s)$. La tangente au point $k(s)$ est orientée, comme en dimension 3, par le vecteur unitaire $\dot{k}(s)$. Si $k \in C^2$, le rapport

$$\frac{∢(t(s), t(s+h))}{h} \text{ a une limite dans } \mathbb{R} \text{ quand } h \to 0.$$

Cette limite est $\chi(s)$, courbure plane non nécessairement positive. On a, comme dans $\mathbb{R}^3$, $|\chi(s)| = |\ddot{k}(s)|$ (voir p. 394).

On constate que si l'on change une et une seule des deux orientations, celle du plan ou celle de la courbe, $\chi(s)$ se change en son opposée.

Rem. : Si on ne dispose pas d'un paramétrage normal, mais d'un autre paramétrage admissible en t, la courbure est donnée par l'expression $\frac{\det(\dot{k}(t), \ddot{k}(t))}{|\dot{k}(t)|^3}$. En particulier, si la courbe est le graphe d'une fonction réelle $x \to f(x) = y$, dans un repère orthonormé (O, x, y) direct, on a simplement $\chi(x) = \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}}$. Son signe est celui de $f''(x)$ (voir p. 302), l'orientation de la courbe étant prise dans le sens des x croissants.

Base de Frenet

Dans le cas d'une courbe paramétrée normalement de courbure non nulle, on définit, en plus du vecteur tangent $t(s)$, le *vecteur normal* $n(s)$ par :

$$n(s) = \frac{1}{\chi(s)} \ddot{k}(s).$$

En chaque point de la courbe, le couple $(t(s), n(s))$ définit une base appelée *base de* Frenet (fig. B). Si k est de classe C^2, on a les *formules de Frenet* (voir p. 397) :

$$\dot{t}(s) = \chi(s)\, n(s) \quad \text{et} \quad \dot{n}(s) = -\chi(s)\, t(s),$$

Le théorème fondamental de la page 397 se simplifie dans le plan : si l'on se donne $s \to \chi(s)$, fonction continue, la courbe k est déterminée à un déplacement près dans le plan orienté.

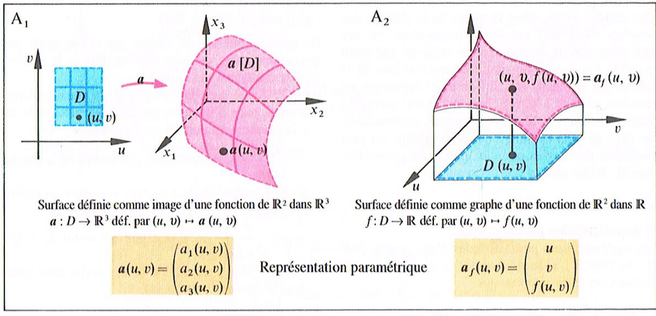
Rem. : La normale principale est orientée par n si $\chi(s) > 0$, $-n$ dans le cas contraire.

Cercle osculateur

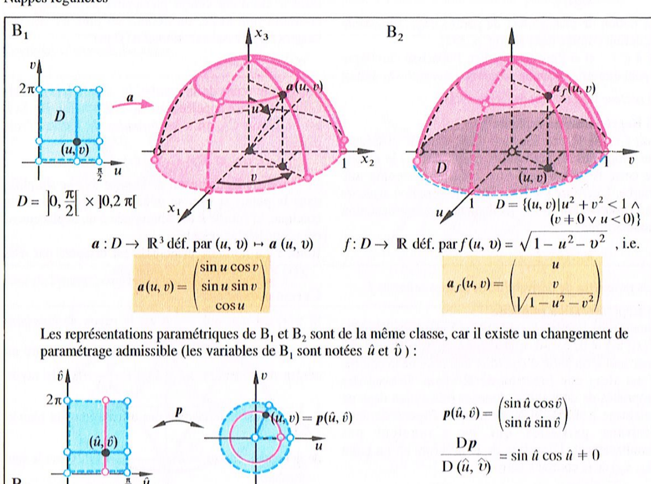
Si $\chi(s)$ est non nul, $\frac{1}{\chi(s)}$ est le *rayon de courbure relatif*. Le *cercle de courbure* est le cercle centré au centre de courbure $m_c = k(s) + \frac{1}{\chi(s)} n(s)$ de rayon $\left|\frac{1}{\chi(s)}\right|$. Il est indépendant des orientations du plan et de la courbe, car $m_c = k(s) + \frac{1}{\chi^2(s)} \ddot{k}(s)$. C'est le seul cercle ayant un contact d'ordre 2 avec la courbe k au point $k(s)$ (p. 399), d'où son autre nom de *cercle osculateur*. *Ex. :* ill. C.

Développantes et développées d'une courbe plane

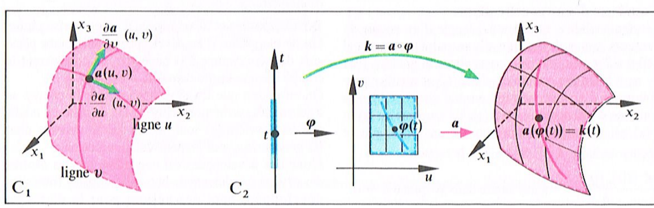
Les développantes et les développées d'une courbe plane sont définies comme à la page 401, en considérant la courbe comme un arc dans $\mathbb{R}^3$.
On en déduit que les développantes de la courbe se trouvent nécessairement dans le plan de celle-ci, tandis que les développées sont tracées sur un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires à ce plan.
L'une des développées est engendrée par les centres des cercles osculateurs de la courbe initiale. Toutes les développées sont des hélices pour la direction commune des génératrices de ce cylindre.



Nappes régulières



Demi-sphère ouverte et fendue



Courbes coordonnées, arcs tracés sur une nappe

Comme pour les arcs, on est amené à considérer les surfaces dans un cadre permettant l'usage des résultats de la géométrie différentielle. En particulier, on supposera que les fonctions étudiées possèdent des propriétés de dérivabilité suffisantes.
Dans le cas le plus simple, on peut interpréter une surface comme le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Plus généralement, les images de certaines fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ peuvent être considérées comme des surfaces (*Ex.* : fig. A et B).
Pour obtenir une notion de surface la plus commode possible, on introduit d'abord la notion de nappe régulière, puis on définit celle de surface à la page 407.

Notion de nappe régulière

Par *nappe*, on désigne l'image dans $\mathbb{R}^3$ d'un ouvert connexe D de $\mathbb{R}^2$ par une application continue injective $\boldsymbol{a}$, que l'on appelle *représentation paramétrique* (fig. A_1). Cette nappe est dite *régulière* si $\boldsymbol{a}$ est continûment dérivable sur D et si le produit vectoriel

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}(u,v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial a_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial a_3}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial a_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial a_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

est non nul pour tout $(u, v) \in D$.
Grâce à ces hypothèses, une telle nappe possède en chacun de ses points un plan tangent (voir p. 407).

Rem. : On parle d'une *nappe de classe* C^r ($r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) quand $\boldsymbol{a}$ est continûment dérivable au moins r fois.

Le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur D par $(u, v) \to f(u, v)$ est donc une portion de nappe régulière à condition que D soit un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ et que f soit de classe C^1. En effet, on peut manifestement déduire de f une représentation paramétrique $\boldsymbol{a}_f$ correspondante (fig. A_2) continûment dérivable et vérifiant :

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{a}_f}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \\ -\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 .$$

On appelle alors f une *représentation explicite* de la nappe régulière. *Ex.* : fig. B_2.
Comme un arc de courbe, une nappe régulière possède une classe de représentations paramétriques, dans laquelle on passe d'une représentation à l'autre par un changement de paramétrage convenable (admissible).
Si l'on effectue un changement $\boldsymbol{p} : \widehat{D} \to D$ par $(\hat{u}, \hat{v}) \xrightarrow{p} (u, v)$, $\widehat{D}$ étant un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$, on obtient entre autres, sous réserve de dérivabilité,

$$(1)\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{a}}}{\partial \hat{u}}(\hat{u},\hat{v}) \times \frac{\partial \hat{\boldsymbol{a}}}{\partial \hat{v}}(\hat{u},\hat{v}) = \frac{\mathrm{D}\,\boldsymbol{p}}{\mathrm{D}(\hat{u},\hat{v})} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}(u,v),$$

où $\frac{\mathrm{D}\,\boldsymbol{p}}{\mathrm{D}(\hat{u},\hat{v})} = \det\left(\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}(\hat{u},\hat{v})}\right)$ représente le déterminant jacobien de $\boldsymbol{p}$ (p. 323). Aussi doit-on imposer à $\boldsymbol{p}$ d'être au moins de classe C^1, d'avoir un jacobien partout non nul, et de réaliser une bijection bicontinue de $\widehat{D}$ sur D, c.-à-d. d'être un difféomorphisme de $\widehat{D}$ sur D. On dit qu'un tel changement de paramétrage est *admissible* (*Ex.* : fig. B_3). L'image et les propriétés de dérivabilité de la représentation paramétrique sont invariantes par un changement de paramétrage admissible.

Coordonnées curvilignes, courbes coordonnées sur une nappe régulière

On voit sur la figure A_1 qu'à toute famille de courbes dans D définies par u = const. (resp. v = const.), on peut faire correspondre une famille de courbes sur la nappe régulière. On appelle celles-ci *courbes coordonnées*, en désignant souvent par *lignes u*, resp. *lignes v*, les courbes v = constante, resp. u = constante. $(u, v) \in D$ étant donné, le point $\boldsymbol{a}(u, v)$ se situe évidemment à l'intersection des lignes u et v correspondantes (fig. C_1). Cela rappelle la détermination d'un point dans un système de coordonnées par l'intersection de droites parallèles aux axes, si bien que l'on appelle u et v les *coordonnées curvilignes* (ou *paramètres de* GAUSS) du point.

Ex. : Sur la surface terrestre, on choisit en général la latitude et la longitude pour repérer un point. Les parallèles et les méridiens constituent alors les deux familles de courbes coordonnées.

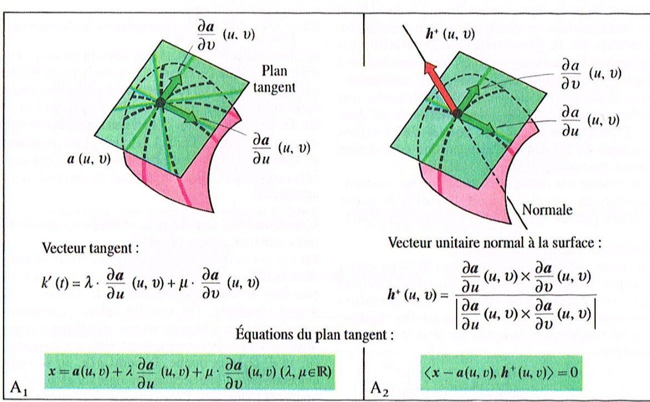
Les courbes coordonnées sont des courbes de classe C^1 (resp. de classe C^r). $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}(u, v)$ est un vecteur tangent à une ligne u, $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}(u, v)$ un vecteur tangent à une ligne v. Comme le produit vectoriel de ces deux vecteurs n'est pas nul, ils sont linéairement indépendants sur la nappe régulière (fig. C_1).

Courbes tracées sur une nappe régulière

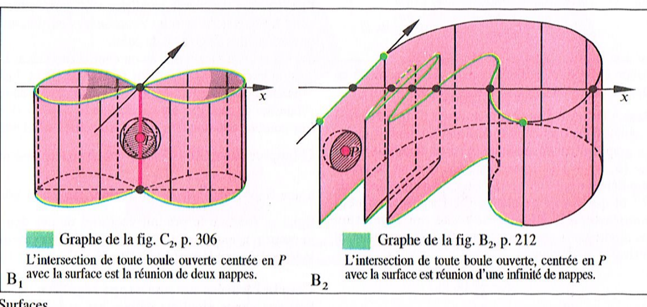
Soit une nappe régulière définie par $\boldsymbol{a}(u, v)$, avec $(u, v) \in D$. On peut construire une courbe tracée sur cette nappe de la façon suivante : soit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ $\boldsymbol{\varphi} : I \to D$ définie par
$t \to (u, v) = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, de classe C^1 (resp. C^r) et telle que $\varphi_1'(t)$ et $\varphi_2'(t)$ ne s'annulent pas simultanément. $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{\varphi}$, définie par
$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \boldsymbol{a}(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ pour $t \in I$ est alors une représentation paramétrique d'une courbe de classe C^1 (resp. C^r) tracée sur la nappe régulière (fig. C_2). En notant $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{\varphi}$, on obtient par dérivation :

$$\boldsymbol{k}'(t) = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \varphi_1'(t) + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \varphi_2'(t)$$

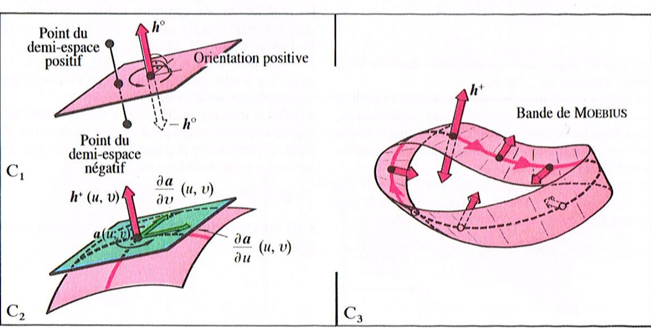
$\boldsymbol{k}'(t)$ est un vecteur tangent à la courbe au point $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\varphi}(t))$.



Plan tangent, vecteur normal à la surface



Surfaces



Orientation, orientabilité

Plan tangent à une nappe, vecteur normal à une nappe

L'expression d'un vecteur tangent (p. 405) à une courbe régulière tracée sur une nappe elle-même régulière montre que la tangente à une telle courbe en un point $\boldsymbol{a}(u_0, v_0)$ de la nappe appartient au plan $\left(a, \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}\right)(u_0, v_0)$. On vérifie facilement que ce plan T_0 ne dépend pas du paramétrage. De plus si l'on prend la courbe $\left(u(t) = u_0 + \alpha t,\ v(t) = v_0 + \beta t\right)$, on constate que toute droite de T_0 passant par $\boldsymbol{a}(u_0, v_0)$ est la tangente à au moins une courbe de la nappe en ce point. Le plan T_0 est par définition le *plan tangent* à la nappe au point (*de contact*) $\boldsymbol{a}(u_0,v_0)$. On appelle *vecteur normal à la nappe* le vecteur unitaire

$$\boldsymbol{h}^+(u, v) := \frac{\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}(u, v)}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}(u, v)\right|}, \text{ également noté}$$

$\boldsymbol{h}^+(\boldsymbol{a}(u, v))$. On peut alors écrire l'équation du plan tangent sous forme normale : $< \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}(u, v), \boldsymbol{h}^+(u, v) > = 0$. La droite orthogonale au plan et passant par le point de contact est appelée *normale.*

Notion de surface

Le fait, par exemple, qu'une « surface » aussi importante qu'une sphère, qu'un cylindre de révolution, ou encore qu'un cône de révolution ne soit pas une nappe régulière montre qu'il faut aller au-delà de cette notion pour concevoir ce que peut être une surface. En réalité ce mot peut avoir plusieurs sens, selon l'usage qu'on en fait. Ainsi une surface S peut être considérée comme une partie de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant par exemple à la condition suivante :

Pour la topologie induite sur S par celle de $\mathbb{R}^3$, tout point de S possède au moins un voisinage qui soit homéomorphe à une nappe régulière de classe C^k.

On a alors une condition très forte, satisfaite par une sphère, un cylindre de révolution et bien d'autres surfaces classiques. Mais des surfaces non moins intéressantes, telles qu'un cône de révolution, la surface B_1 p. 400, les surfaces B_1 et B_2 p. 406 ne satisfont pas cette définition. Ainsi le sommet du cône doit être exclu, de même que les points des lignes en rouge pour les surfaces B_1 p. 400 et B_1 p. 406. Plus compliqué encore est l'exemple B_2 p. 406. Tous les points d'une partie plane incluse dans la surface doivent être exclus.

En proposant la définition qui va suivre, on obtient des « surfaces » dont on exige a priori qu'une partie non vide soit constituée d'une réunion de nappes régulières, les autres points demandant une étude particulière.

Une surface S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ qui peut être obtenu

1) soit par une représentation implicite $f(x) = 0$ avec $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et f, fonction de classe C^k, $k \geq 1$, s'annulant en au moins un point régulier

$$(\exists \xi, f(\xi) = 0 \text{ et } \exists i, \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) \neq 0).$$

2) soit par une représentation paramétrique $x = \boldsymbol{a}(u, v)$, de classe C^k, $k \geq 1$, l'existence d'au moins un point régulier étant exigée ($\exists \xi = \boldsymbol{a}(u_0, v_0)$ avec

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}\right)(u_0, v_0) \neq 0).$$

On remarquera que 1) comme 2) permettent d'avoir une représentation paramétrique régulière locale autour de tout point régulier de la forme $x_i = g(x_j, x_k)$. La surface contiendra bien des nappes régulières et un autre sous-ensemble de points (qui peut être vide) nécessitant éventuellement une étude à part. L'un des problèmes qui se posent est celui du chevauchement des nappes régulières. Il n'est pas abordé ici (voir en particulier le chapitre consacré aux variétés différentiables).

Si l'on reprend les exemples cités plus haut, le sommet d'un cône de révolution est un point singulier. Il n'appartient à aucune nappe régulière incluse dans le cône, de même que les points de la ligne rouge de B_1 p. 400. En revanche tout point de la ligne rouge de B_1 p. 406 appartient à deux nappes régulières. Quant aux points de la partie plane de B_2 p. 406, ils sont en fait tous sur une même nappe régulière.

Orientation d'une surface

a) **Orientation d'un plan :** On peut définir un plan dans $\mathbb{R}^3$ par un de ses points et un vecteur normal unitaire $\boldsymbol{h}$. Cela permet de distinguer un *côté positif* et un *côté négatif* de part et d'autre du plan (fig. C_1). On peut également choisir une *orientation positive* du plan, c.-à-d., conformément à l'usage, définir comme sens de rotation positif celui qui, vu depuis le côté positif du plan, tourne dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre (fig. C_1).

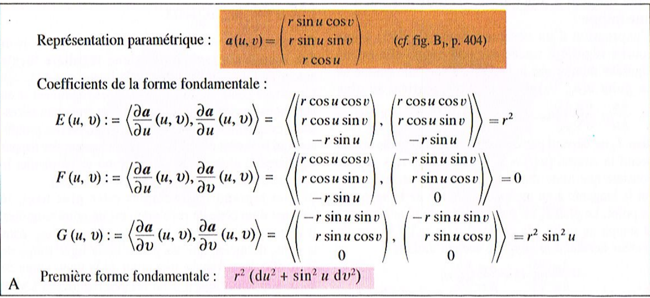
Il est évidemment possible de choisir l'orientation inverse, dite *négative*.

b) **Orientation d'une surface :** Comme toute surface régulière possède en chacun de ses points un plan tangent, il suffit de définir localement l'orientation d'une telle surface comme étant *celle du plan tangent*, c.-à-d. que l'on choisit comme orientation positive celle qui correspond au vecteur normal à la surface $\boldsymbol{h}^+$ (fig. C_2).

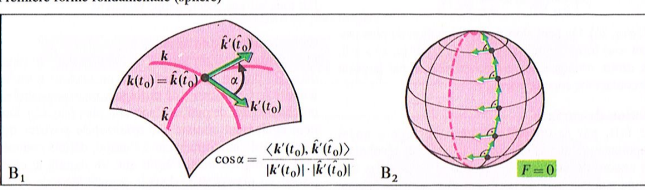
L'orientation dépend de la représentation paramétrique. La formule (1) de la page 405 montre que les vecteurs normaux $\boldsymbol{h}^+(\widehat{u}, \widehat{v})$ et $\boldsymbol{h}^+(u, v)$ ne coïncident après un changement de paramétrage admissible $\boldsymbol{p}$ que si $\det \frac{D\boldsymbol{p}}{D(\hat{u}, \hat{v})} > 0$. Sinon, l'orientation change.

On peut donc se demander si l'on peut paramétrer localement une surface régulière de telle sorte que le vecteur normal à la surface en chacun de ses points, $\boldsymbol{h}^+$, puisse varier continûment le long de n'importe quel chemin tracé sur celle-ci. En particulier le long d'un chemin fermé quelconque, le vecteur $\boldsymbol{h}^+$ doit toujours se retrouver identique à lui-même et non en son opposé. Si cela est possible, la surface est dite *orientable*. Une condition suffisante pour qu'une surface régulière soit *non orientable* est donc qu'il existe au moins un chemin fermé pour lequel le retour au point de départ après un tour, donne non pas le vecteur normal initial, mais son opposé. C'est par exemple le cas pour la bande de MOEBIUS (fig. C_3 ci-contre et fig. A p. 246).

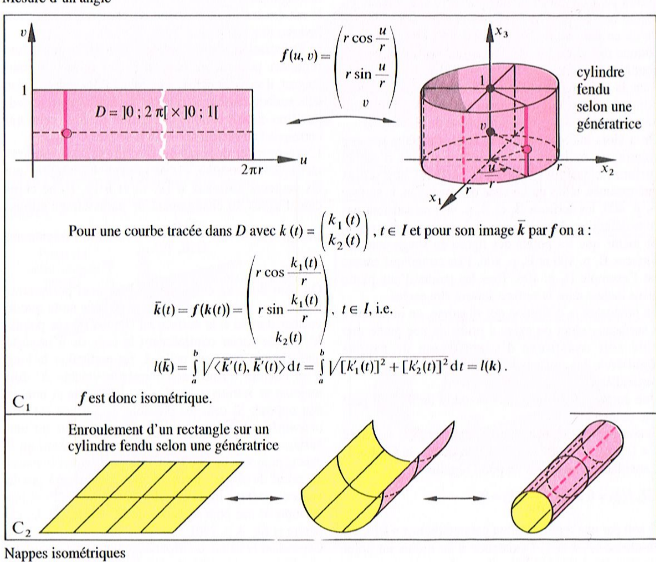
Cependant la bande de MOEBIUS, comme toute surface régulière, est orientable localement.



Première forme fondamentale (sphère)



Mesure d'un angle



Nappes isométriques

Mesure de la longueur sur une nappe régulière

Soit une nappe régulière définie par $a(u, v)$ avec $(u, v) \in D$, et un arc de classe C^1 tracé sur cette nappe, d'équation $k(t) = a(\varphi(t)) = a(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ avec $t \in [a, b]$. En utilisant les formules de la page 395 concernant la longueur d'un arc, on peut calculer la longueur de cet arc : de

$$k'(t) = \frac{\partial a}{\partial u}(\varphi(t))\,\varphi_1'(t) + \frac{\partial a}{\partial v}(\varphi(t))\,\varphi_2'(t)$$

on tire

$$l = \int_a^b \sqrt{E\left(\varphi_1'(t)\right)^2 + 2F\,\varphi_1'(t)\,\varphi_2'(t) + G\left(\varphi_2'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

où E, F et G, définis comme dans le tableau A, portent sur $u = \varphi_1(t)$, $v = \varphi_2(t)$ (écriture abrégée).

Rem. : En substituant u^1 et u^2 respectivement à u et v, on peut remplacer E, F et G par les notations correspondantes g_{11}, g_{12} (resp. g_{21}) et g_{22} (p. 418).

On appelle première forme fondamentale de la théorie des nappes (ex. tab. A) l'expression $E(u, v)\mathrm{d}u^2 + 2F(u, v)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G(u, v)\mathrm{d}v^2$. E, F et G vérifient $E > 0$, $F > 0$, $EG - F^2 > 0$ (forme quadratique définie positive).

$EG - F^2 = \left|\frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u, v)\right|^2$ est le *discriminant* de la forme. On le note W^2 ou encore g quand on utilise les g_{ik}.

La première forme fondamentale est invariante par tout changement de paramétrage admissible.

La longueur d'un arc $\widehat{AB}$ tracé sur la nappe est l'intégrale curviligne de la racine carrée positive de la première forme fondamentale le long de $\widehat{AB}$.

Mesure d'angles sur une nappe régulière

Soient deux arcs simples orientés réguliers définis sur une nappe régulière par $k(t) = a(\varphi(t))$, avec $t \in I$, et $\hat{k}(\hat{t}) = a(\hat{\varphi}(\hat{t}))$ (avec $\hat{t} \in \hat{I}$. On suppose qu'ils se coupent au point $k(t_0)$, $k(t_0) = \hat{k}(\hat{t}_0)$. On appelle « angle des deux arcs en ce point commun » l'angle α de leurs vecteurs tangents en ce point (fig. B₁). Il vérifie :

$$\cos\alpha = \frac{\langle k'(t_0), \hat{k}'(\hat{t}_0)\rangle}{|k'(t_0)|\cdot|\hat{k}'(\hat{t}_0)|}\,,\ \alpha \in [0, \pi].$$

Lorsque l'on connaît la première forme fondamentale, on peut donc également mesurer les angles.

En particulier, on peut calculer les angles sous lesquels se coupent les courbes coordonnées (p. 405). En un point $a(u_0, v_0)$ de la nappe, une ligne u a pour équation $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (t, v_0)$, et une ligne v : $\hat{\varphi}(\hat{t}) = (\hat{\varphi}_1(\hat{t}), \hat{\varphi}_2(\hat{t})) = (u_0, \hat{t})$. On en tire donc :

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}\,,\ \text{resp.}\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}\,.$$

Un réseau de courbes coordonnées est donc orthogonal si, et seulement si, $F = 0$ partout.
Ex. : fig. B₂.

Mesure d'aires sur une nappe régulière

Étant donné la définition de la p. 349 et la relation $EG - F^2 = \left|\frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u, v)\right|$, l'aire d'une partie quarrable B d'une nappe régulière vaut :

$$A = \int_B \sqrt{EF - G^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Quand on sait calculer la première forme fondamentale d'une nappe régulière, on peut donc étendre à cette nappe les notions de longueur, d'angle et d'aire.

Rem. : La première forme fondamentale s'appelle également *forme métrique fondamentale*, car elle permet l'introduction d'une métrique au sens topologique sur la nappe.

Nappes régulières isométriques, géométrie intrinsèque

Soient deux nappes régulières $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ définies resp. par les paramétrages admissibles (D_1, a_1) et (D_2, a_2). Un difféomorphisme d appliquant le domaine D_1 sur le domaine D_2 permet de construire une transformation h amenant $\mathfrak{R}_1$ sur $\mathfrak{R}_2$: $a_2 \circ d \circ a_1^{-1}$. Une transformation de ce type applique tout arc régulier $\mathcal{A}_1$ de $\mathfrak{R}_1$ sur un arc régulier $\mathcal{A}_2$ de $\mathfrak{R}_2$. Elle est dite isométrique si pour tout $\mathcal{A}_1$, la longueur de $\mathcal{A}_2$ est conservée : $l(\mathcal{A}_1) = l(\mathcal{A}_2)$. La transformation h^{-1} définie par $a_1 \circ d^{-1} \circ a_2^{-1}$ jouit des mêmes propriétés et les deux nappes sont dites isométriques. *Ex.* : fig. C₁.

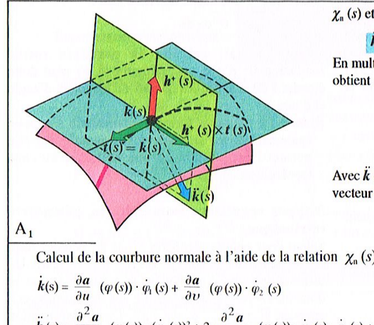
On démontre que deux nappes régulières sont isométriques si et seulement s'il est possible de construire une transformation telle que, pour tout couple de points homologues, les premières formes fondamentales soient identiques. Cela n'est pas toujours possible. En particulier aucune nappe régulière sphérique ne peut être mise en correspondance isométrique avec un quelconque domaine du plan euclidien (p. 404 ill. B). Aucune carte géométrique plane ne respecte les distances.

Une *déformation* continue sans allongement ni rétrécissement permet de concevoir une transformation isométrique, sans que l'on puisse affirmer que toute transformation isométrique puisse être appréhendée de cette façon. Par exemple, si l'on enroule une feuille de papier sur un cylindre ou un cône, toute courbe tracée sur la feuille « imprime » sur le cylindre, resp. le cône, une courbe de même longueur (ill. A₂ p. 400).

Si l'on définit une géométrie métrique sur une nappe régulière, sans tenir compte de l'espace environnant, c.-à-d. en utilisant seulement la donnée de la première forme fondamentale, la seule différence entre deux nappes régulières consiste en une différence de distance.

Toutes les propriétés géométriques qui ne dépendent que de la première forme fondamentale sont dites *propriétés intrinsèques*, et on parle d'une *géométrie intrinsèque*. Des nappes régulières isométriques ont donc la même géométrie intrinsèque.

Les surfaces isométriques au plan sont, en dehors des plans eux-mêmes, les cylindres, les cônes et les développables des tangentes, c.-à-d. les surfaces qui sont engendrées par les tangentes à une courbe régulière non plane (fig. B₁ p. 400). (voir p. 415).



$\chi_n(s)$ et $\chi_g(s)$ sont définies par :

$$\ddot{\boldsymbol{k}}(s) = \chi_n(s) \cdot \boldsymbol{h}^+(s) + \chi_g(s) \cdot \boldsymbol{h}^+(s) \times \boldsymbol{t}(s).$$

En multipliant resp. par $\boldsymbol{h}^+(s)$ et $\boldsymbol{h}^+(s) \times \boldsymbol{t}(s)$, on obtient :

(1) $\chi_n(s) = \langle \boldsymbol{h}^+(s), \ddot{\boldsymbol{k}}(s) \rangle$,

(2) $\chi_g(s) = \langle \boldsymbol{h}^+(s) \times \boldsymbol{t}(s), \ddot{\boldsymbol{k}}(s) \rangle = \det(\dot{\boldsymbol{k}}(s), \ddot{\boldsymbol{k}}(s), \boldsymbol{h}^+(s))$,

(3) $[\chi(s)]^2 = [\chi_n(s)]^2 + [\chi_g(s)]^2$.

Avec $\ddot{\boldsymbol{k}}(s) = \chi(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$ on a de plus ($\boldsymbol{n}(s)$ étant le vecteur normal principal) :

(4) $\chi_n(s) = \chi(s) \cdot \cos(\boldsymbol{h}^+(s), \boldsymbol{n}(s))$.

A_1

Calcul de la courbure normale à l'aide de la relation $\chi_n(s) = \langle \boldsymbol{h}^+(s), \ddot{\boldsymbol{k}}(s) \rangle$:

$$\dot{\boldsymbol{k}}(s) = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}(\varphi(s)) \cdot \dot{\varphi}_1(s) + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}(\varphi(s)) \cdot \dot{\varphi}_2(s)$$

$$\ddot{\boldsymbol{k}}(s) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial u^2}(\varphi(s)) \cdot (\dot{\varphi}_1(s))^2 + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial u \partial v}(\varphi(s)) \cdot \dot{\varphi}_1(s) \cdot \dot{\varphi}_2(s) + \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial v^2}(\varphi(s)) \cdot (\dot{\varphi}_2(s))^2 + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}(\varphi(s)) \cdot \ddot{\varphi}_1(s) + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}(\varphi(s)) \cdot \ddot{\varphi}_2(s)$$

On pose

$$L(u, v) := \left\langle \boldsymbol{h}^+(u, v), \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial u^2}(u, v) \right\rangle, \quad M(u, v) := \left\langle \boldsymbol{h}^+(u, v), \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial u \partial v}(u, v) \right\rangle,$$

$$N(u, v) := \left\langle \boldsymbol{h}^+(u, v), \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial v^2}(u, v) \right\rangle,$$

et on obtient avec les écritures simplifiées L, M et N pour $L(\varphi(s)$, $M(\varphi(s))$ et $N(\varphi(s))$:

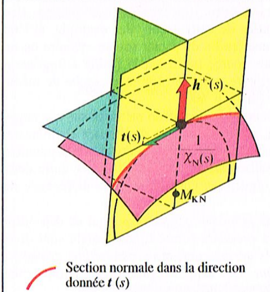
$$\chi_n(s) = L \cdot (\dot{\varphi}_1(s))^2 + 2M \cdot \dot{\varphi}_1(s) \cdot \dot{\varphi}_2(s) + N \cdot (\dot{\varphi}_2(s))^2,$$

resp. pour un paramètre admissible t défini par $s = s(t)$:

$$\chi_n(t) = \frac{L(\varphi_1'(t))^2 + 2M \cdot \varphi_1'(t) \cdot \varphi_2'(t) + N \cdot (\varphi_2'(t))^2}{E(\varphi_1'(t))^2 + 2F \cdot \varphi_1'(t) \cdot \varphi_2'(t) + G \cdot (\varphi_2'(t))^2}.$$

A_2

Courbure normale et courbure géodésique, calcul de la courbure normale



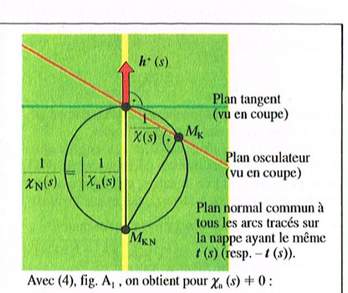
Section normale dans la direction donnée $\boldsymbol{t}(s)$

M_{KN} Centre du cercle de courbure de la section normale

$\chi_N(s)$ Courbure de la section normale

$$\chi_N(s) = |\chi_n(s)|$$

B_1



Avec (4), fig. A_1, on obtient pour $\chi_n(s) \neq 0$:

$$\frac{1}{\chi(s)} = \frac{1}{\chi_n(s)} \cos(\boldsymbol{h}^+(s), \boldsymbol{n}(s))$$

On en déduit le *théorème* de MEUSNIER :

Pour tous les arcs d'une nappe régulière ayant en un point P même direction de tangente ± t (s), les centres de courbure en P décrivent un cercle du plan normal commun en P si $\chi_n(s) \neq 0$.

B_2

Section normale et théorème de MEUSNIER

Courbure d'une nappe régulière

La « courbure » en un point $\boldsymbol{a}(u, v)$ d'une nappe régulière permet en général de préciser localement la position de celle-ci par rapport à son plan tangent. Pour l'étudier on sélectionne des arcs remarquables de la nappe passant par $\boldsymbol{a}(u, v)$ dont on calcule la courbure, ce qui exige pour toutes les fonctions de paramétrage d'être au moins de classe C^2.

Courbure normale, courbure géodésique

Pour simplifier, dans la suite, les arcs tracés sur une nappe seront toujours paramétrés normalement. Pour exprimer la courbure $\chi(s) = |\ddot{\boldsymbol{k}}(s)|$ (p. 395) relative à un arc donné par $\boldsymbol{k}(s) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))$ on n'opère pas directement. Il est plus pratique d'introduire deux nouvelles courbures, liées au fait qu'il s'agit d'un arc tracé sur une nappe, la *courbure normale* $\chi_n(s)$ et la *courbure géodésique* $\chi_g(s)$, qui sont reliées à la courbure par l'égalité $[\chi_n(s)]^2 + [\chi_g(s)]^2 = [\chi(s)]^2$. On définit ces deux types de courbure de la façon suivante (*cf.* fig. A_1) : on opère avec le *trièdre de* DARBOUX-RIBAUCOUR défini au point $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\varphi}(s))$ par le vecteur normal à la surface $\boldsymbol{h}^+(\boldsymbol{\varphi}(s))$ — que l'on notera par la suite $\boldsymbol{h}^+(s)$ —, le vecteur tangent $\boldsymbol{t}(s)$, et leur produit vectoriel $\boldsymbol{h}^+(s) \times \boldsymbol{t}(s)$. (Il ne faut pas confondre ce trièdre avec le trièdre de FRENET.) $\ddot{\boldsymbol{k}}(s)$ est dans le plan défini par $\boldsymbol{h}^+(s)$ et $\boldsymbol{h}^+(s) \times \boldsymbol{t}(s)$ et a pour composantes $\chi_n(s)$ sur $\boldsymbol{h}^+(s)$ (*composante normale*) et $\chi_g(s)$ sur $\boldsymbol{h}^+(s) \times \boldsymbol{t}(s)$ (*composante tangentielle*), ce qui détermine sans ambiguïté $\chi_n(s)$ et $\chi_g(s)$.

On en déduit les relations fondamentales entre $\chi_n(s)$, $\chi_g(s)$ et $\chi(s)$ données dans l'ill. A_1.

Calcul de la courbure géodésique

Si l'on cherche à calculer la courbure géodésique en un point d'un arc tracé sur une nappe régulière en utilisant la formule $\chi_g(s) = \det\left(\dot{\boldsymbol{k}}(s), \ddot{\boldsymbol{k}}(s), \boldsymbol{h}^+(s)\right)$, on s'aperçoit que cette courbure ne dépend, en dehors de la courbe et de l'orientation (signe), que de la première forme fondamentale : elle s'exprime en effet à l'aide des dérivées premières et secondes de u et v par rapport à s (pour la courbe), de E, F et G et de leurs six dérivées partielles premières en u et v (pour la première forme fondamentale). Cela signifie que la courbure géodésique est une *propriété de la géométrie intrinsèque* de la nappe. Elle n'apporte donc aucune information sur les propriétés de « courbure » de la nappe dans l'espace.

On utilise la courbure géodésique pour distinguer certains arcs, par exemple les *lignes géodésiques*. On désigne par ce nom les arcs ayant une courbure géodésique nulle en tout point. En particulier tout arc inclus dans une droite est une géodésique puisque sa courbure est nulle. Une ligne géodésique non rectiligne possède cette propriété particulière que le vecteur normal principal à l'arc et le vecteur normal à la nappe sont colinéaires.

Rem. : Le plus court chemin entre deux points d'une nappe est toujours une ligne géodésique (*cf.* p. 369). Mais n'importe quelle ligne géodésique n'est pas forcément le plus court chemin entre deux points, comme le montre clairement le cas d'un grand cercle sur une sphère.

Contrairement à la courbure géodésique, la courbure normale donne des informations sur la « courbure » de la nappe.

Calcul de la courbure normale

Le calcul du tableau A_2 donne :

$$\chi_n(s) = L(\dot{\varphi}_1(s))^2 + 2M\dot{\varphi}_1(s)\,\dot{\varphi}_2(s) + N(\dot{\varphi}_2(s))^2$$

resp.

$$\chi_n(t) = \frac{L(\varphi_1'(t))^2 + 2M\varphi_1'(t)\,\varphi_2'(t) + N(\varphi_2'(t))^2}{E(\varphi_1'(t))^2 + 2F\varphi_1'(t)\,\varphi_2'(t) + N(\varphi_2'(t))^2}$$

où L, M et N sont les produits scalaires indiqués au tableau. On appelle *deuxième forme fondamentale* la forme $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$.

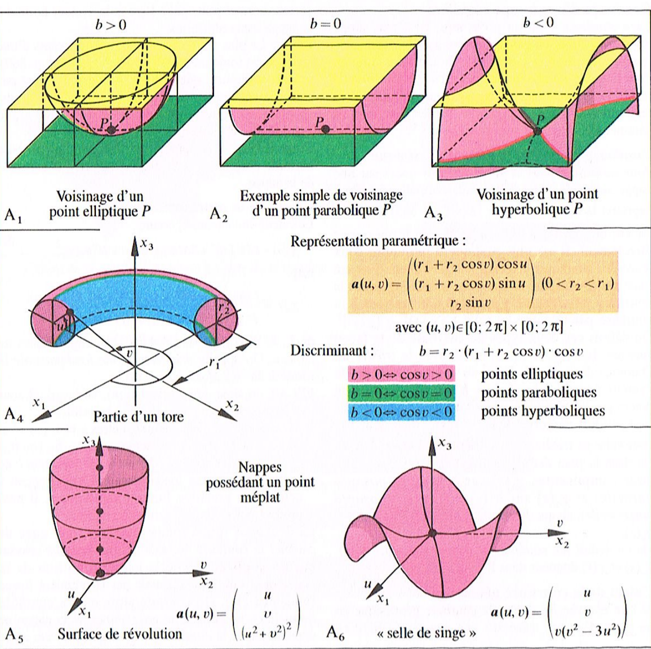
Elle est, au signe près (orientation), un invariant sous tout changement de paramétrage admissible.

Rem. : Si on remplace les paramètres u et v par u^1 et u^2, on note L, M et N respectivement b_{11}, b_{12} (ou b_{21}) et b_{22}. L'expression $LN - M^2$ est le *discriminant* b de la deuxième forme fondamentale. Contrairement à celui de la première forme fondamentale, il peut prendre des valeurs négatives ou nulles.

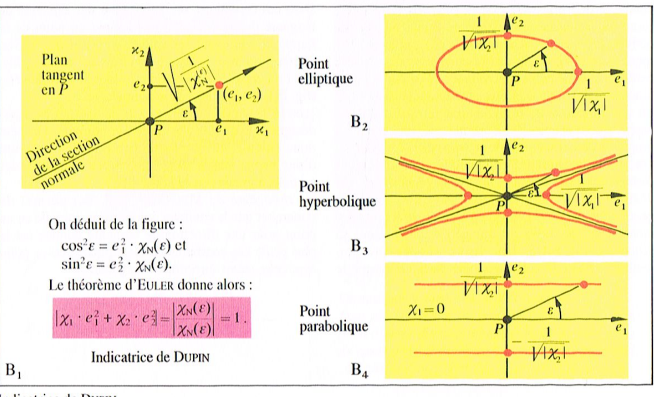
La deuxième forme fondamentale permet donc de calculer la courbure normale de tous les arcs passant par un point donné de la nappe (quotient de la deuxième forme fondamentale par la première forme fondamentale). On constate alors que la courbure normale en un point d'un arc régulier de la nappe ne dépend que de la direction de la tangente à l'arc en ce point. Ainsi deux arcs tangents en un point ont même courbure normale en ce point.

Dans ces conditions, on définit pour une direction de tangente donnée, le plan passant par un point de la nappe et contenant les vecteurs $\boldsymbol{t}(s)$ et $\boldsymbol{h}^+(s)$. Son intersection avec la nappe régulière est un *arc plan*, que l'on appelle *section normale* dans la direction $\boldsymbol{t}(s)$ (fig. B_1). Pour toute section normale, on a $|\cos(\boldsymbol{h}^+(s), \boldsymbol{n}(s))| = 1$, i.e. $\chi_N(s) = |\chi_n(s)|$, où $\chi_N(s)$ désigne la courbure de la section normale. On peut donc calculer les courbures normales en un point d'une nappe simplement à partir des *courbures* des sections normales en ce point.

Le *théorème de* MEUSNIER (fig. B_2) permet de remarquer que la courbure de la section normale en un point pour une direction de tangente donnée est la plus petite des courbures des arcs passant en ce point avec cette même direction de tangente.



Classification des points d'une nappe



Indicatrice de Dupin

Classification des points d'une nappe

On étudie ici, en un point P d'une nappe régulière, le signe de b. (On rappelle que b est le discriminant $LN - M^2$ de la deuxième forme fondamentale (p. 411) pour le point concerné.)

(1) $b > 0$

La courbure normale ne peut pas s'annuler et garde donc un signe constant (continuité). On peut alors trouver un voisinage de P sur la nappe dont tous les points, hormis P, sont situés dans l'un des demi-espaces ouverts définis par le plan tangent en P (fig. A_1). On parle de *courbure elliptique* en P et on dit que P est un *point elliptique*.

Ex. : Un ellipsoïde (*cf.* p. 202, fig. Aa1) a une courbure elliptique en chacun de ses points.

(2) $b = 0$

Si L, M et N ne sont pas tous les trois nuls, il existe une et une seule direction de tangente en P pour laquelle la courbure normale est nulle (une telle direction est qualifiée d'*asymptotique*) . On dit que P est un point *parabolique*. Le comportement de la nappe au voisinage d'un point parabolique peut être compliqué.

Ex. : a) Tous les points d'un cylindre sont paraboliques.

b) Les nappes $x_3 = x_1^2 + x_2^3$, $x_3 = x_1^2 + x_2^4$, $x_3 = x_1^2 - x_2^4$, admettent toutes le point (0, 0, 0) comme point parabolique, mais leurs comportements respectifs au voisinage de ce point sont très différents.

Si L, M et N sont tous nuls, on dit que P est un *point méplat*.

Ex. : fig. A_5 et A_6.

(3) $b < 0$

Dans ce cas il y a exactement deux directions de tangente pour lesquelles la courbure normale est nulle, i.e. exactement deux directions asymptotiques. Le signe de la courbure normale change au passage d'une direction asymptotique. Il en résulte que dans tout voisinage de P on peut trouver des points de la nappe qui se trouvent d'un côté ou de l'autre du plan tangent (fig. A_3). On parle alors de *courbure hyperbolique* et de *point hyperbolique*.

Ex. : Tous les points d'un hyperboloïde à une nappe, resp. d'un paraboloïde hyperbolique (p. 202, fig. Aa2, resp. Ba2) sont hyperboliques.

Rem. : Sur un tore, on peut trouver des points elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Ombilics

Ce sont les points pour lesquels la courbure normale reste la même pour toute direction de tangente. Ils sont donc elliptiques ou méplats. Leur recherche peut s'avérer assez difficile.

Ex. : Les points d'une sphère sont tous des ombilics elliptiques. Les points d'un plan sont tous des points méplats.

Sur un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes, il y a deux ou quatre ombilics selon qu'ils sont ou ne sont pas de révolution. Pour un paraboloïde elliptique on passe à un ou deux sous les mêmes conditions.

Courbures principales

En tout point d'une nappe qui ne soit pas un ombilic, il existe deux directions de tangente perpendiculaires pour lesquelles les courbures normales correspondantes prennent les valeurs resp. maximale et minimale de l'ensemble des courbures normales en ce point ; on notera ces valeurs χ_1 et χ_2 : χ_1 et χ_2 s'appellent les *courbures principales*, et les directions des tangentes correspondantes les *directions de courbure principale*.

L'intérêt des courbures principales est qu'elles permettent d'écrire les courbures normales en un point d'une nappe distinct d'un ombilic sous une forme très simple. On a en effet (*théorème d'* EULER) :

$$\chi_N(\varepsilon) = \chi_1 \cdot \cos^2 \varepsilon + \chi_2 \cdot \sin^2 \varepsilon,$$

où ε désigne l'angle entre la direction de courbure principale correspondant à χ_1 et la direction de tangente correspondant à $\chi_N(\varepsilon)$.

Indicatrice de DUPIN

Soit un point P d'une nappe possédant des directions de courbure principale ; on peut alors définir un système de coordonnées cartésiennes du plan tangent ayant pour origine le point P et les directions de courbure principale comme axes. Si l'on porte, comme cela est décrit dans l'ill. B_1, pour chaque section normale passant par P, la valeur correspondante $\sqrt{\frac{1}{|\chi_N^{(\varepsilon)}|}}$, i.e. $\frac{1}{\sqrt{|\chi_N^{(\varepsilon)}|}}$, sur la direction de tangente, on obtient des courbes spécifiques à chaque type de point. Le calcul effectué dans l'ill. B_1 montre qu'il s'agit de coniques ou de paires de droites parallèles, qui, dans tous les cas, satisfont l'équation :

$$|\chi_1 e_1^2 + \chi_2 e_2^2| = 1.$$

Cette équation permet donc de définir simplement ces courbes appelées d'ailleurs *indicatrices de* DUPIN.

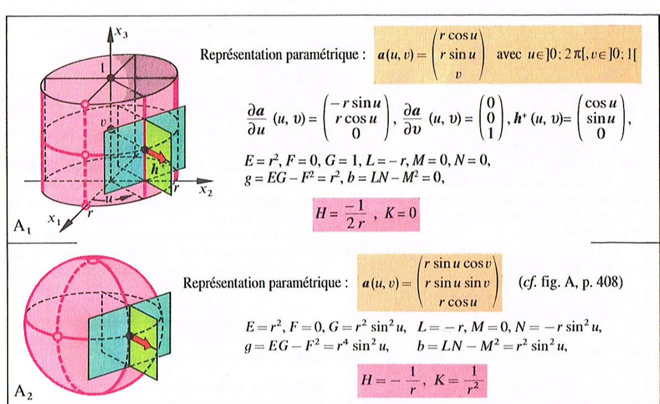
Pour un *point elliptique*, les courbures principales sont de même signe, et l'indicatrice est donc une *ellipse* de longueur d'axes $\frac{1}{\sqrt{|\chi_1|}}$ et $\frac{1}{\sqrt{|\chi_2|}}$ (fig. B_2).

S'il s'agit d'un *point hyperbolique*, les courbures principales sont de signes opposés, de sorte que l'indicatrice se compose de deux *hyperboles* dites *conjuguées* (mêmes asymptotes, échange des longueurs des axes principaux et secondaires).

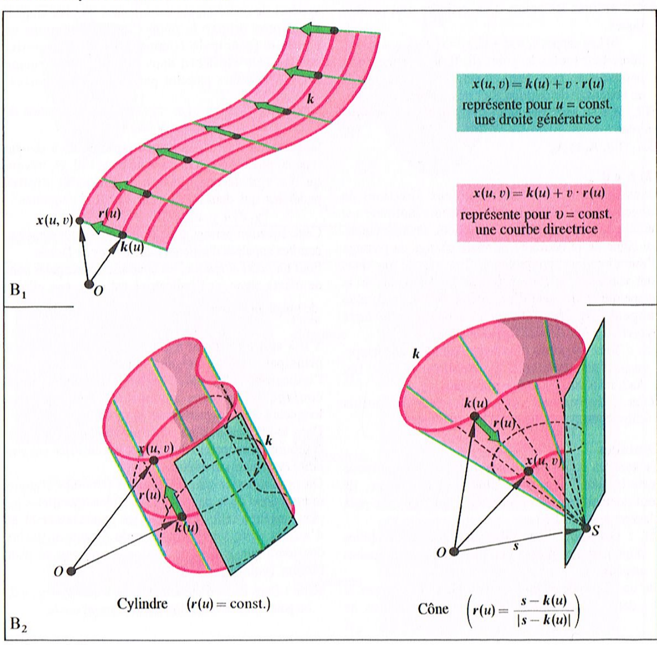
Dans le cas, enfin, d'un *point parabolique*, l'une des courbures principales est nulle, et l'indicatrice est une *paire de droites parallèles*.

On peut montrer que les courbes obtenues comme intersections de la nappe avec des plans parallèles au plan tangent à celle-ci en un de ses points ressemblent d'autant plus à l'indicatrice de DUPIN au point considéré que le plan de section est proche du plan tangent. (voir fig. A_1 à A_3.)

Rem. : Dans le cas d'un ombilic pour lequel $\chi_1 = \chi_2 \neq 0$, on peut considérer que l'indicatrice est un cercle.



Courbure moyenne, courbure de Gauss



Surfaces réglées

Lignes de courbure

Les arcs tracés sur des nappes régulières pour lesquels en chaque point la direction de tangente coïncide avec une direction de courbure principale sont appelés *lignes de courbure*.

Si la nappe est de classe C^3, alors par tout point distinct d'un ombilic passent deux lignes de courbure orthogonales entre elles. Si pour un réseau de courbes coordonnées les coefficients F et M sont partout nuls, alors ce réseau est celui des lignes de courbure.

Lignes asymptotiques

On appelle *lignes asymptotiques* les arcs tracés sur des nappes régulières pour lesquels en chaque point la direction de tangente coïncide avec une direction asymptotique (i.e. une direction pour laquelle $\chi_n(s) = 0$).

Il n'existe aucune ligne asymptotique dans un voisinage suffisamment petit d'un point elliptique. En revanche, il existe exactement deux lignes asymptotiques passant par un point hyperbolique. Toutes les lignes droites sont des lignes asymptotiques. Si pour un réseau de courbes coordonnées les coefficients L et N sont partout nuls, alors ce réseau est celui des lignes asymptotiques.

Courbure moyenne, courbure totale

Pour un point d'une nappe régulière distinct d'un ombilic, on appelle *courbure moyenne* H la valeur moyenne des courbures principales χ_1 et χ_2, et *courbure totale*, ou *courbure de* Gauss K leur produit :

$$H := \frac{1}{2}(\chi_1 + \chi_2), K := \chi_1 \cdot \chi_2.$$

On notera que les deux courbures principales χ_1 et χ_2 sont solutions de l'équation $\chi^2 - 2H \cdot \chi + K = 0$.

Un calcul donne les relations définissant H et K en fonction des coefficients des première et deuxième formes fondamentales :

$$H = \frac{1}{2g}(EN - 2FM + GL), K = \frac{b}{g} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Ces deux relations permettent d'étendre les définitions de ces deux courbures aux nappes contenant des ombilics.

A priori, aucune de ces deux nouvelles notions ne semble appartenir à la géométrie intrinsèque de la nappe. L'exemple suivant confirme effectivement cette non-appartenance pour la courbure moyenne.

La courbure moyenne en un point P d'un cylindre est $H = -\frac{1}{2r}$, où r désigne le rayon de courbure de la section droite du cylindre en P (fig. A$_1$). Pour un point quelconque d'un plan, on a toujours $H = 0$. Comme il existe une isométrie du cylindre sur un plan (fig. C$_1$ p. 408), on en déduit que la courbure moyenne n'est pas une notion appartenant à la géométrie intrinsèque de la nappe.

En revanche, la courbure de Gauss est une notion appartenant à la géométrie intrinsèque d'une nappe régulière de classe suffisante, car on peut transformer l'expression $\frac{b}{g}$ donnée plus haut de telle sorte qu'elle ne dépende plus que de la première forme fondamentale (*cf.* p. 416, tab. A$_5$). Ce résultat remarquable dû à Gauss fait l'objet de son *théorème d'excellence*.

Des nappes régulières dont les courbures de Gauss ne peuvent se correspondre, ne sont donc pas isométriques (p. 409) ; par exemple, il n'existe pas d'application conservant la distance entre une nappe sphérique et un domaine plan, comme cela a déjà été mentionné à la p. 409 (fig. A$_2$). (On sait que cela a son importance pour la cartographie).

L'égalité des courbures de Gauss entre points homologues est donc une *condition nécessaire* pour une isométrie, mais elle *n*'est *pas suffisante*, en dehors de certains cas particuliers. Un de ces cas particuliers est celui dans lequel on a affaire localement à des courbures de Gauss égales et constantes.

Surfaces réglées, surfaces développables

On peut se demander quelles sont les nappes pour lesquelles il existe une isométrie avec un domaine plan. Il est manifestement nécessaire que l'on ait partout sur la nappe $K = 0$. Pour des nappes suffisamment petites et de classe C^3, cette condition est suffisante.

L'étude des nappes régulières dont la courbure de Gauss vaut 0 conduit à la définition de surfaces *réglées* particulières (*cf.* infra), les *surfaces développables*, et au résultat suivant : toute nappe suffisamment petite de classe C^3 peut être mise en correspondance isométrique avec un domaine plan si, et seulement si, elle est incluse dans une surface développable.

Le terme *surface réglée* indique qu'il s'agit d'une surface obtenue par déplacement continu d'une droite dans l'espace (fig. B). Il suffit donc, pour la construire, de connaître l'arc décrit par un point de la droite ainsi que les variations d'un vecteur directeur de la droite. On parvient de cette manière à une définition paramétrique : une *surface réglée* peut être définie localement par une représentation de la forme :

$\boldsymbol{x}(u, v) = \boldsymbol{k}(u) + v \cdot \boldsymbol{r}(u)$, avec $u \in I$, $v \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{r}(u) \neq \boldsymbol{0}$.

Les courbes u = constante sont les droites dites *génératrices* : ce sont des lignes asymptotiques. Les courbes v = constante sont autant de courbes directrices sur lesquelles s'appuient les génératrices.

On appelle *surface développable* une surface réglée telle qu'en deux points réguliers quelconques d'une même génératrice les plans tangents soient confondus. On montre qu'il s'agit en fait des plans, cylindres, cônes et développables des tangentes (p. 400).

Une nappe réglée vérifiant partout la condition $\det(\boldsymbol{k}(s), \boldsymbol{r}(s), \dot{\boldsymbol{r}}(s)) = 0$ (où l'on utilise comme paramètre l'abscisse curviligne s) est incluse dans une surface développable (cette condition est localement équivalente à $LN - M^2 = 0$).

$\langle\ ,\ \rangle$	$\boldsymbol{a}_u$	$\boldsymbol{a}_v$	$\boldsymbol{a}_{uu}$	$\boldsymbol{a}_{uv}$	$\boldsymbol{a}_{vv}$	$\boldsymbol{h}^+$	$\boldsymbol{h}^+_u$	$\boldsymbol{h}^+_v$
$\boldsymbol{a}_u$	E	F	$\frac{1}{2}E_u$	$\frac{1}{2}E_v$	$F_v-\frac{1}{2}G_u$	0	$-L$	$-M$
$\boldsymbol{a}_v$	F	G	$F_u-\frac{1}{2}E_v$	$\frac{1}{2}G_u$	$\frac{1}{2}G_v$	0	$-M$	$-N$
$\boldsymbol{h}^+$	0	0	L	M	N	1	0	0

Les produits scalaires de $\boldsymbol{a}_u$, resp. $\boldsymbol{a}_v$ par $\boldsymbol{a}_{uu}$, $\boldsymbol{a}_{uv}$ et $\boldsymbol{a}_{vv}$ donnent avec les indices convenables les *symboles de* CHRISTOFFEL (premier type) $\Gamma_{ik,j}$, par ex. :

$$\Gamma_{12,1}=\langle \boldsymbol{a}_{uv}, \boldsymbol{a}_u\rangle .$$

A_1

Formules de GAUSS

$$\boldsymbol{a}_{uu}=\Gamma^1_{11}\cdot \boldsymbol{a}_u+\Gamma^2_{11}\cdot \boldsymbol{a}_v+c_{11}\cdot \boldsymbol{h}^+$$
$$\boldsymbol{a}_{uv}=\Gamma^1_{12}\cdot \boldsymbol{a}_u+\Gamma^2_{12}\cdot \boldsymbol{a}_v+c_{12}\cdot \boldsymbol{h}^+$$
$$\boldsymbol{a}_{vv}=\Gamma^1_{22}\cdot \boldsymbol{a}_u+\Gamma^2_{22}\cdot \boldsymbol{a}_v+c_{22}\cdot \boldsymbol{h}^+$$

On obtient les coefficients $c_{ik}\in\mathbb{R}$ en multipliant scalairement par $\boldsymbol{h}^+$.
On obtient les symboles de CHRISTOFFEL (deuxième type) $\Gamma^j_{ik}\in\mathbb{R}$ en multipliant scalairement par a_u et a_v (système d'équations à résoudre).

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2g}(E_uG-2FF_u+E_vF)\qquad \Gamma^2_{11}=\frac{1}{2g}(-E_uF+2EF_u-EE_v)\qquad c_{11}=L$$
$$\Gamma^1_{12}=\frac{1}{2g}(E_vG-FG_u)\qquad \Gamma^2_{12}=\frac{1}{2g}(EG_u-E_vF)\qquad c_{12}=M$$
$$\Gamma^1_{22}=\frac{1}{2g}(-FG_v+2F_vG-GG_u)\qquad \Gamma^2_{22}=\frac{1}{2g}(EG_v-2FF_v+FG_u)\qquad c_{22}=N$$

$$(g=EG-F^2)$$

On définit de plus : $\Gamma^1_{21}:=\Gamma^1_{12},\ \Gamma^2_{21}:=\Gamma^2_{12}$.

A_2

Formules de WEINGARTEN

$$\boldsymbol{h}^+_u=r_1\cdot \boldsymbol{a}_u+r_2\cdot \boldsymbol{a}_v+r_3\cdot \boldsymbol{h}^+$$
$$\boldsymbol{h}^+_v=s_1\cdot \boldsymbol{a}_u+s_2\cdot \boldsymbol{a}_v+s_3\cdot \boldsymbol{h}^+$$

En multipliant scalairement par $\boldsymbol{a}_u$, $\boldsymbol{a}_v$ et $\boldsymbol{h}^+$, on obtient un système d'équations pour $r_i, s_i\in\mathbb{R}$.

$$r_1=\frac{1}{g}(FM-GL)\qquad r_2=\frac{1}{g}(FL-EM)\qquad r_3=0$$
$$s_1=\frac{1}{g}(FN-GM)\qquad s_2=\frac{1}{g}(FM-EN)\qquad s_3=0$$

$$(g=EG-F^2)$$

A_3

Relations de GAUSS et MAINARDI-CODAZZI

(1) $\alpha_{11}=0\Leftrightarrow F\dfrac{b}{g}=(\Gamma^1_{12})_u-(\Gamma^1_{11})_v+\Gamma^1_{12}\cdot\Gamma^2_{12}-\Gamma^2_{11}\cdot\Gamma^1_{22}\quad (g=EG-F^2, b=LN-M^2)$

(2) $\alpha_{12}=0\Leftrightarrow -E\dfrac{b}{g}=(\Gamma^2_{12})_u-(\Gamma^2_{11})_v+\Gamma^1_{12}\cdot\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{12}(\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11})-\Gamma^2_{11}\cdot\Gamma^2_{22}$

(3) $\alpha_{21}=0\Leftrightarrow G\dfrac{b}{g}=(\Gamma^1_{22})_u-(\Gamma^1_{12})_v+\Gamma^1_{12}(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12})-\Gamma^2_{12}\cdot\Gamma^1_{22}+\Gamma^1_{11}\cdot\Gamma^1_{22}$

(4) $\alpha_{22}=0\Leftrightarrow F\dfrac{b}{g}=(\Gamma^2_{22})_u-(\Gamma^2_{12})_v+\Gamma^1_{12}\cdot\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{22}\cdot\Gamma^2_{11}$

Les quatre relations de GAUSS aboutissent toutes au même résultat : le *théorème d'excellence*.

(5) $\alpha_{13}=0\Leftrightarrow L_v-M_u=\Gamma^1_{12}\cdot L+(\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11})\cdot M-\Gamma^2_{11}\cdot N$

(6) $\alpha_{23}=0\Leftrightarrow M_v-N_u=\Gamma^1_{22}\cdot L+(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12})\cdot M-\Gamma^2_{12}\cdot N$

Relations de MAINARDI-CODAZZI

A_4

Formule de calcul pour la courbure de GAUSS K

Les relations (1) à (4) du tableau A_4 donnent la formule de la courbure de GAUSS :

$$K=\frac{b}{g}=\frac{1}{g^2}[\det(\boldsymbol{a}_{uu}\boldsymbol{a}_u\boldsymbol{a}_v)\cdot\det(\boldsymbol{a}_{vv}\boldsymbol{a}_u\boldsymbol{a}_v)-(\det(\boldsymbol{a}_{uv}\boldsymbol{a}_u\boldsymbol{a}_v))^2]$$
$$=\frac{1}{g^2}\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}E_{vv}+F_{uv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\frac{1}{g^2}\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}$$

A_5

Formules et relations en rapport avec le théorème fondamental

On a démontré, dans la théorie des courbes, que lorsque l'on donne arbitrairement deux fonctions continues de l'abscisse curviligne pour la courbure (≥ 0) et la torsion, l'arc est défini de manière unique à un déplacement près (théorème fondamental, p. 397). Il est intéressant de savoir s'il existe une propriété comparable concernant les nappes. Au lieu de la courbure et de la torsion, on utilise ici les deux formes fondamentales.

Est-il possible, en imposant certaines conditions aux deux formes fondamentales, de construire une nappe associée, définie de manière unique à un déplacement près ? Le théorème fondamental de la théorie des nappes (*cf.* ci-dessous) donne une réponse positive à cette question, mais pour l'expliquer, il faut d'abord présenter quelques résultats importants concernant les coefficients des formes fondamentales.

Formules de GAUSS et de WEINGARTEN

Dans la suite, $(u, v)\to \boldsymbol{a}(u, v)$ définit une nappe rég. de classe C^3 ; le trièdre de GAUSS, composé de $\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}(u, v)$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}(u, v)$ et $\boldsymbol{h}^+(u, v)$ définit une base, de sorte que tout autre vecteur peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs, en particulier $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial^2 u}(u, v)$, $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial u\,\partial v}(u, v)$ et $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial v^2}(u, v)$.

Pour simplifier l'écriture on négligera la parenthèse (u, v), et on notera les dérivées partielles en indiçant $\boldsymbol{a}$ par les variables de dérivation. Les dérivées ci-dessus seront donc notées $\boldsymbol{a}_u$, $\boldsymbol{a}_v$, $\boldsymbol{a}_{uu}$, $\boldsymbol{a}_{uv}$ et $\boldsymbol{a}_{vv}$.

On peut tirer du tableau A_1 la façon dont s'obtiennent les coefficients E, F, G (p. 409) et L, M, N (p. 411) des formes fondamentales à partir des produits scalaires portant sur les dérivées partielles de $\boldsymbol{a}$, le vecteur normal à la nappe $\boldsymbol{h}^+$, et les dérivées partielles $\boldsymbol{h}^+_u$ et $\boldsymbol{h}^+_v$.

Si l'on écrit $\boldsymbol{a}_{uu}$, $\boldsymbol{a}_{uv}$ et $\boldsymbol{a}_{vv}$ dans le repère de GAUSS, on obtient les *formules de* GAUSS (tab. A_2). Pour condenser l'écriture, on fait intervenir les *symboles de* CHRISTOFFEL (*deuxième type*), qui ne dépendent que des coefficients de la première forme fondamentale et de leurs dérivées.

Si l'on écrit $\boldsymbol{h}^+_u$ et $\boldsymbol{h}^+_v$ dans le repère de GAUSS, on obtient les *formules de* WEINGARTEN (tab. A_3).

Relations de GAUSS et de MAINARDI-CODAZZI

L'appartenance de $\boldsymbol{a}$ à la classe C^3 a pour conséquences $(\boldsymbol{a}_{uu})_v=(\boldsymbol{a}_{uv})_u$ et $(\boldsymbol{a}_{vv})_u=(\boldsymbol{a}_{uv})_v$.

Par suite, en dérivant convenablement les trois formules de GAUSS, on obtient deux relations entre les dérivées des seconds membres. Si on exprime celles-ci dans la base de GAUSS en utilisant les formules de GAUSS et de WEINGARTEN, on obtient finalement deux équations de la forme $\alpha_{1k}\boldsymbol{a}_u+\alpha_{2k}\boldsymbol{a}_v+\alpha_{3k}\boldsymbol{h}^+=0$ ($\alpha_{ik}\in\mathbb{R}$, $k\in\{1, 2\}$). Comme $\boldsymbol{a}_u$, $\boldsymbol{a}_v$ et $\boldsymbol{h}^+$ sont linéairement indépendants, cela n'est possible que si tous les coefficients sont nuls. On en tire les relations données dans le tab. A_4.

Les quatre premières sont dues à GAUSS ; il en résulte immédiatement que la courbure de GAUSS K, qui vaut $\dfrac{b}{g}$, ne dépend que de la première forme fondamentale (c'est le *théorème d'excellence*, p. 415).

Les deux dernières relations du tab. A_4 sont les *formules de* MAINARDI-CODAZZI.

Rem. : Le tab. A_5 donne diverses expressions de la courbure de GAUSS K, qui peuvent également servir à calculer le discriminant b de la deuxième forme fondamentale.
La dernière formule a l'intérêt de montrer comment on peut calculer b à partir des coefficients de la première forme fondamentale. La connaissance d'une nappe (par ex. d'une sphère) permet donc de déduire la courbure de GAUSS K *seulement* à partir de mesures sur la nappe (première forme fondamentale), grâce à la relation $K=\dfrac{b}{g}$, sans utiliser de connaissances concernant l'espace environnant.

Théorème fondamental

Dans la théorie des courbes, on peut se donner arbitrairement les fonctions continues de l'abscisse curvilignes s courbure (≥ 0) et torsion. Il existe une et une seule courbe définie à un déplacement près dans $\mathbb{R}^3$ orienté satisfaisant les relations de FRENET (p. 397).
Dans la théorie des surfaces, il ne suffit pas de se donner deux formes différentielles quadratiques $E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ et $L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$, où E, F, G, L, M, N sont des fonctions continues des deux paramètres u et v sur un même domaine de $\mathbb{R}^2$, satisfaisant à $E>0$, $EG-F^2>0$ (donc $G>0$), pour assurer l'existence d'une nappe régulière de classe C^3 dont elles seraient les deux formes fondamentales. Les six fonctions E, F, G, L, M, N doivent également satisfaire d'une part certaines conditions de différentiabilité, d'autre part plusieurs relations de dépendance. On peut comparer ces restrictions à celles qu'il faut imposer à trois fonctions f_i de classe C^1, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ lorsqu'on cherche une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ admettant les f_i comme dérivées partielles premières.
On a le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Th. fondamental (de BONNET) : *Soient trois fonctions E, F et G de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un domaine de $\mathbb{R}^2$, de classe C^2, telles que $E>0$, $EF-G^2>0$ et trois fonctions L, M et N de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies sur le même domaine, de classe C^1. Si ces fonctions satisfont les conditions de* GAUSS *(expression de b en fonction de E, F, G et de leurs dérivées, tab. A_5), et de* MAINARDI-CODAZZI, *alors il existe dans $\mathbb{R}^3$ orienté une nappe unique à un déplacement près, de classe C^3, admettant E, F, G, et L, M, N resp. comme coefficients des deux formes fondamentales.*

D'une part l'emploi des tenseurs permet un maniement formel très élégant de la théorie des surfaces. D'autre part le concept de tenseur en permet une généralisation, conduisant à la géométrie riemannienne.

Convention de sommation

La convention de sommation d'EINSTEIN autorise une écriture simplifiée de certaines sommes. En contrepartie elle exige une lecture attentive :

Toutes les fois que dans un terme figure deux fois le même indice, une fois supérieurement et une fois inférieurement, on doit sommer tous les termes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs autorisées ; on peut alors supprimer le signe $\sum$ de cette sommation.

Ex. : $x^i \boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{n} x^i \boldsymbol{b}_i$; $a_i x^i = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$

(les indices supérieurs ne désignent jamais, ni ici, ni dans ce qui suit, des exposants ; si des exposants doivent intervenir, il faut mettre les parenthèses appropriées),

$$a_{ik} x^i y^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} x^i y^k$$
$$= a_{11} x^1 y^1 + a_{12} x^1 y^2 + \ldots + a_{nm} x^n y^m$$
$$= a_{is} x^i y^s = a_{rs} x^r y^s$$

(on peut changer les lettres désignant les indices de sommation),

$a_{iv} x^i = a_{1v} x^1 + \ldots + a_{nv} x^n$ (un indice qui ne figure pas simultanément en haut et en bas, ne conduit pas à une sommation ; dans cet exemple l'indice v sert simplement à caractériser des sommes différentes). Enfin $a_i^k c_{ij}^k$ ne conduit à aucune sommation puisqu'aucun des indices n'apparaît à la fois en haut et en bas.

Rem. : Pour des termes comportant des dérivées partielles, par ex. $\frac{\partial a}{\partial u^i}$, $\frac{\partial u^k}{\partial \hat{u}^i}$, l'indice figurant au dénominateur, ici i, est considéré comme indice inférieur. De façon analogue, dans a_{u^i}, i est également un indice inférieur.

Dual, bidual

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. $V^* = \mathfrak{L}(V, \mathbb{R})$, espace dual de V, est l'espace vectoriel des formes linéaires f définies sur V. Sa dimension est n (p. 89). $V^{**} = (V^*)^*$ s'appelle le bidual de V. Il est également de dimension n. V, V^*, V^{**} sont évidemment isomorphes, mais il existe un isomorphisme canonique entre V et V^{**}, c.-à-d. un isomorphisme indépendant de tout choix des bases : à tout $\boldsymbol{x} \in V$ on associe $\tilde{\boldsymbol{x}} \in V^{**}$ en posant $\tilde{x}(f) = f(\boldsymbol{x})$ pour tout $f \in V^*$. On vérifie facilement que l'application $\boldsymbol{x} \mapsto \tilde{\boldsymbol{x}}$ est un isomorphisme entre V et V^{**}.

Si V possède de plus une structure euclidienne, on peut également construire un isomorphisme canonique entre V et V^* : si $\boldsymbol{w} \in V$, l'application de V dans $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} = f_w(\boldsymbol{x})$ est une forme linéaire et la correspondance entre $\boldsymbol{w}$ et f_w définit un isomorphisme canonique entre V et V^*.

Bases, changements de bases

Si $b = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ est une base de V, tout vecteur $\boldsymbol{x} \in V$ peut s'écrire de façon unique $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{b}_i$ (convention de sommation !). Ici les coordonnées sont repérées par des indices supérieurs, contrairement à une écriture courante en algèbre. L'application $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{\varphi}^i(\boldsymbol{x}) = x^i$ est une forme linéaire et les n formes ainsi définies $\boldsymbol{\varphi}^1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}^n$ constituent une base b^* de V^*, appelée base duale de b. Tout élément $\boldsymbol{f}$ de V^* peut s'écrire, de façon unique, $\boldsymbol{f} = f_i \boldsymbol{\varphi}^i$. La correspondance entre b et b^* est une bijection entre l'ensemble des bases de V et celui des bases de V^* : toute base de V^* est la duale d'une et une seule base de V, son antéduale.

Si $\hat{b} = \{\hat{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ est une autre base de V, la matrice $A = (\alpha_i^k)$ des coordonnées selon b, écrites colonne par colonne, des vecteurs $\hat{\boldsymbol{b}}_i$, est la matrice de changement de base. Elle est régulière : $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cong \text{Aut.}(V, V)$ (p. 91) (réciproquement toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ permet de définir un changement de base).

Comme $\hat{\boldsymbol{b}}_i = \alpha_i^k \boldsymbol{b}_k$, $\hat{x}^i \hat{\boldsymbol{b}}_i = x^i \boldsymbol{b}_i \Rightarrow \hat{x}^i \alpha_i^k \boldsymbol{b}_k = x^i \boldsymbol{b}_i = x^k \boldsymbol{b}_k$ on obtient donc les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles, soit $x^k = \hat{x}^i \alpha_i^k$.

La matrice (β_i^k) associée à l'écriture $\boldsymbol{b}_i = \beta_i^k \hat{\boldsymbol{b}}_k$ est la matrice inverse de (α_i^k), $(\beta_i^k) = (\alpha_i^k)^{-1}$. Elle permet d'écrire $\hat{\boldsymbol{x}}^k = x^i \beta_i^k$, c.-à-d. les nouvelles coord. en fonction des anciennes. Il apparaît donc un comportement dit contravariant des coord. d'un vecteur $\boldsymbol{x} \in V$, lors d'un changement de base : la matrice exprimant la base $\hat{b}$ dans la base b permet d'écrire les coord. selon b en fonction des coord. selon $\hat{b}$.

Si maintenant on étudie le changement de base duale induit dans V^*, on est amené à écrire $\boldsymbol{f} = f_i \boldsymbol{\varphi}^i$ dans la base duale b^* de b, $= \hat{f}_k \hat{\boldsymbol{\varphi}}^k$ dans la base duale $\hat{b}^*$ de $\hat{b}$.

Comme $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \hat{f}_i \hat{x}^i = f_k x^k = f_k \hat{x}^i \alpha_i^k$, on en déduit d'abord $\hat{f}_i = f_k \alpha_i^k$, puis $\hat{f}_i \hat{\boldsymbol{\varphi}}^i = f_k \alpha_i^k \hat{\boldsymbol{\varphi}}^i = f_k \boldsymbol{\varphi}^k$, soit $\boldsymbol{\varphi}^k = \alpha_i^k \hat{\boldsymbol{\varphi}}^i$.

Ici l'expression $\hat{f}_i = f_k \alpha_i^k$ montre qu'on a directement les nouvelles coord. de $\boldsymbol{f}$ en fonction des anciennes. On dit qu'elles ont un comportement covariant.

De $\hat{f}_i = f_k \alpha_i^k$, on tire $f_i = \hat{f}_k \beta_i^k$, expression donnant les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles. En confrontant les positions de l'indice mobile dans les formules $\hat{\boldsymbol{b}}_i = \alpha_i^k \boldsymbol{b}_k$, $\boldsymbol{\varphi}^k = \alpha_i^k \hat{\boldsymbol{\varphi}}^i$ (échange des indices), on en déduit que la matrice changement de base qu'il faut prendre dans V^* est ${}^t(\alpha_i^k)^{-1}$, appelée *matrice contragrédiente* de (α_i^k).

Enfin, en passant au bidual, la matrice contragrédiente de ${}^t(\alpha_i^k)^{-1}$ étant (α_i^k), on en conclut que le comportement associé au changement de base est identique à celui observé dans V.

Rem. : Si V est un esp. euclidien, on peut donner une interprétation intéressante des coord. f_i. Soit $\boldsymbol{f} \in V^*$: $\exists!\, \boldsymbol{w} \in V$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}$ (isomorphisme canonique entre V et V^*). Dans la base b, $\boldsymbol{w} = w^i \boldsymbol{b}_i$, $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} = w^i \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{x} = w^i x_i$ en posant $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{x} = x_i$. Les x_i s'appellent les coord. covariantes de $\boldsymbol{x}$, alors que les x^i sont les coord. contravariantes. Il existe une correspondance linéaire bijective entre les coord. x^i et les coord. x_i. Les x_i s'expriment linéairement en fonction des x^i par le système (S) $x_i = \boldsymbol{b}_i \cdot x^k \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_k x^k$. On peut prouver que (S) est un système de CRAMER par rapport aux x^i (pp. 91, 93), donc calculer les x^i en fonction des x_i. L'adjectif covariant se justifie par la simple écriture $\hat{x}_i = \hat{b}_i \cdot x = \alpha_i^k b_k \cdot x = \alpha_i^k x_k$. En reprenant la forme $\boldsymbol{f}$ de coord. $f_1, \ldots, f_n$ dans b^*, on a successivement $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = f_1 x^1 + \ldots + f_n x^n = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}_i) = f_i = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{b}_i$, qui est la ième coord. covariante de $\boldsymbol{w}$. Les coord. de $\boldsymbol{f}$ dans b^* sont les coordonnées covariantes du vecteur $\boldsymbol{w}$ de V canoniquement associé à $\boldsymbol{f} \in V^*$.

Tenseurs

Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On appelle tenseur d'espèce (p, q) toute application $(p + q)$ linéaire T de $V^{*p} \times V^q$ dans $\mathbb{R}$.
En posant $\boldsymbol{h}^i \in V^*$, $i = 1, \ldots p$, $\boldsymbol{v}_j \in V$, $j = 1, \ldots q$, on a donc $(\boldsymbol{h}^1, \ldots \boldsymbol{h}^p, \boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_q) \mapsto T(\boldsymbol{h}^1, \ldots \boldsymbol{h}^p, \boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_q) \in \mathbb{R}$, linéairement selon tout $\boldsymbol{h}^i$ et tout $\boldsymbol{v}_j$.
On dit que T est p fois contravariant et q fois covariant.
Dans les calculs on utilise toujours une base b de V avec, simultanément, b^* pour V^*.

Ex. : a) Un tenseur d'espèce (0, 1) est une forme linéaire sur V :

$T(\boldsymbol{x}) = T(x^1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots x^n \boldsymbol{b}_n) = x^1 T(\boldsymbol{b}_1) + \ldots x^n T(\boldsymbol{b}_n)$ $= a_1 x^1 + \ldots a_n x^n$, en posant $a_i = T(\boldsymbol{b}_i)$. Les a_i sont les coordonnées de T *selon la base* b de V. Si V est euclidien, les a_i sont les composantes covariantes du vecteur de V biunivoquement associé à cette forme linéaire. Tout vecteur de V euclidien permet donc de définir un tenseur d'espèce (0, 1) ou tenseur covariant d'ordre 1. Les coordonnées de ce tenseur sont les composantes covariantes du vecteur relativement à b.

b) Un tenseur d'espèce (1, 0) est une forme linéaire sur V^*. C'est donc un élément de V^{**}. Si $\boldsymbol{a}$ est fixe dans V, si $\boldsymbol{f}$ décrit V^*, $\boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ est une forme linéaire sur V^*, et toute forme linéaire sur V^* peut s'écrire de cette façon (isomorphisme canonique entre V et V^{**}).
Si $\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{b}_i$ dans $b = (\boldsymbol{b}_1, \ldots \boldsymbol{b}_n)$, $\boldsymbol{f} = f_j \boldsymbol{\varphi}^j$ dans $b^* = (\boldsymbol{\varphi}^1, \ldots \boldsymbol{\varphi}^n)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = (f_j \boldsymbol{\varphi}^j)(a^i \boldsymbol{b}_i) = f_j a^i \boldsymbol{\varphi}^j(\boldsymbol{b}_i) = f_j a^i \delta_i^j = f_k a^k$ ($\delta_i^j = \delta_{ij} = \delta^{ij}$ = symbole de KRONECKER p. 89). En écrivant $T(f) = T(f_k \boldsymbol{\varphi}^k) = T(\boldsymbol{\varphi}^k) f_k$, on voit que les coordonnées $T(\boldsymbol{\varphi}^k)$ de T s'identifient aux a^k.
Tout vecteur de V permet donc de définir un tenseur d'espèce (1, 0) ou tenseur contravariant d'ordre 1. Les coordonnées de ce tenseur sont les composantes contravariantes du vecteur relativement à b.

c) Un tenseur d'espèce (0, 2) est une forme bilinéaire sur $V \times V$: $(\boldsymbol{x}, z) \mapsto T(\boldsymbol{x}, z)$. En posant $T(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = a_{ij}$, on a donc $T(\boldsymbol{x}, z) = a_{ij} x^i z^j$, où les a_{ij} sont les coordonnées de T selon b.
Si $\forall\, (\boldsymbol{x}, z) \in V^2$, $T(\boldsymbol{x}, z) = T(z, \boldsymbol{x})$, le tenseur est dit symétrique $(\Leftrightarrow \forall\, (i, j)\ a_{ij} = a_{ji})$.

d) On considère le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{x}$, z dans V supposé euclidien.
En écrivant $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{b}_i$, $z = z^j \boldsymbol{b}_j$, l'application $(\boldsymbol{x}, z) \mapsto \boldsymbol{x} \cdot z = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j x^i z^j$ définit une forme bilinéaire symétrique sur V^2, c'est-à-dire un tenseur symétrique d'espèce (0, 2).

Mais comme l'écriture $\boldsymbol{x} \cdot z$ peut également s'interpréter en $f_x(z)$ où f_x est la forme linéaire canoniquement associée à $\boldsymbol{x}$, on aura aussi un tenseur T_m d'espèce (1, 1), dont l'expression relative à b est particulièrement simple : $T_m(f_x, z) = \boldsymbol{x} \cdot z = x_i z^i$
T_m est dit tenseur métrique et la norme euclidienne de $\boldsymbol{x}$ est égale à $|x| = \sqrt{x_i x^i}$

On remarquera que $T_m(f_x, z) = T_m(f_z, \boldsymbol{x})$ puisque le produit scalaire est commutatif, soit $x_i z^i = x^i z_i$, et que les coordonnées de T_m relativement à b sont les δ_i^j ; elles ne dépendent pas du choix de b.

Coordonnées d'un tenseur. Cas général

On doit développer $T(\boldsymbol{h}^1, \ldots \boldsymbol{h}^p, \boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_q)$. On pose $\boldsymbol{h}^k = y_{i_k}^k \boldsymbol{\varphi}^{i_k}$, $\boldsymbol{v}_s = x_s^{j_s} \boldsymbol{b}_{j_s}$ (i_k et j_s décrivent l'ensemble d'entiers $\{1, \ldots n\}$.

$$T(\boldsymbol{h}^1, \ldots\ldots \boldsymbol{h}^p, \boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_q) = T\left(y_{i_1}^1 \boldsymbol{\varphi}^{i_1}, \ldots y_{i_p}^p \boldsymbol{\varphi}^{i_p}, x_1^{j_1} \boldsymbol{b}_{j_1}, \ldots x_q^{j_q} \boldsymbol{b}_{j_q}\right)$$
$$= T\left(\boldsymbol{\varphi}^{i_1}, \ldots \boldsymbol{\varphi}^{i_p}, \boldsymbol{b}_{j_1}, \ldots \boldsymbol{b}_{j_q}\right) y_{i_1}^1 \ldots y_{i_p}^p x_1^{j_1} \ldots x_q^{j_q}$$
$$= a_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} y_{i_1}^1 \ldots y_{i_p}^p x_1^{j_1} \ldots x_q^{j_q}, \text{ somme de } n^{p+q} \text{ termes.}$$

Les coordonnées de T selon b sont les n^{p+q} facteurs scalaires $a_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$.

Si l'on fait un changement de base, $b \mapsto \hat{b}$ (donc $b^* \mapsto \hat{b}^*$), les coordonnées contravariantes $x_s^{j_s}$ sont à remplacer par $\hat{x}_s^{r_s}\ \alpha_{r_s}^{j_s}$, les coordonnées covariantes $y_{i_k}^k$ par $\hat{y}_{t_k}^k \beta_{i_k}^{t_k}$.

Cela donne $a_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \hat{y}_{t_1}^1 \beta_{i_1}^{t_1} \ldots \hat{y}_{t_p}^p \beta_{i_p}^{t_p} \hat{x}_1^{r_1} \alpha_{r_1}^{j_1} \ldots \hat{x}_q^{r_q} \alpha_{r_q}^{j_q}$; d'où le coefficient de

$$\hat{y}_{t_1}^1 \ldots \hat{y}_{t_p}^p \hat{x}_1^{r_1} \ldots \hat{x}_q^{r_q} : \hat{a}_{r_1 \ldots r_q}^{t_1 \ldots t_p} = a_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \beta_{i_1}^{t_1} \ldots \beta_{i_p}^{t_p} \alpha_{r_1}^{j_1} \ldots \alpha_{r_q}^{j_q}$$

L'étude des tenseurs ne se borne pas à leur écriture associée à une base de V. Produits tensoriels, combinaisons linéaires de tenseurs, étude de tenseurs particuliers (symétriques, antisymétriques, ...) entrent dans le cadre de l'algèbre dite tensorielle. Pour la géométrie différentielle c'est un auxiliaire efficace. En voici un aperçu élémentaire :

Tenseurs et nappes injectives

On considère une nappe injective de classe C^r, représentée par le paramétrage $\boldsymbol{a}(u^1, u^2)$. La désignation par u^1 et u^2 des coordonnées locales, au lieu des lettres u et v rencontrées en des pages antérieures, se prête à la convention de sommation. Le passage à d'autres coordonnées locales $\hat{u}^1$ et $\hat{u}^2$ se fait par un changement de paramétrage admissible (p. 405) :

$(u^1, u^2) = \left(p^1(\hat{u}^1, \hat{u}^2), p^2(\hat{u}^1, \hat{u}^2)\right)$, les fonctions p^1 et p^2 étant toutes deux de classe C^r et la matrice fonctionnelle $\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \hat{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \hat{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \hat{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \hat{u}^2} \end{pmatrix}$ ayant un déterminant non nul

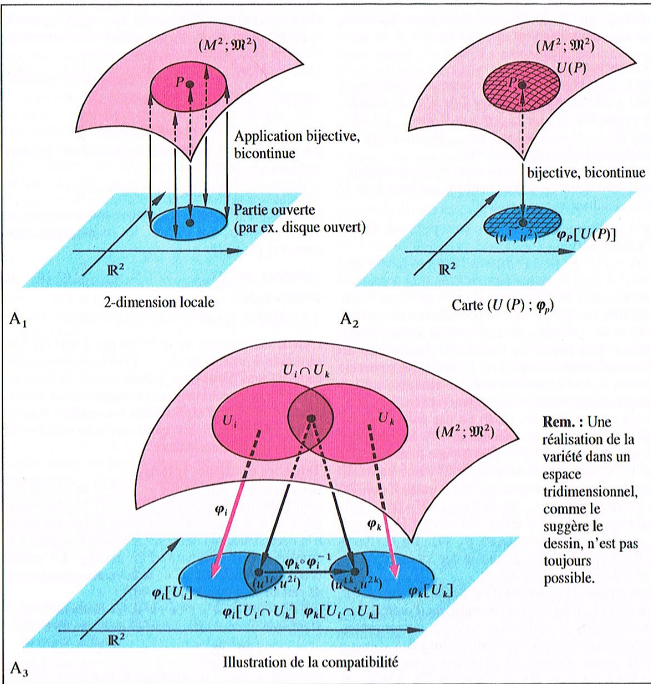
À ce changement de paramétrage on peut associer un changement de base dans le plan tangent en un point, que l'on peut considérer comme espace vectoriel euclidien de dimension 2.

Si on choisit comme base $\{\boldsymbol{a}_{u^1}, \boldsymbol{a}_{u^2}\}$, avec $\boldsymbol{a}_{u^k} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^k}$, alors le changement en la base $\{\boldsymbol{a}_{\hat{u}^1}, \boldsymbol{a}_{\hat{u}^2}\}$ a pour matrice (α_i^k) la matrice fonctionnelle précédente. Il suffit d'appliquer la règle des dérivées partielles à $\boldsymbol{a}_{\hat{u}^i}$ (l'index i dans $\boldsymbol{a}_{\hat{u}^i}$ et $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^i}$ est inférieur) :

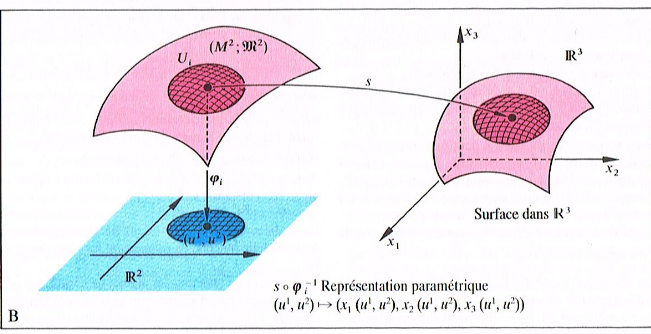
$$\boldsymbol{a}_{\hat{u}^k} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \hat{u}^k} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial \hat{u}^k} = \frac{\partial u^i}{\partial \hat{u}^k} \boldsymbol{a}_{u^i}$$

La matrice inverse (β_i^k) s'identifie avec la matrice fonctionnelle obtenue en échangeant les rôles des u^i et $\hat{u}^k$.

Tout vecteur du plan tangent permet de définir, par ses coordonnées contravariantes, un tenseur contravariant d'ordre 1, et par ses coordonnées covariantes un tenseur covariant d'ordre 1.



Variété de dimension 2



Surface dans ℝ³

Les points des différents ensembles usuels que l'on rencontre en géométrie différentielle (courbes, surfaces) ont la propriété de pouvoir être appréhendés, tout au moins localement, comme éléments d'espaces topologiques particuliers, grâce à l'expression de leurs coordonnées. Si l'on veut placer ces résultats dans un cadre plus général, il faut poser la question des hypothèses minimales exigibles d'un espace topologique destiné à recevoir une géométrie différentielle « raisonnable ». Et simultanément il faut se demander dans quelle mesure il est possible de définir une « géométrie intrinsèque » à un tel espace, c'est-à-dire indépendante de l'existence d'un sur-espace dans lequel il serait plongé (les courbes et les surfaces ont l'avantage d'être plongées dans $\mathbb{R}^3$).

Les recherches faites dans cette direction ont conduit à la notion de variété. Les explications qui suivent peuvent s'adapter sans trop de difficultés au cas n-dimensionnel.

Variété de dimension 2

Sous ce vocable on peut se représenter un espace topologique qui, localement, c'est-à-dire dans un voisinage ouvert de chacun de ses points, ne diffère pas essentiellement de $\mathbb{R}^2$. D'une manière plus précise on pose :

Déf. 1 : Un espace d'HAUSDORFF connexe (pp. 223, 227) possédant une base d'ouverts dénombrable (p. 217) est appelé variété (topologique) de dimension 2 si chaque point possède un voisinage homéomorphe (p. 219) à un ouvert de $\mathbb{R}^2$ muni de sa topologie naturelle (p. 215) (fig. A_1). L'ensemble sous-jacent d'une telle variété sera en général noté V^2.

Pour voisinage ouvert dans $\mathbb{R}^2$ on peut par ex. prendre un domaine, et plus particulièrement un disque ouvert. La désignation 2-dimensionnelle est due aux théorèmes 2 et 4 de la p. 233. *Ex.* : surface sphérique considérée comme sous-espace de $(\mathbb{R}^3, \mathfrak{R}^3)$.

Cartes, atlas

Pour disposer, au voisinage d'un point P d'une variété de dimension 2, de deux coordonnées dites locales, u^1 et u^2 on se sert de l'homéomorphisme local précédemment défini. Il existe sur V^2 un voisinage ouvert $U(P)$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$ par φ_P, application bijective et bicontinue de $U(P)$ sur $\varphi_P(U(P)) \subseteq \mathbb{R}^2$. L'application φ_P^{-1} transfère par ex. les coordonnées cartésiennes u^1, u^2 des points de $\varphi_P(U(P))$ à ceux de $U(P)$: u^1 et u^2 deviennent coordonnées locales dans $U(P)$. Un couple de type $(U(P)\ ;\ \varphi_P)$ s'appelle une carte de V^2 en P (ill. A_2). Il est bien évident qu'une carte en P est également une carte en tout point de $U(P)$.

Pour atteindre tous les points de V^2, il faut choisir un ensemble de cartes $(U_i\ ;\ \varphi_i)$, $i \in I$, de telle sorte que $\{U_i, i \in I\}$ constitue un recouvrement ouvert de V^2. On peut ainsi associer à chaque point de V^2 au moins un couple de coordonnées locales (suivant la carte choisie le contenant). L'ensemble des cartes $\{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ s'appelle un atlas (topologique) de V^2. Pour une sphère il faut au moins deux cartes pour obtenir un atlas.

Variété différentiable

On considère ici les intersections $U_i \cap U_k$ $(i \neq k)$ de deux ouverts du recouvrement $\{U_j, j \in I\}$ qui sont non vides. Certains points de V^2 vont donc posséder plus d'un système de coordonnées locales. Si P est repéré par (u^{1i}, u^{2i}), resp. (u^{1k}, u^{2k}), on a $(u^{1k}, u^{2k}) = \varphi_k \circ \varphi_i^{-1}(u^{1i}, u^{2i})$, l'application $\varphi_k \circ \varphi_i^{-1}$ étant conventionnellement définie sur $\varphi_i(U_i \cap U_k)$ (fig. A_3).

Cette application $\varphi_k \circ \varphi_i^{-1}$ est un homéomorphisme entre $\varphi_i(U_i \cap U_k)$ et $\varphi_k(U_i \cap U_k)$. On dit que les deux cartes (U_i, φ_i) et (U_k, φ_k) sont compatibles si les deux fonctions définies dans $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, $\varphi_k \circ \varphi_i^{-1}$ et $\varphi_i \circ \varphi_k^{-1}$ sont différentiables. Si la compatibilité est vérifiée pour tout $U_i \cap U_k$ non vide, on dit que l'atlas est différentiable. Un atlas sera dit de classe C^r si les fonctions précédentes sont toutes de classe C^r.

Déf. 2 : Une variété V^2 est dite différentiable, resp. (C^r) différentiable, ou encore possède une structure de (C^r) différentiabilité, si on peut lui associer un atlas différentiable, resp. (C^r) différentiable. Deux (C^r) atlas de V^2 sont dits équivalents si leur réunion est un (C^r) atlas de V^2. Il s'agit d'une relation d'équivalence, d'où l'existence de classes d'équivalence et l'intérêt qu'il faut porter aux propriétés indépendantes du choix d'un atlas dans une classe donnée.

Rem. : On peut effectivement construire des exemples de variétés munies de structures de différentiabilité différentes.

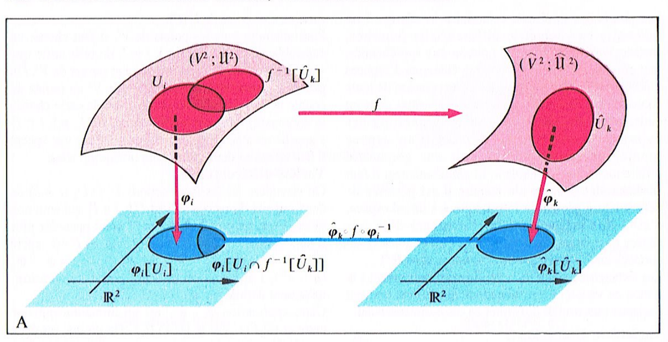
Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Soit une variété V^2 de dim. 2, de classe C^r ; on suppose qu'il existe une application $s : V^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, telle que pour toute carte (U_i, φ_i) la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ $s \circ \varphi_i^{-1}$ soit une fonction de classe C^r dont les dérivées partielles premières définissent partout des vecteurs indépendants. On dit alors que $s(V^2)$ est une surface (régulière) de classe C^r dans $\mathbb{R}^3$ et qu'elle réalise V^2 dans $\mathbb{R}^3$ (fig. B). On notera que les fonctions $s \circ \varphi_i^{-1}$ peuvent être regardées comme des représentations paramétriques locales de la surface.

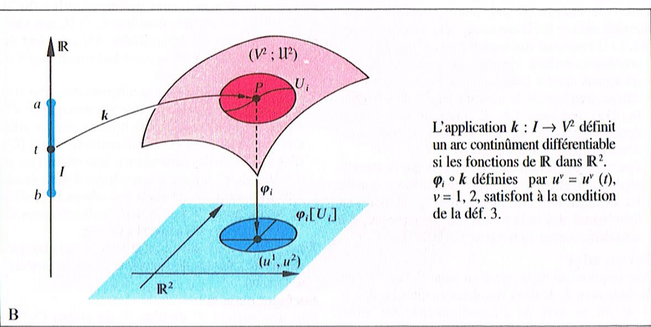
(Suite de la p. 419) Le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ du plan tangent conduit avec l'écriture $(x^i \boldsymbol{a}_{u^i}) \cdot (z^j \boldsymbol{a}_{u^j}) = (\boldsymbol{a}_{u^i} \cdot \boldsymbol{a}_{u^j}) x^i z^j$ à un tenseur symétrique d'ordre 2 deux fois covariant, dont les coordonnées $g_{ij} = \boldsymbol{a}_{u^i} \cdot \boldsymbol{a}_{u^j}$ ont été vues (p. 409) : $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$, $g = \det(g_{ij})$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} = E\, x^1 z^1 + F(x^1 z^2 + x^2 z^1) + G\, x^2 z^2$. On sait que le tenseur métrique d'espèce (1, 1) a des coordonnées indépendantes de la base choisie, le produit scalaire étant égal à $x^i z_i = x_i z^i$. Si l'on veut exprimer le produit scalaire à l'aide uniquement des coordonnées covariantes de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{z}$, on doit simplement remplacer dans $x^i z_i$ les coordonnées contravariantes par leurs expressions en fonction des coordonnées covariantes. Comme $x_i = (x^k a_{u^k}) \cdot a_{u^i}$ soit $x_i = x^k g_{ik}$ (S), l'écriture $x^i = g^{ik} x_k$ s'obtient en résolvant le système (S) : En posant $g^{11} = \frac{1}{g} g_{22} = \frac{G}{g}$, $g^{12} = g^{21} = -\frac{1}{g} g_{12} = -\frac{1}{g} g_{21} = -\frac{F}{g}$, $g^{22} = \frac{1}{g} g_{11} = \frac{E}{g}$, on a

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} = g^{ij} x_i z_j = \frac{1}{g}\left(G x_1 z_1 - F(x_1 z_2 + x_2 z_1) + E x_2 z_2\right).$$

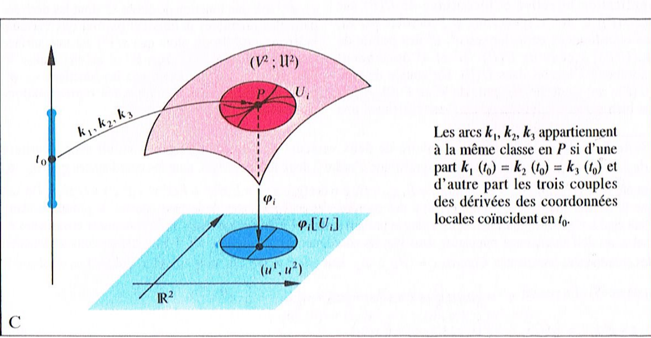
On en tire les coordonnées du tenseur d'espèce (2, 0) associé, tenseur symétrique d'ordre 2, deux fois contravariant.



Correspondance entre variétés



Arc de courbe sur une variété



Arcs équivalents

Correspondances entre variétés

On sait que la compatibilité d'une application avec des structures topologiques passe par la continuité (p. 219). On exigera donc ici d'une application f d'une variété V dans une autre $\widehat{V}$ qu'elle soit continue, c'est-à-dire que l'antécédent de tout ouvert $\widehat{O}$ soit un ouvert O. Mais comme de plus on s'intéresse aux variétés différentiables, voire de classe C^r, on exigera que la « confrontation entre f et les cartes » respecte la (C^r) différentiabilité.

La figure A illustre cette démarche et l'on pose :

Déf. 3 : V^2 et $\widehat{V}^2$ désignant deux variétés de dimension 2 et de classe C^r, une application $f : (V^2, \mathfrak{B}^2) \mapsto (\widehat{V}^2, \widehat{\mathfrak{B}}^2)$ est dite (C^r) différentiable, si f est continue et si $\forall(i, k)$ la fonction $\widehat{\varphi}_k \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ représentée dans la fig. A est (C^r) différentiable.

Arcs injectifs sur des variétés, vecteurs tangents, espace tangent

Un arc injectif est l'image d'une application continue injective k d'un intervalle I dans une variété (on a donc une application continue bijective de I sur $k(I)$).

Par arc injectif (continûment) différentiable on entend évidemment que les fonctions coordonnées locales $u^\nu = u^\nu(t)$ qui le définissent sont (continûment) différentiables. Si l'on veut reprendre la notion de vecteur tangent en un point de l'arc on ne peut pas opérer comme à la page 405, car on ne peut pas se référer à un espace vectoriel ambiant. Mais il est possible d'avoir recours à une propriété qui d'une part permet de classer toutes les courbes qui se rencontrent en ce point et d'autre part peut être associée à la variété.

Deux arcs injectifs définis respectivement par $t \mapsto k(t)$ et $t \mapsto \bar{k}(t)$ qui ont en commun le point $P = k(t_0) = \bar{k}(t_0)$ sont dits équivalents en ce point si les fonctions coordonnées locales correspondantes $u^\nu = u^\nu(t)$, resp. $\bar{u}^\nu = \bar{u}^\nu(t)$ satisfont à $\frac{du^\nu}{dt}(t_0) = \frac{d\bar{u}^\nu}{dt}(t_0)$, c.-à-d. si les couples $\left(\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d\bar{u}^1}{dt}, \frac{d\bar{u}^2}{dt}\right)$ coïncident en t_0 (fig. C). Cette notion est indépendante des paramétrages admissibles et des cartes utilisées.

Il s'agit d'une relation d'équivalence dont les classes sont appelées vecteurs tangents. Ceux-ci sont donc représentés par les couples (ξ^1, ξ^2) où $\xi^\nu := \frac{du^\nu}{dt}(t_0)$.

L'ensemble des vecteurs tangents en un point d'une variété de dimension 2 est un espace vectoriel de dimension 2. On le désigne par espace tangent en P à la variété. Il correspond au plan tangent usuel.

Variété riemannienne, géométrie riemannienne

Le problème fondamental d'une géométrie intrinsèque à une variété est bien celui de la « mesure des longueurs ». On procède par analogie avec la longueur d'un arc de courbe.

Rappelons que pour calculer la longueur d'un arc tracé sur une surface dans $\mathbb{R}^3$ on se sert de la première forme fondamentale, c.-à-d. de la forme quadratique $E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, dans laquelle on remplace λ par $\varphi_1'(t)$ et μ par $\varphi_2'(t)$, les valeurs de E, F, G étant prises au point de paramètres $u = \varphi_1(t)$ et $v = \varphi_2(t)$ (p. 409). Cette forme quadratique est définie positive en tout point d'une nappe régul. ($E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 > 0$ pour $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$), puisqu'elle représente le carré scalaire du vecteur de coordonnées λ et μ dans la base $\left\{\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}(u, v)\right\}$ du plan tangent (p. 406).

Si l'on pose $u^1 = u$, $u^2 = v$, $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$, on introduit une écriture tensorielle et finalement un champ de tenseurs symétriques deux fois covariants, dont les coordonnées $g_{11}(u^1, u^2)$, $g_{12}(u^1, u^2) = g_{21}(u^1, u^2)$, $g_{22}(u^1, u^2)$ pour la base $\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^1}, \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^2}\right)$ définissent une forme quadratique non dégénérée positive (tenseurs métriques). C'est par cette interprétation que l'on peut passer à une variété V^2 pour introduire une « mesure des longueurs ». Une structure riemannienne sur une variété V^2 est définie par la donnée, en tout point P de V^2, d'un tenseur métrique. V^2, munie du champ de tenseurs ainsi défini, s'appelle une variété riemannienne (on dit aussi espace riemannien). La géométrie intrinsèque correspondante est dite géométrie riemannienne. Le tenseur métrique au point P définit une structure euclidienne sur l'espace tangent en P. Si $\boldsymbol{x} = (\xi^1, \xi^2)$ et $\boldsymbol{y} = (\eta^1, \eta^2)$ sont deux vecteurs de cette espace, on a $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = g_{ik}\xi^i\eta^k$, et $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}$.

La longueur d'un arc injectif de classe C^1 est

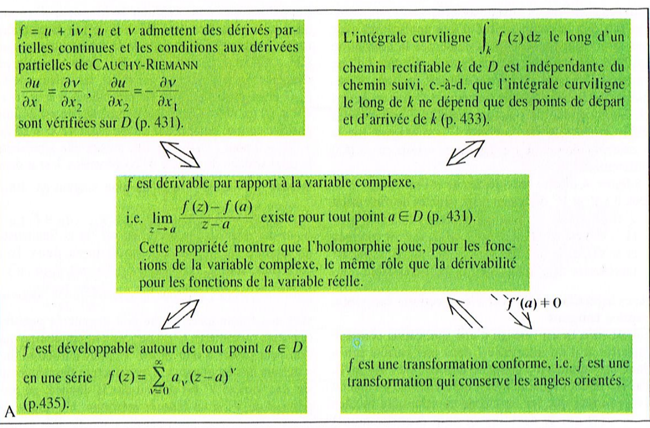
$l = \int_a^b \sqrt{(g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k)(t)}\, dt$, en posant conventionnellement $\dot{u}^i = \frac{du^i}{dt}$. Pour mesurer l'angle de deux arcs admettant pour vecteurs tangents $\boldsymbol{x}$, resp. $\boldsymbol{y}$, on écrit

$\cos \alpha = \frac{g_{ik}\xi^i\eta^k}{|\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{y}|}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Enfin pour une partie mesurable G de V^2, la théorie montre que son « aire » est égale à $I(G) = \int_G \sqrt{g}\, du^1\, du^2$ où $g = g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2$, le domaine d'intégration étant celui qui correspond à la définition de G dans le plan des (u^1, u^2).

Rem. : Pour la définition d'une variété n-dimensionnelle on remplace simplement $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^n$. Un champ de tenseurs métriques plus généraux permettra en particulier l'introduction d'une géométrie intrinsèque à une telle variété. On aboutit ainsi à la géométrie riemannienne en dimension n.

Rem. de la p. 419 (suite) **:** On définit un champ de tenseurs sur un ouvert O, si à tout point $\boldsymbol{v} \in O$ on associe un tenseur de même espèce T_v relativement à un espace vectoriel V, de dim. n si $O \subset \mathbb{R}^n$. Les coordonnées de T_v pour une base b de V sont fonction de $\boldsymbol{v}$.

Ex. : E, F, G (resp. $\frac{G}{g}, -\frac{F}{g}, \frac{E}{g}$) définissent sur l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ où sont définies les coordonnées locales un champ de tenseurs d'espèce (0, 2) et un d'espèce (2, 0).



Différentes formulations équivalentes de l'holomorphie d'une fonction sur un domaine D

RIEMANN-$\mathbb{C}$-fonctions analytiques (p. 445)

Le domaine d'holomorphie de f peut être une surface de RIEMANN S, constituée par des feuillets appliqués sur tout ou partie de $\widehat{\mathbb{C}}$, déroulés autour de points dits de branchement, empilés les uns sur les autres et raccordés les uns aux autres. Il peut y en avoir un ensemble fini ou infini. Si E désigne l'ensemble des points de branchement, $S \setminus E$ a localement la même structure que $\mathbb{C}$ et f admet au voisinage de tout point a de $S \setminus E$ un développement en série entière dépendant du feuillet auquel a appartient.



Méromorphie des $\widehat{\mathbb{C}}$ - $\widehat{\mathbb{C}}$ -fonctions (p. 441)

On convient ici que f peut prendre ses valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}}$ et que si $f(a) = \infty$, $\frac{1}{f(a)} = 0$: f est alors dite méromorphe sur un domaine D de $\widehat{\mathbb{C}}$ si pour tout a de D, il existe un voisinage ouvert connexe de a sur lequel f ou $\frac{1}{f}$ est holomorphe.



Holomorphie des $\widehat{\mathbb{C}}$-$\mathbb{C}$-fonctions (p. 441)

On peut étendre le domaine dit d'holomorphie de la fonction par passage au plan achevé $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans les conditions suivantes : $f(z)$ est holomorphe pour $|z| > r > 0$ et a une limite $l \in \mathbb{C}$ quand $z \to \infty$. On pose $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ pour $0 < |z| < \frac{1}{r}$ et $g(0) = l$. Si g est holomorphe sur un disque ouvert contenant 0, on convient de dire que f est holomorphe sur un domaine contenant ∞.



Holomorphie des $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-fonctions (p. 431)

Holomorphie au sens strict, comme dans tab. A.

B

Extension de la notion d'holomorphie

La branche mathématique appelée *théorie des fonctions analytiques* s'intéresse aux fonctions à valeurs et arguments complexes. Pour les fonctions réelles de la variable réelle, la propriété d'approximation linéaire permet de définir la classe des fonctions différentiables, celle d'intégrabilité les classes des fonctions RIEMANN – intégrables, resp. LEBESGUE – intégrables. Si l'on passe de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, on peut également rechercher a priori des classes de fonctions.

Historiquement, différentes voies ont été abordées pour des fonctions complexes de la variable complexe : introduction des séries entières (WEIERSTRASS), propriété d'intégrabilité (CAUCHY), propriétés topologiques et dérivation complexe (RIEMANN), définition de transformations géométriques particulières (ABEL). Or toutes ces constructions ont conduit à une seule et même classe de fonctions, celle des fonctions holomorphes.

L'agrégation de tous ces points de vue fournit une théorie étonnamment complète qui apporte une solution à de nombreux problèmes que la théorie des fonctions de variable réelle ne permettait pas de résoudre. Il apparaît souvent qu'un prolongement complexe convenable d'une fonction de variable réelle peut seul donner des renseignements satisfaisants sur son comportement.

Dans ce qui suit, on présente d'abord brièvement le corps topologique $\mathbb{C}$ des nombres complexes et ses principales propriétés, puis on effectue sa compactification topologique. Elle donne le plan achevé $\widehat{\mathbb{C}}$ (p. 427). Sur $\mathbb{C}$, resp. $\widehat{\mathbb{C}}$, on peut aborder l'étude des limites pour les suites ou les fonctions. Elles conduisent aux notions de continuité (p. 429) et d'*holomorphie* (p. 431).

L'holomorphie sera définie comme une dérivabilité complexe. Comme les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont identifiables aux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, on verra comment une fonction dont les composantes réelles sont continûment dérivables peut être holomorphe (conditions aux dérivées de CAUCHY-RIEMANN).

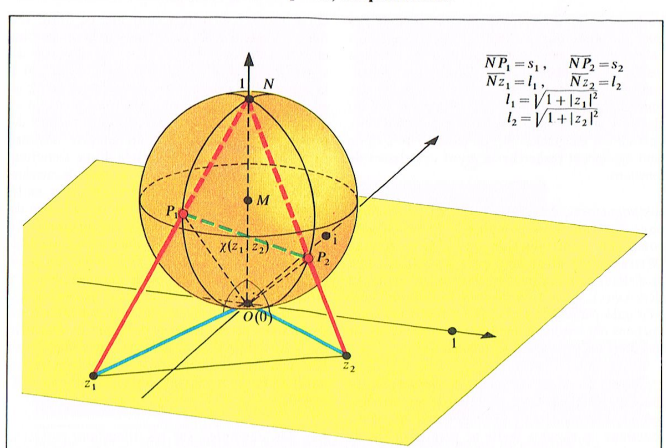
L'étude des intégrales curvilignes dans le plan complexe, en particulier de leur indépendance éventuelle du chemin suivi, fournit, pour les fonctions complexes, une propriété équivalente à l'holomorphie (p. 433). Les formules intégrales de CAUCHY permettent de montrer un résultat remarquable : une fonction holomorphe sur un domaine D limité par une courbe de JORDAN C rectifiable, continue sur $D \cup C$, est entièrement définie par ses valeurs sur la frontière C.

On démontre ensuite l'équivalence entre les fonctions holomorphes et les fonctions développables en série entière (p. 435). L'étude des domaines de convergence des séries entières conduit d'une part à la notion de *singularités*, points exceptionnels où le prolongement holomorphe n'est pas possible et d'autre part à la mise en place d'un processus de prolongement holomorphe à un domaine maximal (p. 437). Parmi les singularités d'une fonction, certaines peuvent disparaître si l'on étend de manière convenable la notion de fonction, d'autres ne le peuvent pas (singularités essentielles). La notion de *méromorphie* dans le plan complexe compactifié et l'extension du domaine de définition à des ensembles de points de dimension 2 superposés au plan complexe fournissent des outils puissants pour ces prolongements (*surface de* RIEMANN pp. 443 *sqq.*). Seule la notion de *fonction analytique* sur une surface de RIEMANN permet vraiment de définir les fonctions qui sont l'objet de la théorie des fonctions. Dans la démarche suivie apparaissent alors des séries généralisées (par exemple les *séries de* LAURENT, p. 439).

Par des exemples sur les fonctions entières, périodiques, algébriques, on montre la portée de la théorie (pp. 447 *sqq.*). On découvre en particulier des propriétés remarquables du prolongement analytique complexe de la fonction exponentielle réelle qui se révèle être périodique et en étroite relation avec les fonctions circulaires. Enfin les fonctions doublement périodiques font découvrir des propriétés complètement nouvelles qui, par essence, ne peuvent pas apparaître dans le cas des fonctions de la variable réelle.

Pour clore l'étude des fonctions d'une variable complexe, on recherche les propriétés géométriques des fonctions analytiques. Le cas des transformations *conformes* (pp. 455 *sqq.*) conduit à une nouvelle condition équivalente à l'holomorphie. Un des résultats les plus importants est le théorème de transformation de RIEMANN. Il en ressort, en faisant le lien avec les transformations linéaires, une vision complète des transformations conformes sur des domaines simplement connexes.

Dans un dernier paragraphe, on essaie d'étendre les résultats obtenus pour des fonctions d'une variable à des fonctions de plusieurs variables. Cette extension n'est pas toujours possible et présente des difficultés. Certains problèmes conduisent à des concepts nouveaux. Ainsi, l'étude du domaine de convergence d'une série aboutit à l'introduction des domaines de REINHARDT (tout domaine ne peut pas être domaine d'holomorphie d'une fonction).



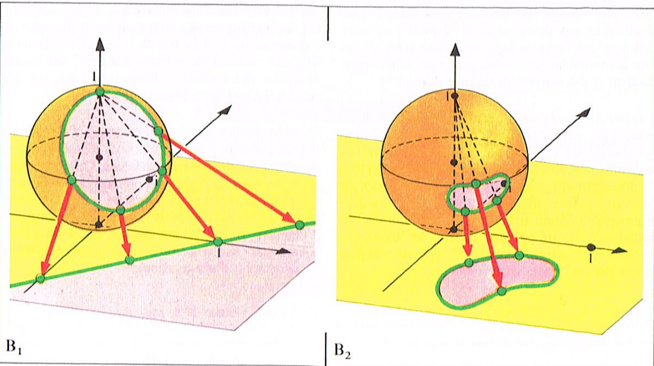
Les triangles NOP_1 et Nz_1O sont semblables (triangles rectangles ayant un même angle, l'angle en N).
On en déduit $s_1 : s_1 = 1 : l_1$ i.e. $s_1 l_1 = 1$. On a de même $s_2 l_2 = 1$.
La relation $s_1 l_1 = s_2 l_2$ entraîne que $s_1 : s_2 = l_2 : l_1$, ce qui signifie que les triangles NP_1P_2 et Nz_2z_1 sont semblables. Il vient alors :

$$\frac{\hat{d}(z_1, z_2)}{|z_1 - z_2|} = \frac{s_2}{l_1} = \frac{1}{l_1 \cdot l_2} = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2} \cdot \sqrt{1+|z_2|^2}},$$

$$\hat{d}(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2} \cdot \sqrt{1+|z_2|^2}}$$

A

Plan des complexes, sphère de RIEMANN, distance cordale



Courbes de JORDAN dans $\hat{\mathbb{C}}$

Le corps des nombres complexes

Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ a été construit en tant que surcorps de $\mathbb{R}$ (p. 65). Les éléments $z \in \mathbb{C}$ s'écrivent sous la forme $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. x s'appelle la *partie réelle* et y la *partie imaginaire* du nombre z. On représente le nombre complexe $z = x + iy$ par le point de coordonnées (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ (plan de GAUSS). Le *nombre complexe conjugué* de $z = x + iy$ est $\bar{z}$, $\bar{z} = x - iy$.
$\mathbb{C}$ est algébriquement clos, ce qui signifie que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant est entièrement scindable, c.-à-d. décomposable en un produit de facteurs de degré 1.
Les propriétés topologiques de $\mathbb{C}$ sont importantes pour l'analyse. On définit la *valeur absolue* ou *module* de $z = x + iy$ en posant $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

C'est une norme euclidienne qui permet donc de considérer $\mathbb{C}$ comme un espace métrique ($d(z, z') = |z - z'|$). On a l'égalité $|z|^2 = z\bar{z}$. Les ε-voisinages de z dans le plan de GAUSS sont les disques ouverts de centre z et de rayon ε. $\mathbb{C}$ muni de la topologie métrique associée à d est un espace localement compact, mais non compact (p. 229). $\mathbb{C}$ est de plus un espace complet, ce qui signifie que dans $\mathbb{C}$ toute suite de CAUCHY converge.

Compactification de $\mathbb{C}$

Par l'adjonction d'un point complémentaire à $\mathbb{C}$, appelé *point à l'infini* et noté ∞, on peut compactifier l'espace topologique localement compact $\mathbb{C}$ (p. 229).
On notera $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La topologie de $\hat{\mathbb{C}}$ qui, on va le voir, est obtenue à partir d'une construction géométrique remarquable, admet comme topologie induite sur $\mathbb{C}$ celle qui est précisément définie par la distance d précédente.
Une projection stéréographique du plan de GAUSS ($\mathbb{C}$) sur une sphère S de diamètre l'unité, tangente en 0 à ($\mathbb{C}$), à partir du point $N \in S$ diamétralement opposé à 0, met en correspondance bijective $\mathbb{C}$ et $S \setminus \{N\}$ (S est dite *sphère de RIEMANN*, *cf.* p. 66 ill. C). On convient de compléter cette bijection par $\infty \leftrightarrow N$. $\hat{\mathbb{C}}$ est donc en bijection φ avec S. S et ($\mathbb{C}$) sont plongés dans l'espace euclidien de dim. 3. La distance euclidienne $d(z_1, z_2)$ de deux points z_1 et z_2 de ($\mathbb{C}$) est $|z_1 - z_2|$. Celle de leurs homologues P_1 et P_2 est donnée par l'expression $\hat{d}(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$ (fig. A).

La distance de N à P, image de z, est donnée par l'expression $\hat{d}(\infty, z) = \dfrac{1}{\sqrt{(1+|z|^2)}}$.

La topologie de $\hat{\mathbb{C}}$ est la topologie métrique définie par la distance $\hat{d}$, dite distance *cordale*. La restriction de $\hat{d}$ à $\mathbb{C}$ définit les mêmes ouverts que la distance d.

Déf. 1 : $(\hat{\mathbb{C}}, \hat{d})$ est le *plan de* GAUSS *achevé*, en abrégé plan achevé.

Rem. 1 : La distance $\hat{d}$ est bornée par 1, tandis que d n'est pas bornée.

Rem. 2 : Toutes les parties de $\hat{\mathbb{C}}$ qui contiennent ∞ et l'extérieur d'un cercle de centre 0 dans $\mathbb{C}$ appartiennent à l'ensemble des voisinages de ∞ (noté $\mathfrak{U}(\infty)$), puisque

$$|z| > r \Leftrightarrow \hat{d}(z, \infty) < \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Rem. 3 : Dire que la suite (z_n), définie dans $\mathbb{C}$, tend vers ∞ dans $\hat{\mathbb{C}}$, c'est dire que $|z_n|$ est fortement divergente dans $\mathbb{R}^+$ (ce qui explique le choix du vocabulaire « point à l'infini »), ou de manière équivalente $\hat{d}(z_n, \infty) \to 0$.

Rem. 4 : Il faut signaler que ∞ ne peut être manipulé comme un nombre complexe. Sans doute peut-on tolérer les écritures $\forall z \in \mathbb{C}$, $z + \infty = \infty + z = \infty$, $\frac{z}{\infty} = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z \cdot \infty = \infty$, mais il ne peut être question de donner un sens à $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Une partie ouverte de $(\mathbb{C}, d)$ resp. $(\hat{\mathbb{C}}, \hat{d})$ est connexe si elle n'est pas la réunion de deux ouverts disjoints non vides, conformément aux définitions 2 et 3 p. 223.

Déf. 2 : Une telle partie s'appelle un *domaine*.

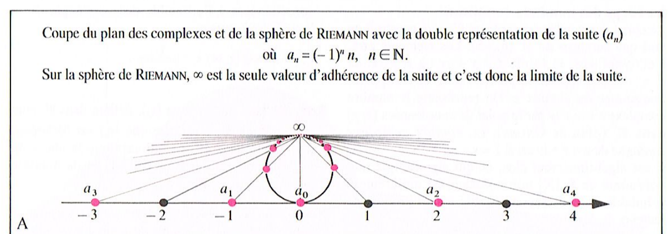
Les ensembles de définition des fonctions holomorphes sont en général des domaines ; dans certains cas ils auront une propriété supplémentaire : ils seront *simplement connexes* (pp. 213, 239).

Rem. 1 : Si ∞ est un point extérieur à un domaine D de $\hat{\mathbb{C}}$, alors D est un domaine borné de $(\mathbb{C}, d)$ et réciproquement.

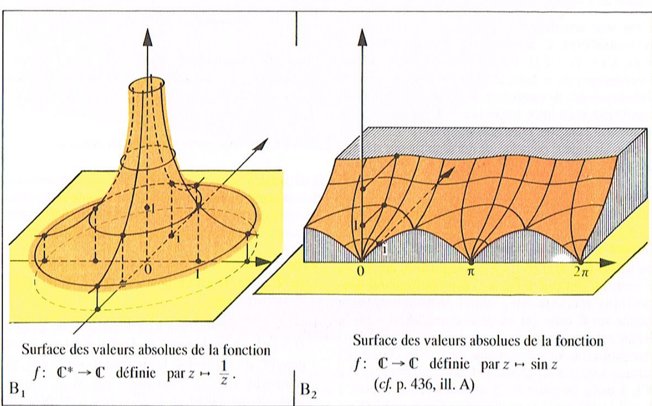
Rem. 2 : si ∞ est intérieur à un domaine D de $\hat{\mathbb{C}}$, alors $D \setminus \{\infty\}$ est un domaine de $\mathbb{C}$ et il n'est pas borné dans $(\mathbb{C}, d)$. L'exemple le plus simple est $D = \hat{\mathbb{C}}$. En revanche il faut remarquer que si D' est un domaine non borné de $\mathbb{C}$, $D' \cup \{\infty\}$ n'est peut-être pas un domaine de $\hat{\mathbb{C}}$ (par ex. $z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > 0\}$).

Si L est une courbe de JORDAN (p. 235) dans $(\mathbb{C}, d)$, $\mathbb{C} \setminus L$ est la réunion de deux domaines disjoints, dont l'un est borné (l'*intérieur* de L) et l'autre E non borné. $E \cup \{\infty\}$ est un domaine de $\hat{\mathbb{C}}$. Si L est une courbe de JORDAN dans $\hat{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire l'image dans $\hat{\mathbb{C}}$ par la bijection φ^{-1} d'une courbe de JORDAN L' tracée sur S, deux cas peuvent se présenter : $\infty \notin L$, L est dans $\mathbb{C}$ et l'on retrouve le cas précédent. Si $\infty \in L$, $\hat{\mathbb{C}} \setminus L$ est la réunion dans $\mathbb{C}$ de deux sous-domaines disjoints non bornés (fig. B_1 et B_2).
Dans l'étude des fonctions $f : D_f \to \mathbb{C}$, avec $D_f \subseteq \mathbb{C}$, on sera amené aussi bien à étudier les prolongements de l'ensemble de définition $D_f \subseteq \mathbb{C} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ que le prolongement de l'espace d'arrivée $\mathbb{C}$ en $\hat{\mathbb{C}}$.
Si le prolongement du plan de GAUSS par un seul élément diffère du prolongement projectif d'un plan réel (p. 139), c'est que son but est différent : l'usage de $\hat{\mathbb{C}}$ apporte de l'élégance aux raisonnements et à l'expression des résultats. De plus $\hat{\mathbb{C}}$ est une surface de RIEMANN (pp. 442 *sqq.*).

Coupe du plan des complexes et de la sphère de RIEMANN avec la double représentation de la suite (a_n) où $a_n = (-1)^n n, \quad n \in \mathbb{N}$.
Sur la sphère de RIEMANN, ∞ est la seule valeur d'adhérence de la suite et c'est donc la limite de la suite.



Exemple de convergence dans $\widehat{\mathbb{C}}$



Surface des valeurs absolues de la fonction $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \frac{1}{z}$.

B₁

Surface des valeurs absolues de la fonction $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \sin z$ (*cf.* p. 436, ill. A)

B₂

Surfaces des valeurs absolues de fonctions complexes

$f: D_f \to \mathbb{C}$ avec $D_f = \{z \,/\, |z-1| < 1\}$ déf. par $z \mapsto \frac{1}{z}$.

D_f est l'intérieur du disque centré en 1 de rayon 1.
Le prolongement de f à $\widehat{\mathbb{C}}$ est partout continu pour la distance cordale. f est donc uniformément continue pour la distance cordale.
Par contre, f n'est pas uniformément continue pour la distance dans $\mathbb{C}$. En effet, si on choisit $\varepsilon = \frac{1}{2}$, quel que soit $\delta \in \mathbb{R}^*_+$, il existe $\nu \in \mathbb{N}^*$ tel que pour

$z_{1\nu} = \frac{1}{\nu}$ et $z_{2\nu} = \frac{1}{2\nu}$ on ait

$|z_{2\nu} - z_{1\nu}| = \frac{1}{2\nu} < \delta$ mais

$|f(z_{2\nu}) - f(z_{1\nu})| = \nu > \varepsilon$.

C

Continuité uniforme

Suites complexes

$\mathbb{C}$ étant un espace métrique, la convergence d'une suite de nombres complexes (z_n) vers une limite a s'énonce de façon connue : *la suite* (z_n), $z_n \in \mathbb{C}$ *converge vers* $a \in \mathbb{C}$
ssi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0, |z_n - a| \leq \varepsilon$.

Prop. 1 : *Une condition nécessaire et suffisante de convergence de* (z_n) *vers* a *est que les deux suites* $(\mathrm{Re}\, z_n)$ *et* $(\mathrm{Im}\, z_n)$ *convergent respectivement vers* $\mathrm{Re}\, a$ *et* $\mathrm{Im}\, a$.

La convergence au sens de la topologie usuelle implique celle au sens de la topologie définie par la distance cordale. La distance cordale permet, de plus, d'introduire la notion de convergence pour des suites ayant leurs éléments dans $\widehat{\mathbb{C}}$: la suite (z_n), $z_n \in \widehat{\mathbb{C}}$ converge vers $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ si, et seulement si :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ \,/\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0, \hat{d}(z_n, a) \leq \varepsilon$.

Prop. 2 : *Une suite dans* $(\widehat{\mathbb{C}}, \hat{d})$ *ayant une limite finie a ses valeurs dans* $\mathbb{C}$ *à partir d'un certain rang et converge alors dans* $(\mathbb{C}, d)$ *vers la même limite.*

Dans l'analyse réelle, on parle de divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$ (p. 277). Dans le cas complexe, on dit qu'il y a convergence vers ∞. Ainsi, par exemple, la suite $((-1)^n \cdot n)$ est convergente dans $\widehat{\mathbb{C}}$ et sa limite est ∞. Il apparaît clairement sur la sphère de RIEMANN que cette suite possède une unique valeur d'adhérence dans $\widehat{\mathbb{C}}$ (ill. A). Dans $\widehat{\mathbb{C}}$, toute suite possède au moins une valeur d'adhérence.

Fonctions complexes

Les fonctions complexes de variable complexe entrent dans le cadre général des fonctions (p. 33). Selon que l'on autorise ou non le point ∞ dans les ensembles de définition et de valeurs des fonctions, on parle de $\widehat{\mathbb{C}}$-$\widehat{\mathbb{C}}$, $\widehat{\mathbb{C}}$-$\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-$\widehat{\mathbb{C}}$ ou $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-fonction.
Une $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-fonction se ramène à deux fonctions réelles de deux variables réelles. Si on pose $z = x + \mathrm{i}y$, on aura $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, où u et v sont des $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$-fonctions, que l'on peut considérer comme les composantes d'une $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^2$-fonction F. Réciproquement toute $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^2$-fonction définit une $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-fonction.
Le graphe d'une fonction complexe est un ensemble de points de l'espace $\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{R}^4$, de dimension quatre sur $\mathbb{R}$, ce qui exclut toute représentation usuelle. On obtient un renseignement qui peut être utile en portant au-dessus de tout point $z \in D_f$ la valeur $|f(z)|$. L'ensemble de points de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ ainsi obtenu s'appelle *surface des valeurs absolues* (ill. B).

Continuité

Une limite de fonction complexe se définit dans les termes de déf. 4, p. 283 en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ resp. $\widehat{\mathbb{C}}$. La notion topologique de continuité d'une fonction peut être formulée au moyen de la distance puisque $\mathbb{C}$ et $\widehat{\mathbb{C}}$ sont des espaces métriques (*cf.* prop. 3, p. 285).

Prop. 3 : *Une* $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-*fonction* f *est continue en* $a \in D_f$ *ssi* $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+, \exists \delta \in \mathbb{R}^*_+ \,/\, \forall z \in D_f, |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| \leq \varepsilon$.
On a un résultat analogue pour une $\widehat{\mathbb{C}}$-$\widehat{\mathbb{C}}$-fonction en remplaçant la valeur absolue par $\hat{d}$.

Si le point ∞ est l'argument de la fonction, il s'ensuit :
Si $f(\infty) \neq \infty$, f *est continue en* ∞ *ssi* $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+, \exists r \in \mathbb{R}^*_+ \,/\, \forall z \in D_f, |z| > r \Rightarrow |f(z) - f(\infty)| < \varepsilon$.
Si $f(a) = \infty$, f *est continue en* $a \neq \infty$ *ssi* $\forall M \in \mathbb{R}^*_+, \exists \delta \in \mathbb{R}^*_+ \,/\, \forall z \in D_f, |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M$.
Si $f(\infty) = \infty$, f *est continue en* ∞ *ssi* $\forall M \in \mathbb{R}^*_+, \exists r \in \mathbb{R}^*_+ \,/\, \forall z \in D_f, |z| > r \Rightarrow |f(z)| > M$.

Les fonctions rationnelles, qu'on supposera ici définies par des fractions rationnelles irréductibles, forment une classe importante au sein de l'ensemble des fonctions continues. Si $z \in \mathbb{C}$ et $f(z) \neq \infty$, la continuité se justifie comme dans le cas réel. La continuité est encore valable en ∞ si on prolonge la fonction définie par :

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0},$$

$a_n \neq 0, b_m \neq 0, n, m \in \mathbb{N}$

de manière convenable en ce point : il suffit de poser (*cf.* p. 305) :

$$f(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \infty & \text{si } n > m \end{cases}$$

Si a est un *pôle* de f (p. 303), on pose $f(a) = \infty$. Les fonctions rationnelles sont alors des $\widehat{\mathbb{C}}$-$\widehat{\mathbb{C}}$-fonctions définies et continues sur tout $\widehat{\mathbb{C}}$.

Continuité uniforme

Dans l'étude de la continuité, le fait que l'on choisisse la métrique définie par la distance cordale ou, dans le cas de points et de valeurs dans $\mathbb{C}$, celle dérivant de la valeur absolue, ne joue aucun rôle. Dans l'étude de la continuité uniforme (*cf.* p. 289), la métrique choisie est déterminante.

Déf. : Une application f d'un espace métrique (E_1, d_1) dans un espace métrique (E_2, d_2) est dite *uniformément continue sur* $F \subseteq E_1$, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \,/\, \forall (z_1, z_2) \in F \times F, d_1(z_1, z_2) < \delta \Rightarrow d_2(f(z_1), (f(z_2)) < \varepsilon$.

Ex. 1 : $F = E_1 = E_2 = \mathbb{C}$, $d_1 = d_2 = d$, $z \mapsto f(z) = z^2$. f n'est pas uniformément continue sur F, car si δ existait pour $\varepsilon < 1$, en faisant $z_1 = \frac{1}{\delta}$, $z_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ on aurait $|z_1^2 - z_2^2| > 1$, ce qui est contradictoire avec $|z_1^2 - z_2^2| < \varepsilon$.

Ex. 2 : $F = E_1 = \mathbb{C}$, $d_1 = d$, $E_2 = \widehat{\mathbb{C}}$, $d_2 = \hat{d}$, $z \mapsto f(z) = z^2$. f est uniformément continue sur F car

$$\hat{d}(f(z_1),(f(z_2)) = |z_1 - z_2| \frac{|z_1 + z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^4)(1+|z_2|^4)}} \leqslant 2|z_1 - z_2|$$

Prop. 4 : *Toute application* f *continue d'un compact métrique* C *dans un espace métrique est uniformément continue sur* C.

Donc si f est continue sur F supposé compact dans $(\mathbb{C}, d)$, resp. $(\widehat{\mathbb{C}}, \hat{d})$, quel que soit l'espace image choisi $(\mathbb{C}, d)$ ou $(\widehat{\mathbb{C}}, \hat{d})$, f est uniformément continue sur F.

$f_1(z) = z = x_1 + \mathrm{i}x_2$

$u_1(x_1, x_2) = x_1$, $\quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 1$, $\quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$,

$v_1(x_1, x_2) = x_2$, $\quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$, $\quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1$.

f_1 est holomorphe, $f_1'(z) = 1$.

$f_2(z) = \bar{z} = x_1 - \mathrm{i}x_2$

$u_2(x_1, x_2) = x_1$, $\quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 1$, $\quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$,

$v_2(x_1, x_2) = -x_2$, $\quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$, $\quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -1$.

f_2 n'est pas holomorphe.

$f_3(z) = z^2 = x_1^2 - x_2^2 + 2\mathrm{i}x_1x_2$

$u_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $\quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1$, $\quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2$,

$v_3(x_1, x_2) = 2x_1x_2$, $\quad \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_2$, $\quad \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1$.

f_3 est holomorphe, $f_3'(z) = 2z$.

$f_4(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x_1 + \mathrm{i}x_2} = \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2} = \mathrm{e}^{x_1}(\cos x_2 + \mathrm{i}\sin x_2)$

$u_4(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{x_1}\cos x_2$, $\quad \frac{\partial u_4}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{x_1}\cos x_2$, $\quad \frac{\partial u_4}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -\mathrm{e}^{x_1}\sin x_2$,

$v_4(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{x_1}\sin x_2$, $\quad \frac{\partial v_4}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{x_1}\sin x_2$, $\quad \frac{\partial v_4}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{x_1}\cos x_2$.

f_4 est holomorphe, $f_4'(z) = \mathrm{e}^z$.

$f_5(z) = z^2 - \bar{z}^2 = 4\mathrm{i}x_1x_2$

$u_5(x_1, x_2) = 0$, $\quad \frac{\partial u_5}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$, $\quad \frac{\partial u_5}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$,

$v_5(x_1, x_2) = 4x_1x_2$, $\quad \frac{\partial v_5}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 4x_2$, $\quad \frac{\partial v_5}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4x_1$.

A $\quad f_5$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$ mais elle est dérivable par rapport à z en 0.

Vérification de l'holomorphie à l'aide des conditions aux dérivées de CAUCHY-RIEMANN

Soit $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$, $f(z) = u(x_1, x_2) + \mathrm{i}v(x_1, x_2)$:
si f est continûment dérivable par rapport à x_1 et x_2, alors :

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(x_1 - a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot(x_2 - a_2)}{|z-a|} = 0.$$

De $z - a = (x_1 - a_1) + \mathrm{i}(x_2 - a_2)$ et $\bar{z} - \bar{a} = (x_1 - a_1) - \mathrm{i}(x_2 - a_2)$, on tire

$x_1 - a_1 = \frac{1}{2}\left((z-a) + (\bar{z} - \bar{a})\right)$ et $x_2 - a_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left((z-a) - (\bar{z} - \bar{a})\right)$.

Ces relations permettent d'écrire $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot(x_2 - a_2)$ sous la forme conventionnelle $\frac{\partial f}{\partial z}(a)\cdot(z-a) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\cdot(\bar{z} - \bar{a})$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right).$$

Comme $f(z) = u(x_1, x_2) + \mathrm{i}v(x_1, x_2)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial v}{\partial x_2}(a) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(a)\right)\right).$$

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ est donc équivalente aux conditions de CAUCHY-RIEMANN en a.

Dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial z}(a) = f'(a)$.

B

Dérivées partielles formelles suivant z et $\bar{z}$.

Différentiabilité réelle

f étant une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, en écrivant $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$ et $f(z) = u(x_1, x_2) + \mathrm{i}v(x_1, x_2)$ (*cf.* p. 429), on définit une application F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2) \mapsto (u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))$. Si F est différentiable au point (a_1, a_2) (p. 323), on dit que la fonction f est $\mathbb{R}$-*différentiable* au point $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$.

Dérivabilité complexe

La différentiabilité des composantes réelles u et v permet de définir une approximation linéaire de F. On peut alors se demander si on peut approcher une fonction complexe $\mathbb{R}$-différentiable par une application linéaire, c.-à-d. si $\lim\limits_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z-a}$ existe puisque l'écriture $f(z) - f(a) = (z-a)L + (z-a)\varepsilon(z)$, où $\varepsilon(a) = 0$ et ε continue en a, est équivalente à $\frac{f(z)-f(a)}{z-a} \to L$ quand $z \to a$. L'exemple suivant montre que ce n'est pas toujours le cas :

Soit f la $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-fonction définie par $z \mapsto \bar{z}$. La $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^2$-fonction F correspondante est définie par $(x_1, x_2) \to (u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)) = (x_1, -x_2)$.

Les fonctions u et v admettent en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles selon x_1 et x_2 continues. La prop. 2 p. 321 permet de conclure à la différentiabilité de F sur $\mathbb{R}^2$ et donc à la $\mathbb{R}$-différentiabilité de f.

On a d'autre part :

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{(x_1 - a_1) - \mathrm{i}(x_2 - a_2)}{(x_1 - a_1) + \mathrm{i}(x_2 - a_2)}.$$

Pour $x_2 = a_2$ et $x_1 \neq a_1$ cette expression vaut 1. Elle vaut -1 pour $x_1 = a_1$ et $x_2 \neq a_2$. Elle n'admet donc pas de limite quand $z \to a$.

Le fait qu'une fonction complexe puisse être approchée de manière linéaire implique la $\mathbb{R}$-différentiabilité mais la réciproque est fausse.

On définit :

Déf. 1 : La $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-fonction $f : D_f \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-*dérivable* en $a \in \mathbb{C}$ si a est un point d'accumulation de D_f et si $\lim\limits_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existe.

Déf. 2 : La $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-fonction $f : D_f \to \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* sur le domaine $D \subseteq D_f$ (resp. en un point a intérieur à D_f) si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de D (resp. au point a).

La valeur $\lim\limits_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ s'appelle *dérivée* de f en a et on la note $f'(a)$. Par $z \mapsto f'(z)$, on définit sur D la fonction f', dérivée de f sur D.

Conditions de CAUCHY-RIEMANN

Si f est holomorphe en a, $\lim \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = f'(a)$ pour toute suite $z_n \to a = a_1 + \mathrm{i}a_2$, $z_n \neq a$. On prend successivement $z_n = a + h_n$, $z_n = a + \mathrm{i}h_n$, où $h_n \in \mathbb{R}^*$, $h_n \to 0$.

$$\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n} = \frac{[u(a_1 + h_n, a_2) - u(a_1, a_2)] + \mathrm{i}[v(a_1 + h_n, a_2) - v(a_1, a_2)]}{h_n} \to f'(a)$$

Donc $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial v}{\partial x_1}$ existent en a

et $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(a_1, a_2) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x_1}(a_1, a_2)$.

$$\frac{f(a+\mathrm{i}h_n)-f(a)}{\mathrm{i}h_n} = \frac{[u(a_1, a_2 + h_n) - u(a_1, a_2)] + \mathrm{i}[v(a_1, a_2 + h_n) - v(a_1, a_2)]}{\mathrm{i}h_n} \to f'(a)$$

Donc $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial v}{\partial x_2}$ existent en a

et $f'(a) = -\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x_2}(a_1, a_2) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(a_1, a_2)$.

En comparant les deux écritures, on a les *conditions de CAUCHY-RIEMANN*

$\frac{\partial u}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial v}{\partial x_2}(a_1, a_2)$,

$\frac{\partial u}{\partial x_2}(a_1, a_2) = -\frac{\partial v}{\partial x_1}(a_1, a_2)$. On peut alors prouver :

Prop. 1 : $f : D_f \to \mathbb{C}$ *est holomorphe en a intérieur à* D_f *ssi u et v sont différentiables en a et satisfont aux conditions de CAUCHY-RIEMANN.*

Dans l'exemple précédent, où la fonction f était définie par $f(z) = \bar{z}$, la première condition de CAUCHY-RIEMANN n'est pas satisfaite. Le tableau A donne d'autres exemples d'étude de l'holomorphie d'une fonction. Le tableau B crée un lien formel entre dérivabilité et $\mathbb{R}$-différentiabilité.

Les règles de dérivation formulées dans les prop. 2, 3, 5 et 6 pp. 293, 295 s'étendent à la dérivation complexe. On en déduit en particulier que les $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-fonctions rationnelles sont holomorphes sur tout leur domaine de définition (c.-à-d. $\mathbb{C}$ diminué des pôles).

Fonctions harmoniques

Comme les parties réelles et imaginaires des fonctions holomorphes sont deux fois continûment dérivables (*cf.* prop. 3 p. 433), les égalités de CAUCHY-RIEMANN impliquent que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}$

et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}$, d'où $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$

et $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = 0$.

Déf. 3 : Une $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$-fonction φ deux fois continûment dérivable sur un domaine D est dite *fonction harmonique* sur D si elle vérifie en tout point de D la condition $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$.

Prop. 2 : *Les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques. À toute fonction harmonique u sur un domaine D simplement connexe correspond une fonction harmonique v, définie à une constante additive près, telle que u et v puissent être considérées comme les parties resp. réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe.*

A_1 Exemple de calcul d'intégrales curvilignes le long d'un chemin continûment différentiable par morceaux en utilisant la formule générale $\int_k f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(k(t))k'(t)\,\mathrm{d}t$.

$k_1(t) = 1 - t + \mathrm{i}t, t \in [0,1]$; $k_2(t) = 1 - t, t \in [0,1]$; $k_3(t) = \mathrm{i}t, t \in [0,1]$.

$$\int_{k_1} z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (1 - t + \mathrm{i}t)(\mathrm{i} - 1)\,\mathrm{d}t = (\mathrm{i} - 1)\left[\int_0^1 (1 - t)\,\mathrm{d}t + i \int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right] = -1$$

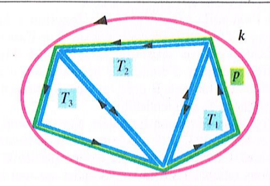
$$\int_{k_1} \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (1 - t - \mathrm{i}t)(\mathrm{i} - 1)\,\mathrm{d}t = (\mathrm{i} - 1)\left[\int_0^1 (1 - t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{i} \int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right] = \mathrm{i}$$

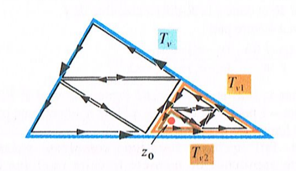
On a aussi $\int_{k_2} z\,\mathrm{d}z = \int_{k_3} z\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}$, $\int_{k_2} \bar{z}\,\mathrm{d}z = -\int_{k_3} \bar{z}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}$.

A_2 Cas où $f(z) = g'(z)$. Dans ce cas l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi pour joindre le point de départ au point d'arrivée : $\int_k g'(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b g'(k(t))k'(t)\mathrm{d}t = g(k(b)) - g(k(a)) = g(B) - g(A)$.

A_3 Ainsi $\int_{k_2+k_3} z\,\mathrm{d}z = \int_{k_1} z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}[z^2]_1^{\mathrm{i}} = -1$ tandis que $\int_{k_2+k_3} \bar{z}\,\mathrm{d}z = 0 \neq \int_{k_1} \bar{z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}$.

Calcul d'intégrales curvilignes





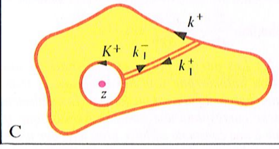
On suppose f holomorphe sur un ouvert U contenant le triangle Δ de frontière T orientée, de périmètre S et de diamètre D. On divise Δ en quatre triangles égaux dont on oriente convenablement les frontières. Soit Δ_1 l'un de ces triangles tel que $\left|\int_{T_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ soit maximal. On a $I = \left|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4\left|\int_{T_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$.

On réitère l'opération sur Δ_1.

… D'où une suite de triangles emboîtés Δ_n, dont les sommets convergent vers z_0, point commun à tous les Δ_n. On a d'une part $I \leq 4^n \left|\int_{T_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ (T_n frontière de Δ_n), d'autre part $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z)(z - z_0)$, où $\eta(z)$ tend vers 0 avec $|z - z_0|$. D'après A_2 $\int_{T_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{T_n} |z - z_0|\eta(z)\mathrm{d}z$. D'où $I \leq 4^n m_n D2^{-n}\, S2^{-n}$, où $D2^{-n}$ = diamètre de Δ_n, $S2^{-n}$ = périmètre de Δ_n, $m_n = \sup\{|\eta(z)|\,|\,|z - z_0| \leq D2^{-n}\}$. Finalement $I = 0$.

B

Justification des formules d'intégration de CAUCHY



$$L = k^+ + k_1 - K^+ - k_1$$

$$h(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

$$\int_L h(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0 \Rightarrow \int_{k^+} h(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{K^+} h(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

C

Démonstration de la formule intégrale de CAUCHY

Intégrale curviligne complexe

On aborde ici l'intégration d'une $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-fonction $f : D_f \to \mathbb{C}$. On a besoin de la notion d'*intégrale curviligne* (*cf.* déf. 1 p. 351). Étant donné un arc de JORDAN C orienté rectifiable (p. 347) paramétré par une $\mathbb{R}$-$\mathbb{C}$-fonction $k : [a, b] \to \mathbb{C}$, on définit une intégrale curviligne complexe le long de cet arc orienté de la même façon qu'une intégrale curviligne réelle. On ne fait que remplacer dans la somme $S(k, f, D, B) = \sum_{\nu=1}^{m} \langle f(x_\nu), \boldsymbol{a}_\nu - \boldsymbol{a}_{\nu-1}\rangle$ le produit scalaire par un produit de nombres complexes et on obtient, après avoir changé le nom des variables $S(k, f, D, B) = \sum_{\nu=1}^{m} f(\zeta_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1})$. On pose alors $\int_k f(z)\,\mathrm{d}z := \lim_{\mu \to \infty} S(k, f, Z_\mu, B_\mu)$ si cette limite existe dans les mêmes conditions que celles relatives à une intégrale curviligne réelle. On a également $\int_k f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\hat{k}} f(z)\,\mathrm{d}z$ si $\hat{k}$ est un autre paramétrage admissible de C, respectant son orientation (notation commune $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$).

Si la restriction de f à C est continue et si k est continûment dérivable, il s'ensuit :

$\int_k f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(k(t))\,k'(t)\,\mathrm{d}t$ (*cf.* prop. 2 p. 351).

L'intégrale curviligne peut ainsi être évaluée comme une intégrale de RIEMANN réelle. Si la fonction k est seulement continûment dérivable par morceaux, on peut évaluer l'intégrale sur chacun des morceaux puis, par sommation, en déduire l'intégrale curviligne. Le tableau A fournit des exemples de calculs d'intégrales curvilignes. Les règles d'intégrations K_1 à K_4 de la p. 351 sont valables pour ces intégrales curvilignes.

Propriété intégrale de CAUCHY

Les exemples du tab. A montrent qu'en général l'intégrale curviligne dépend non seulement des points de départ et d'arrivée de l'intégration mais aussi du chemin suivi entre ces deux points. Si l'intégrale curviligne ne dépend pas du chemin suivi, l'intégrale le long d'une courbe fermée vaut 0. On a alors :

Prop. 1 : *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe (p. 239) et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe ; alors pour toute courbe de* JORDAN *rectifiable k tracée dans D on a* $\int_k f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Pour prouver cette proposition, on approche k par un polygone p. En faisant appel à des propriétés de continuité uniforme, on peut rendre la différence $\left(\int_k f(z)\,\mathrm{d}z - \int_p f(z)\,\mathrm{d}z\right)$ aussi proche que l'on veut de 0. Si on découpe le polygone orienté en n triangles de bords T_ν (ill. B), on a :

$\int_p f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{T_\nu} f(z)\,\mathrm{d}z$. On montre ensuite que pour tout T_ν, $\int_{T_\nu} f(z)\mathrm{d}z = 0$ (ill. B)

Rem. : k étant une courbe de JORDAN orientée rectifiable dans $\mathbb{C}$, d'intérieur Ω, si f est continue sur $k \cup \Omega$, holomorphe sur Ω, on a encore $\int_k f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ car on peut approcher k par une suite de polygones intérieurs.

Formules intégrales de CAUCHY

Prop. 2 : *Soit f une fonction, holomorphe sur l'intérieur Ω d'une courbe de* JORDAN *rectifiable k, continue sur $k \cup \Omega$. Pour tout $z \in \Omega$ on a :*

$$f(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\pi}\int_{k^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Pour prouver cette proposition, on se donne un cercle K assez petit entourant z (ill. C). Vu la remarque précédente, on peut remplacer l'intégration sur k par l'intégration sur K sans changer la valeur de l'intégrale. On a donc :

$$\int_{K^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = f(z)\int_{K^+} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \int_{K^+} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

La deuxième intégrale du membre de droite vaut 0 car elle porte sur une expression bornée, puisque f est dérivable au point z et que K peut être choisi aussi petit que l'on veut. La première vaut $2\,\mathrm{i}\pi$ étant donné les résultats du tab. A ($\zeta - z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$).

Prop. 3 : *Sous les hypothèses de la prop. 2, f possède sur l'intérieur de k des dérivées à n'importe quel ordre et on a $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\,\mathrm{i}\pi}\int_{k^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

(*formule intégrale de* CAUCHY).

Une justification de cette formule consiste à prouver qu'on a le droit de dériver par rapport à z sous le signe d'intégration.

La dérivabilité au premier ordre d'une fonction complexe implique donc l'existence de dérivées à n'importe quel ordre.

Prop. 4 (MORERA) : *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe et $f : D \to \mathbb{C}$ continue. Si le long de toute courbe de* JORDAN *rectifiable orientée $k \subset D$ on a $\int_k f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, alors f est holomorphe sur D.*

La propriété d'holomorphie pour une fonction complexe est, comme on l'a déjà vu, beaucoup plus fructueuse que celle de dérivabilité pour les fonctions de variable réelle. Pour les fonctions de variable réelle, la fonction dérivée n'est pas toujours continue. L'holomorphie sur un domaine D entraîne par contre la dérivabilité à n'importe quel ordre ; les valeurs d'une fonction et de toutes ses dérivées sur l'intérieur d'une courbe de JORDAN rectifiable $k \subset D$ sont fixées par les valeurs de la fonction sur k ; la théorie de POISSON prouve même qu'il suffit de connaître la partie réelle de la fonction sur la courbe k pour la connaître partout sur l'intérieur.

$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu! z^\nu$,	$\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!} = \infty$,	$r = 0$,	convergence seulement en $z = 0$.
$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$,	$\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{1} = 1$,	$r = 1$,	convergence pour $\lvert z\rvert < 1$, divergence pour $\lvert z\rvert \geqslant 1$.
$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}$,	$\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu}} = 1$,	$r = 1$,	convergence pour $\lvert z\rvert \leqslant 1$ sauf pour $z = 1$, divergence pour $\lvert z\rvert > 1$ et $z = 1$.
$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^2}$,	$\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu^2}} = 1$,	$r = 1$,	convergence pour $\lvert z\rvert \leqslant 1$, divergence pour $\lvert z\rvert > 1$.
$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$,	$\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu!}} = 0$,	$r = \infty$,	convergence pour tout $z \in \mathbb{C}$

A

Domaine de convergence de certaines séries entières

$f: \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$ déf. par $z \mapsto \frac{1}{z-2}$ est développable en série entière autour du point $5 + 4\,i$.

On transforme :

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{3+4i+(z-(5+4i))} = \frac{1}{3+4i} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-(5+4i)}{3+4i}\right)},$$

$$f(z) = \frac{1}{3+4i} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{z-(5+4i)}{3+4i}\right)^\nu.$$

La série géométrique converge pour

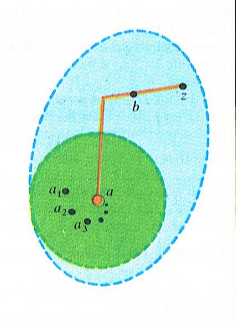
$$\left|\frac{z-(5+4i)}{3+4i}\right| < 1, \quad |z-(5+4i)| < |3+4i| = 5,$$

i.e. $r = 5$

B

Exemple de développement en série entière d'une fonction rationnelle

Si deux fonctions f_1 et f_2, holomorphes sur un même domaine D, prennent des valeurs égales pour tout $z = z_p$ (z_p) étant ici une suite injective tendant vers $a \in D$, f_1 et f_2 coïncident sur un disque ouvert Ω centrée en a, intérieur à D. On peut même en conclure que $f_1 = f_2$ sur D : en effet soit $z \in D$ en lequel on n'aurait pas $f_1(z) = f_2(z)$. Il existe une ligne polygonale injective incluse dans D, liant a à z car D est un domaine. Si on parcourt cette ligne de a vers z, $(f_1 - f_2)(m)$ variera continûment de 0 à $f_1(z) - f_2(z) \neq 0$, en conservant d'ailleurs la valeur 0 prise au départ, sur une partie de la ligne polygonale (au moins sur Ω) ; d'une manière précise il existe une sous-ligne polygonale (a, b) maximale sur laquelle $f_1(m) = f_2(m)$. Comme b est point d'accumulation de (a, b), $f_1 - f_2$ sera nulle sur un disque centré en b, d'après ce qui précède ; mais alors, si $b \neq z$, (a, b) ne serait plus maximale. Il y a contradiction :
$f_1(z) = f_2(z)$.



C

Propriété d'unicité

Développement en série

La dérivabilité à n'importe quel ordre en un point a est une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'une fonction réelle admette un développement en série de Taylor autour de a (p. 301). On peut de ce fait se demander si une fonction holomorphe est développable en une série similaire à la série de Taylor.

Pour cela, on va étudier certaines propriétés des séries entières complexes (*cf.* p. 289).

Prop. 1 : *Si la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z_1 - a)^\nu$ *converge pour* $z_1 \neq a$, *il en va de même de la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$ *pour tout z tel que* $|z-a| < |z_1 - a|$.

L'ensemble des points z tels que $|z - a| < |z_1 - a|$ constitue l'intérieur du disque de centre a passant par z_1.

Prop. 2 : *Si la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$ *converge pour des points z différents de a mais ne converge pas sur tout* $\mathbb{C}$, *il existe* $r \in \mathbb{R}_+$ *tel que cette série converge pour tout z tel que* $|z-a| < r$ *et diverge pour tout z tel que* $|z-a| > r$ *; r est défini par :*

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}.$$

r s'appelle le *rayon de convergence* de la série.

L'ensemble des points où la série converge est constitué de l'intérieur d'un disque de centre a et éventuellement de points de la frontière de ce disque (tab. A). La série est normalement, donc uniformément, convergente sur tout disque de centre a et de rayon $\rho < r$.

Prop. 3 : *La fonction définie par*

$$z \mapsto f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$ *est holomorphe sur l'intérieur du disque de convergence. Par dérivation terme à terme, on montre qu'on obtient la dérivée* $f'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu (z-a)^{\nu-1}$ *(même disque ouvert de convergence).*

On prouve de manière plus générale que la somme d'une série de fonctions holomorphes uniformément convergente sur un domaine D est une fonction holomorphe sur D et que celle-ci peut être dérivée terme à terme à un ordre quelconque, et de même intégrée terme à terme entre deux points de D.

La possibilité de développer une fonction holomorphe en série entière découle de la proposition suivante, qui est exactement la réciproque de la proposition 3.

Prop. 4 : *Soit* $f : D \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur un domaine* $D \subseteq \mathbb{C}$. *f est développable en série entière autour de tout point* $a \in D$ *et on a :*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!} (z-a)^\nu.$$

La série converge nécessairement vers f sur le plus grand disque ouvert centré en a sur lequel f est holomorphe.

Soit r le rayon du plus grand disque centré en a sur l'intérieur duquel f est holomorphe. On considère un cercle K_1 de rayon $r_1 < r$, centré en a.

Pour tout point z de l'intérieur de K_1, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\,i\pi} \int_{K_1^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

$\frac{1}{\zeta - z}$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{\frac{1}{\zeta-a}}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$, donc comme la somme d'une série géométrique :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-a)^\nu}{(\zeta-a)^{\nu+1}}$$ pour $|z-a| < |\zeta - a|$, d'où on tire l'égalité :

$$f(z) = \frac{1}{2\,i\pi} \int_{K_1^+} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^\nu}{(\zeta-a)^{\nu+1}}\right) d\zeta.$$

Comme la série converge uniformément sur K_1, on peut intégrer terme à terme et on obtient :

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\,i\pi} \int_{K_1^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{\nu+1}}\,d\zeta\right)(z-a)^\nu$$

et de là $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(z-a)^\nu$ étant donnée la prop. 3, p. 433.

La propriété 4 est remarquable puisqu'elle prouve qu'une fonction holomorphe sur D, i. e. une fois dérivable sur D, est développable en série de Taylor autour de tout point de D. Dans le cas des fonctions réelles, par contre, on a vu (*cf.* p. 300 ill. A) que la dérivabilité à un ordre quelconque n'implique pas l'existence d'un tel développement.

Le développement d'une fonction holomorphe en série entière autour d'un point a est unique. Le tableau B donne un procédé qui permet de développer en série entière des fonctions rationnelles, en utilisant des séries géométriques.

Deux séries entières autour d'un point a sont identiques ssi elles fournissent les mêmes valeurs pour une infinité de points a_ν admettant a comme point d'accumulation. On peut sous les mêmes hypothèses conclure à l'identité de deux fonctions holomorphes :

Prop. 5 (propriété d'identité) : *Soit* $f_1 : D \to \mathbb{C}$ *et* $f_2 : D \to \mathbb{C}$ *deux fonctions holomorphes sur le domaine D. Si pour une infinité de points* a_ν *intérieurs à D admettant a comme point d'accumulation dans D* $f_1(a_\nu) = f_2(a_\nu)$ *alors* $f_1 = f_2$ *sur D.*

Les hypothèses sont évidemment vérifiées si deux fonctions holomorphes coïncident sur un sous-domaine de D ou sur un arc de Jordan $k \subset D$.

Toute fonction holomorphe non constante possède donc en tout point $a \in D$ un voisinage de a sur lequel la valeur $f(a)$ n'est prise qu'en a. En particulier, tous les zéros dans D d'une fonction holomorphe non constante sur D sont des points isolés. Les seuls points d'accumulation possibles des zéros sont des points de la frontière de D. Le prolongement d'une fonction holomorphe définie sur un domaine D à un domaine $D' \supset D$ est donc unique quand il est possible.

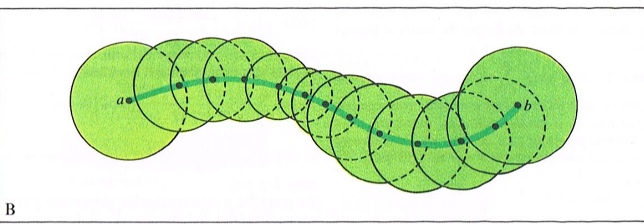
Les dév. en série entière des fonctions réelles sin, cos, sh, ch, exp ont un rayon de convergence infini. Ils définissent donc des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$. On remplace selon l'usage x par z pour les fonctions complexes. On calcule les dérivées en dérivant terme à terme et l'on retrouve : exp' = exp, sin' = cos, etc.
Les dév. en série entière permettent d'écrire certaines relations entre ces fonctions. En plus de celles citées à la p. 437, on trouve par ex. :

$$\sin z = \sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i} \cos x \operatorname{sh} y$$
$$\cos z = \cos(x + \mathrm{i}y) = \cos x \operatorname{ch} y - \mathrm{i} \sin x \operatorname{sh} y.$$

De plus, toutes les formules usuelles restent valables sur $\mathbb{C}$.
Toutes ces fonctions sont périodiques. La période des fonctions sin et cos vaut 2π, celle des fonctions exp, sh, ch vaut $2\mathrm{i}\pi$. Dans le cas complexe, les fonctions sin et cos ne sont pas bornées. On a en effet les relations $\sin \mathrm{i}y = \mathrm{i} \operatorname{sh} y$ et $\cos \mathrm{i}y = \operatorname{ch} y$, fonctions non bornées sur $\mathbb{R}$.

A

Prolongement holomorphe de certaines fonctions réelles



B

Prolongement analytique suivant le procédé des cercles enchaînés.

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$ (racine carrée positive de x) se prolonge dans $\mathbb{C}$ grâce à son développement en série entière sur le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1 :

on a, pour $x \in \,]0, 2[,\ f(x) = \sqrt{1+(x-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} (x-1)^{\nu}$ (*cf.* p. 300).

On pose pour $z \in \mathbb{C}$ et $|z-1| < 1$, $\quad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} (z-1)^{\nu}$.

La relation $f^2(z) = z$, valable sur $\mathbb{R}$, est toujours valable sur le disque ouvert $|z-1| < 1$, si bien que si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r < 2\cos\varphi$, on a $f(z) = \sqrt{r}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}$.

Par prolongement analytique vers -1 le long du demi-cercle supérieur k_1, on obtient une fonction f_1 définie sur le domaine bordé de rouge, avec

$$f_1(z) = \mathrm{i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} (-1)^{\nu} (z+1)^{\nu} \text{ pour } |z+1| < 1.$$

Par prolongement analytique le long du demi-cercle inférieur k_2, on obtient par contre une fonction f_2 définie sur le domaine bordé de vert, avec

$$f_2(z) = -\mathrm{i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} (-1)^{\nu} (z+1)^{\nu} \text{ pour } |z+1| < 1.$$

On a donc $f_1(-1) = \mathrm{i}$ et $f_2(-1) = -\mathrm{i}$.
f_1 et f_2 sont des prolongements de f mais f_2 n'est pas un prolongement de f_1.

C

Prolongements analytiques le long de différents chemins

Prolongement holomorphe

Une fonction réelle analytique en a (déf. 3 p. 301) est développable en série entière autour de a. La définition du rayon de convergence d'une série entière est la même dans les deux cas réel et complexe. Le développement en série entière d'une fonction réelle analytique, pris en tant que développement en série sur $\mathbb{C}$, est donc convergent sur l'intérieur d'un disque centré en a et de rayon le rayon de convergence de la série réelle. Cette série définit sur ce disque une fonction holomorphe, le prolongement holomorphe de la fonction réelle.

Pour des séries entières convergeant partout sur $\mathbb{R}$, comme c'est le cas pour les fonctions sin, cos, exp, sh, ch, on obtient à l'aide d'un tel prolongement des fonctions holomorphes sur tout $\mathbb{C}$, fonctions que l'on désignera toujours par le même symbole (tab. A). Si on compare les développements en série obtenus ici avec ceux de pp. 308, 310, on trouve les relations suivantes : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \cos z - \mathrm{i} \sin z$,

$$\cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \quad \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}),$$

$\operatorname{ch} z = \cos \mathrm{i}z$, $\operatorname{sh} z = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i}z$.

Elles prouvent que dans le cas complexe les fonctions exponentielles et hyperboliques sont périodiques, leur période étant complexe et valant $2\mathrm{i}\pi$.

Si le rayon de convergence d'un développement en série entière d'une fonction réelle analytique est fini, il existe sur la frontière du disque de convergence des points où la fonction prolongée ne pourra être holomorphe (prop. 4 p. 435).

Ex. : La fonction réelle définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ possède autour de $a = 0$ un développement en série entière $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$ dont le rayon de convergence est 1. La fonction est analytique sur tout l'axe réel, en particulier aux points -1 et 1, frontières de l'intervalle de convergence. Le prolongement holomorphe de cette fonction défini par $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ n'est pas défini aux points $-\mathrm{i}$ et i, situés sur le bord du disque de convergence de la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} z^{2\nu}$, et n'est pas borné lorsque l'on s'approche de ces points (pôles). Ceci explique la divergence de la série pour $|z| > 1$.

Prolongement analytique

Déf. : Soit $f : D_f \to \mathbb{C}$ et $g : D_g \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes resp. sur les domaines D_f et D_g. Si $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ et $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in D_f \cap D_g$ alors g *est appelé un prolongement analytique de* f et f *un prolongement analytique de* g.

La prop. d'unicité (p. 435) permet d'affirmer qu'un prolongement analytique de f sur un domaine contenant D_f est unique, s'il existe.

Pour obtenir éventuellement un prolongement analytique, on peut développer f en série entière autour d'un point $z_0 \in D_f$. f est alors à nouveau développable en tout point z_1 du disque (ouvert) de convergence de cette série. Les coefficients $\frac{f^{(\nu)}(z_1)}{\nu!}$ de la nouvelle série se calculent à partir de ceux de la première. Si, grâce au nouveau développement on sort du disque de convergence initial, on peut réitérer le procédé pour un point z_2 intérieur au deuxième disque de convergence mais extérieur au premier. En réitérant cette méthode, on peut obtenir un prolongement analytique sur une suite de disques ouverts de centres z_ν qui se recoupent. On peut relier les z_ν par un arc de Jordan k situé dans la réunion des disques précités. On dit alors que l'on a prolongé la fonction f de manière analytique le long de k. Ce type de construction est appelé procédé des *cercles de convergence enchaînés* (ill. B).

Il existe toutefois des fonctions pour lesquelles le prolongement au-delà du premier cercle de convergence n'est pas possible (*ex.* dans tab. A p. 438). On a d'ailleurs le résultat suivant :

Prop. 1 : *Pour tout domaine $D \subset \mathbb{C}$, il existe une fonction holomorphe f sur D qui ne peut être prolongée de manière holomorphe en dehors de D.*

Le problème, étant donné une fonction f, de trouver le plus grand domaine D_f sur lequel f puisse être prolongée de manière analytique n'est pas simple. En effet, s'il existe des prolongements analytiques le long de deux arcs k_1 et k_2 de même point de départ $z_0 = a$ et se rencontrant en un autre point b, rien ne prouve qu'on obtient le même développement en série entière en b.

Dans l'exemple de l'ill. C, les prolongements de f le long de k_1, resp. k_2, ne sont pas des prolongements l'un de l'autre ; la réunion de ces deux prolongements ne définit pas de fonction car les deux séries ne fournissent pas la même valeur en b.

Si on analyse la situation de l'ex. de l'ill. C, on constate que la réunion des deux arcs de cercles k_1 et k_2 constitue une courbe de Jordan dont l'intérieur contient le point 0 qui est un point singulier pour la fonction f, car il n'existe pas de série entière en z de rayon non nul dont le carré s'identifie à z. Les deux arcs k_1 et k_2 ne sont pas homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ au sens de déf. 2, p. 237 ou encore la réunion de k_1 et k_2 n'est pas homotope à un point dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. On peut, d'une manière générale, énoncer le théorème

Prop. 2 (monodromie) : *Soit k_1 et k_2 deux arcs de* Jordan *reliant des points a et b. Si f est prolongeable de manière analytique le long de k_1 et k_2 depuis a jusqu'en b et si k_1 peut se déformer continûment en k_2, a et b restant fixes, de telle façon que f soit prolongeable de manière analytique le long de tout arc intermédiaire, d'extrémités a et b, alors les deux prolongements donnent le même développement en série entière en b.*

Comme toute fonction holomorphe sur un domaine D est définie de manière unique par son développement en série entière autour d'un point $a \in D$ et que toute série entière possédant un rayon de convergence strictement positif définit une fonction holomorphe, on dit que les séries entières de rayon strictement positif définissent des *germes de fonctions holomorphes* ou encore *des éléments de fonction* (Généralisation p. 445).

$$f : \{z \mid |z| < 1\} \to \mathbb{C}, \text{ déf. par } f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu!},$$

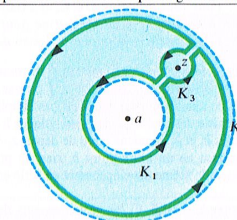
est holomorphe sur l'intérieur du disque unité car $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1$. Cette fonction n'est pas prolongeable de manière analytique à l'extérieur du disque unité : on choisit $\varphi = \frac{p}{q} \cdot 2\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, pgcd $(p, q) = 1$; on a, pour $z = r\,e^{i\varphi} = r\,e^{i\frac{p}{q}\cdot 2\pi}$ avec $0 < r < 1$,

$$\text{l'égalité } f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu!}\, e^{\nu!\frac{p}{q}\cdot 2\pi i} = \sum_{\nu=0}^{q-1} r^{\nu!}\, e^{\nu!\frac{p}{q}\cdot 2\pi i} + \sum_{\nu=q}^{\infty} r^{\nu!}.$$

Si $r \to 1$, le second terme tend vers ∞ tandis que la contribution du premier est plus petit que q en valeur absolue. On a donc $\lim\limits_{r\to 1} f(r\,e^{i\varphi}) = \infty$ si $\varphi = \frac{p}{q} \cdot 2\pi$. Tous les points du cercle unité de la forme $e^{i\frac{2p\pi}{q}}$ sont des points singuliers non isolés.

A

Exemple d'une fonction non prolongeable analytiquement



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$
$$\text{car } \int_{-K_1 - K_3 + K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0.$$

B

Représentation intégrale d'une fonction holomorphe dans une couronne

La fonction définie par $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2i}$ a des singularités isolées en 0, 1 et 2 i.

Elle admet trois développements en série de LAURENT autour de 0. On a :

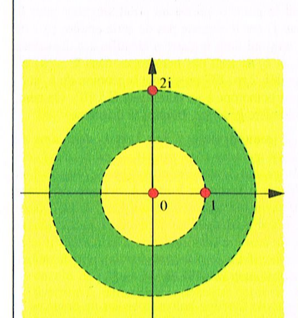
$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \quad \text{pour } |z| < 1,$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^\nu = \sum_{\nu=-1}^{-\infty} z^\nu \quad \text{pour } |z| > 1,$$

De plus,

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{2}z} = \frac{i}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{2}z\right)^\nu = -\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{2}\right)^{\nu+1} z^\nu \quad \text{pour } |z| < 2,$$

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{iz}} = \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{iz}\right)^\nu = \sum_{\nu=-1}^{-\infty}\left(-\frac{i}{2}\right)^{\nu+1} z^\nu \quad \text{pour } |z| > 2,$$



De là,

$$f(z) = \frac{1}{z} - \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{2}\right)^{\nu+1} z^\nu \quad \text{pour } 0 < |z| < 1,$$

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=-1}^{-\infty} z^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{2}\right)^{\nu+1} z^\nu \quad \text{pour } 1 < |z| < 2,$$

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=-1}^{-\infty} z^\nu + \sum_{\nu=-1}^{-\infty}\left(-\frac{i}{2}\right)^{\nu+1} z^\nu \quad \text{pour } |z| > 2.$$

C

Développements en série de LAURENT

Singularités d'une fonction holomorphe

Soit f une fonction holomorphe sur un domaine D de $\mathbb{C}$. Si $D = \mathbb{C}$, f est une fonction entière, c'est-à-dire que f est la somme d'une série entière $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ de rayon infini. Si D est différent de $\mathbb{C}$, D possède au moins un point frontière. Soit a un tel point. S'il existe une série entière en $(z-a)$ de rayon non nul, de somme $S(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$, et un voisinage ouvert V de a tel que f et S coïncident sur $(V \setminus \{a\}) \cap D$, alors f est prolongeable en une fonction holomorphe sur $D \cup V$, domaine plus grand que D.

Déf. 1 : Un point frontière a qui ne possède pas la propriété précédente est dit *point singulier*. Il est *isolé* s'il est le centre d'un disque ouvert Ω tel que $\forall b \in \Omega \setminus \{a\}$, il existe un prolongement de f à un domaine D_b contenant b. Il est *isolé simple* s'il est le centre d'un disque ouvert Ω tel que f admette un prolongement holomorphe à $D \cup (\Omega \setminus \{a\})$.

Ex. : a) $z \to f(z) = \frac{shz}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
On fait, elle est prolongeable sur $\mathbb{C}$ tout entier par $z \to \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu+1)!}$. On est dans le premier cas.

b) $z \to f(z) = \frac{1}{z}$ admet le point 0 comme point singulier isolé simple.

c) $z \to f(z) = \left(\sin\frac{1}{z}\right)^{-1}$ admet 0 comme point singulier mais il n'est pas isolé car il est point d'accumulation des points $z_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}^*$, qui sont des points singuliers isolés simples.

d) Tous les points du cercle centré en 0, de rayon 1, sont des points singuliers non isolés pour la fonction holomorphe $z \to f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu!}$ définie pour $|z| < 1$.

Il existe des fonctions holomorphes $z \mapsto f(z)$ telles que $[f(z)]^2 = z$. Si 0 est un point frontière du domaine de définition D d'une telle fonction, ce qui est le cas pour les exemples de la fig. C p. 436, 0 est un point singulier isolé non simple.

Séries de LAURENT

Autour d'un point singulier isolé simple existe un développement en série qui généralise un développement en série de TAYLOR. Soit f holomorphe sur un disque ouvert Ω épointé de son centre a, celui-ci étant point singulier isolé simple de f. Soit K_1 et K_2 deux cercles centrés en a, contenus dans Ω. K_1 désignant le plus petit des deux, on se place en un point z de la couronne ouverte extérieure à K_1, intérieure à K_2 (ill. B). Un raisonnement semblable à celui de la démonstration de la prop. 4 p. 435 conduit à la formule :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{K_2^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{K_1^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

On transforme l'expression sous la première intégrale comme à la p. 435 : $\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-a)^\nu}{(\zeta-a)^{\nu+1}}$. Comme z est extérieur à K_1, sous la deuxième intégrale on peut écrire :

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^{\nu-1}}{(z-a)^\nu} = -\sum_{\nu=-1}^{-\infty} \frac{(z-a)^\nu}{(\zeta-a)^{\nu+1}}.$$

Après intégration terme à terme et réarrangement des termes, on obtient une série de la forme :

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu \quad \text{avec } a_\nu = \frac{1}{2i\pi}\int_{K^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{\nu+1}}\,d\zeta,$$

$\nu \in \mathbb{Z}$ où K est un cercle quelconque centré en a situé dans la couronne.

Une telle série s'appelle une série de LAURENT admettant a comme *point de développement*. Elle se distingue d'une série de TAYLOR par l'apparition des puissances négatives de $(z-a)$ (*cf.* les séries pour cotan et coth pp. 308, 310). Les séries de TAYLOR sont des séries de LAURENT pour lesquelles $a_\nu = 0$ si $\nu \in \mathbb{Z}^*_-$.

Déf. 2 : Un point singulier isolé simple est appelé *pôle d'ordre k* ($k \in \mathbb{N}^*$) si dans la série de LAURENT de la fonction, on a $a_{-k} \neq 0$ mais $a_\nu = 0$ si $\nu < -k$.
S'il existe une infinité d'indices $\nu < 0$ tels que $a_\nu \neq 0$, on dit que le point a est un *point singulier isolé essentiel.*

Pour une classification plus précise des points singuliers isolés non simples, voir p. 444.

Les développements en série de LAURENT sont valables, comme on vient de le voir, pour des fonctions holomorphes ayant des points singuliers isolés simples ; ils sont également valables pour des fonctions holomorphes sur une couronne centrée en a. Une telle fonction peut, dans ce cas, ne pas être définie dans le disque intérieur. On a alors pour les rayons de convergence intérieur et extérieur les formules suivantes :

$$r_i = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|}, \quad r_e = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$$

$$\left(r_e = \infty, \text{si } \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0\right).$$

La convergence est uniforme sur tout compact du domaine de convergence. Si $r_i \neq 0$ (resp. $r_e \neq \infty$), il existe sur le bord intérieur (resp. extérieur) au moins un point singulier pour f.

On peut avoir différents développements en série de LAURENT autour d'un même point, correspondant à différentes couronnes (ill. C).

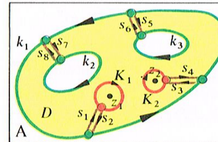
Une fonction rationnelle $z \mapsto f(z)$ tend vers ∞ si z tend vers un pôle (p. 429). On a, de façon générale, les résultats suivants :

Prop. 1 : *Soit $f : D_f \to \mathbb{C}$ et a un pôle de f. Pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, il existe $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $|f(z)| > M$ pour tout z vérifiant $|z-a| < \delta$.*

Pour un point singulier isolé essentiel, la situation est plus compliquée :

Prop. 2 (PICARD) : *Soit $f : D_f \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un voisinage épointé de a $U(a) \setminus \{a\}$ où a est un point singulier isolé essentiel de f : alors f prend dans tout voisinage épointé de a toute valeur de $\mathbb{C}$ sauf au plus une seule valeur.*

Si l'on opère avec des $\hat{\mathbb{C}}$-$\hat{\mathbb{C}}$-fonctions au lieu de $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-fonctions et qu'on inclut les pôles dans les domaines de définition des fonctions, on élimine le caractère exceptionnel des pôles. D'après la prop. 2, cela n'est pas possible pour les points singuliers isolés essentiels.



D ; $\partial D = \sum_{\mu=1}^{m} k_\mu$, $K = \sum_{\nu=1}^{n} K_\nu$, $S = \sum_{\varrho=1}^{r} s_\varrho$

Comme les raccordements sont parcourus deux fois, en sens opposés,

$$\int_{\partial D + K + S} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\partial D + K} f(z)\mathrm{d}z = 0, \text{ donc}$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_K f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-K} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} (\operatorname{res} f)(z_\nu)$$

Théorème des résidus

Calcul de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ a dans le demi-plan supérieur un seul pôle, i, dont le résidu vaut $-\frac{\mathrm{i}}{2}$. On a en effet la décomposition : $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2(1+\mathrm{i}z)} + \frac{1}{2(1-\mathrm{i}z)}$.

On choisit un chemin d'intégration conformément au dessin et on trouve :

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_k \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{i}}{2}, \quad \int_k \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \pi .$$

L'intégrale sur le demi-cercle est bornée par $\frac{\pi r}{r^2 - 1}$.
Elle tend donc vers 0 quand $r \to \infty$.

On a donc $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$.

Pour calculer $\int_0^{\infty} r(x)\,\mathrm{d}x$, où r est une fonction rationnelle dont les n pôles z_ν n'appartiennent pas à $\mathbb{R}_+^*$ et pour laquelle le degré du polynôme du dénominateur est supérieur d'au moins deux unités au degré du polynôme du numérateur, on choisit un chemin d'intégration qui « enferme » tous les pôles, comme sur le dessin ci-contre.

On pose $I : \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_1 + w_1 + K_2 + w_2} r(z) \ln z\,\mathrm{d}z$.

Comme la valeur de ln change de $2\,\mathrm{i}\,\pi$ après un tour autour de 0 dans le sens direct (*cf.* p. 452, ill. A_1), on a :

$$\int_{w_2} r(z) \ln z\,\mathrm{d}z = -\int_{w_1} r(z)(\ln z + 2\pi \mathrm{i})\mathrm{d}z ,$$

$$I = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_1} r(z) \ln z\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_2} r(z) \ln z\,\mathrm{d}z + \int_{w_1} r(z)\mathrm{d}z .$$

Les intégrales sur K_1 et K_2 tendent vers 0 quand $r_1 \to 0$ et $r_2 \to \infty$. On obtient donc :

$$\int_0^{\infty} r(x)\mathrm{d}x = -\sum_{\nu=1}^{n} (\operatorname{res}(r \cdot \ln))(z_\nu) .$$

Pour $r(z) = \frac{1}{1+z^n}$, $n \geq 2$, on a en particulier $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{n}}$, $z_\nu = z_1^{2\nu - 1}$, $\nu \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(\operatorname{res}(r \cdot \ln))(z_\nu) = \frac{\ln z_\nu}{n z_\nu^{n-1}} = \frac{(2\nu - 1)\pi \mathrm{i}}{n^2 z_1^{(n-1)(2\nu-1)}} = -\frac{(2\nu - 1)\pi \mathrm{i}}{n^2} z_1^{2\nu - 1},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \mathrm{i}}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} (2\nu - 1) z_1^{2\nu - 1}.$$

Pour simplifier la somme $S = \sum_{\nu=1}^{n} (2\nu - 1) z_1^{2\nu - 1}$, on calcule

$$S(1 - z_1^2) = z_1 - (2n-1) z_1^{2n+1} + 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} z_1^{2\nu+1} ,$$

$$S(1 - z_1^2)^2 = z_1 + z_1^3 - (2n+1) z_1^{2n+1} + (2n-1) z_1^{2n+3} ,$$

$$= -2n z_1 (1 - z_1^2) \qquad (\text{car } z_1^{2n} = 1),$$

$$S = -\frac{2n z_1}{1 - z_1^2} = -\frac{2n}{\frac{1}{z_1} - z_1} = \frac{2n}{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{n}}} = \frac{n}{\mathrm{i} \sin \frac{\pi}{n}}, \quad \text{d'où on tire :}$$

B $$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} .$$

Calcul d'intégrales réelles à l'aide du théorème des résidus

Méromorphie

Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\widehat{\mathbb{C}}$ contenant ∞, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Déf. 1 : f est dite holomorphe sur D si elle est holomorphe sur le domaine $D \setminus \{\infty\}$ au sens usuel et s'il existe $m > 0$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |z| > m \Rightarrow f(z) = f(\infty) + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \ (a_n \in \mathbb{C}).$$

Soit maintenant f holomorphe sur $D \setminus \{\infty\}$, D étant comme précédemment un domaine de $\widehat{\mathbb{C}}$ contenant ∞, mais ∞ étant cette fois-ci un point singulier pour f.

On pourra écrire pour $|z| > m > 0, f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu$,

série de LAURENT autour de ∞, où les coefficients d'indice strictement positif ne sont pas tous nuls. Si l'ensemble des $\nu > 0$ tels que $a_\nu \neq 0$ est infini, ∞ est un point singulier essentiel (*ex.* $f(z) = \mathrm{e}^z$). S'il existe $k > 0$ tel que $a_k \neq 0$ et $a_\nu = 0$ pour tout $\nu > k$, ∞ est dit pôle d'ordre k (*ex.* toute fonction polynôme de degré $p > 0$ admet ∞ comme pôle d'ordre p).

Déf. 2 : Une fonction f holomorphe sur un domaine D de $\widehat{\mathbb{C}}$, sauf en des points isolés de D qui sont des pôles est dite méromorphe sur D. Si E est l'ensemble des pôles, on peut poser pour tout $a \in E$, $f(a) = \infty$: alors f est une application continue de D dans $\widehat{\mathbb{C}}$, la restriction de cette fonction méromorphe au domaine $D \setminus E$ étant holomorphe.

Si a est un pôle d'ordre k à distance finie, on peut écrire, dans un voisinage ouvert connexe épointé de a,

$$f(z) = \sum_{-k}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu \quad \text{avec } a_{-k} \neq 0.$$

Si ∞ est un pôle d'ordre k, $\exists m > 0$ tel que :

$$\forall z, |z| > m, f(z) = \sum_{-\infty}^{k} a_\nu z^\nu \quad \text{avec } a_k \neq 0.$$

Ex. 1 : Toute fonction rationnelle est méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$.

Si $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ où A et B sont des polynômes premiers entre eux, les pôles de f sont les zéros de B et ∞ si degré $A >$ degré B.

Ex. 2 : $z \mapsto \operatorname{cotan} z$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, l'ensemble de ses pôles étant $\pi\mathbb{Z}$ (pôles simples). Cette fonction n'est pas méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$, car ∞ est un point singulier non isolé (∞ adhère à $\pi\mathbb{Z}$).

Déf. 3 : On désigne par *partie principale relative* au pôle a d'une fonction méromorphe la partie de la série de LAURENT en a constituée des puissances négatives au sens large de $(z - a)$ si $a \neq \infty$ et la partie de la série constituée des puissances positives au sens large de z si $a = \infty$.

Résidus

De nombreuses propriétés des fonctions holomorphes sont encore valables pour les fonctions méromorphes. C'est par exemple le cas pour la propriété d'unicité (p. 435). En revanche la propriété intégrale de CAUCHY ne se transmet pas aux fonctions méromorphes. On obtient en effet $\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{k^+} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 1$ où k désigne une courbe de JORDAN rectifiable entourant l'origine.

Déf. 4 : Soit f holomorphe sur un voisinage ouvert connexe épointé de $a \neq \infty$ et k une courbe de JORDAN rectifiable de ce voisinage entourant a, orientée dans le sens positif. On appelle *résidu de f en a* la quantité $(\operatorname{res} f)(a) := \frac{1}{2\,\mathrm{i}\pi} \int_k f(z)\,\mathrm{d}z$.

Si $a \neq \infty$ est un pôle ou un point singulier essentiel, f admet sur un voisinage ouvert connexe épointé de a un développement en série de la forme :

$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu (z-a)^\nu$; on obtient, en intégrant terme à terme sur k, $(\operatorname{res} f)(a) = a_{-1}$.

Si f est holomorphe en $a \neq \infty$, $(\operatorname{res} f)(a) = 0$.

Au point ∞, le développement en série de LAURENT

$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu z^\nu$ implique que $(\operatorname{res} f)(\infty) = -a_{-1}$

(intégration dans le sens indirect).

Le théorème suivant est une généralisation de la propriété de CAUCHY.

Prop. 1 (théorème des résidus) : *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ dont la frontière ∂D est une réunion finie de courbes de* JORDAN *rectifiables. Soit f une fonction holomorphe sur D sauf en un nombre fini de points z_ν qui sont des pôles ou des points singuliers isolés essentiels et dont l'ensemble est désigné par E. Si f est continue sur $(D \setminus E) \cup \partial D$ on a :*

$$\frac{1}{2\,\mathrm{i}\pi} \int_{\partial D^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} (\operatorname{res} f)(z_\nu) \ \text{(ill. A).}$$

Le théorème des résidus permet de calculer des intégrales réelles (*ex.* dans tab. B) : on considère une courbe de JORDAN rectifiable contenant une partie du chemin réel d'intégration à laquelle on applique

$\frac{1}{2\,\mathrm{i}\pi} \int_{\partial D^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} (\operatorname{res} f)(z_\nu)$; on déforme cette courbe de façon à faire apparaître l'intégrale cherchée comme une limite d'une expression liée au second membre de :

$$\frac{1}{2\,\mathrm{i}\pi} \int_{\partial D^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} (\operatorname{res} f)(z_\nu) .$$

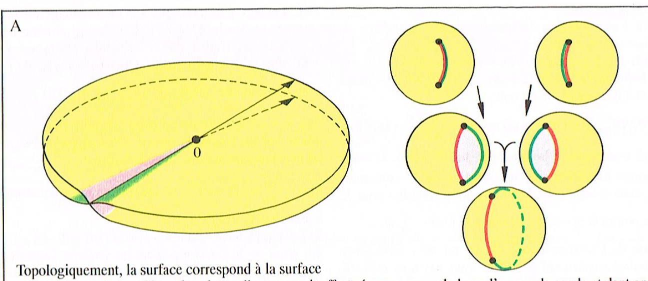
Le théorème des résidus permet en outre de trouver des résultats remarquables sur les valeurs prises par une fonction holomorphe.

Prop. 2 : *Soit f une fonction méromorphe sur un domaine D' dont les zéros et les pôles constituent un ensemble fini. Soit D un domaine dont la frontière ∂D est une réunion finie de courbes de* JORDAN *rectifiables, ne passant par aucun pôle et aucun zéro de f et dont l'adhérence $D \cup \partial D \subset D'$.*

Alors on a $\frac{1}{2\,\mathrm{i}\pi} \int_{\partial D^+} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = n - p$, *où n désigne le nombre de zéros et p le nombre de pôles de f sur D. Les zéros et les pôles doivent être comptés avec leur ordre de multiplicité.*

Pour prouver cette proposition, on applique le théorème des résidus à la fonction $g = \frac{f'}{f}$, dont les pôles sont les pôles et les zéros de f. Au voisinage d'un zéro z_ν d'ordre n_ν, on a $f(z) = (z - z_\nu)^{n_\nu} h(z)$ avec

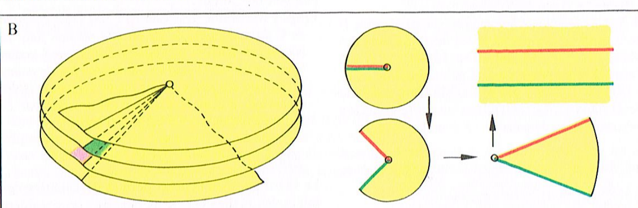
A



Topologiquement, la surface correspond à la surface engendrée par deux sphères dans lesquelles on aurait effectué une coupure le long d'un arc de cercle et dont on aurait identifié les bords 2 à 2, c.-à-d. à une sphère ou un plan achevé (points de branchement 0 et ∞ compris).

Surface de RIEMANN de la fonction racine carrée

B

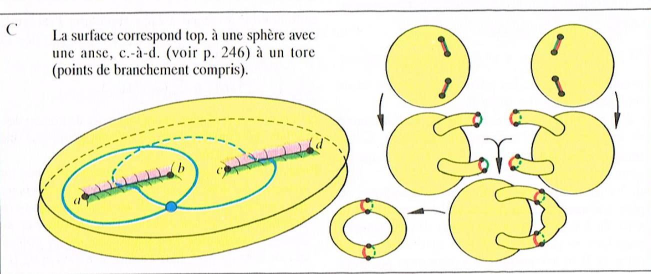


Un plan muni d'une coupure le long d'une demi-droite est topologiquement équivalent à une bande du plan. La surface est donc homéomorphe au plan euclidien (points de branchement 0 et ∞ exclus).

Surface de RIEMANN de la fonction logarithme

C

La surface correspond top. à une sphère avec une anse, c.-à-d. (voir p. 246) à un tore (points de branchement compris).



Surface de RIEMANN de l'exemple 3

Structure topologique des surfaces de RIEMANN des exemples 1 à 3 (suite de la p. 443)

Les surfaces de RIEMANN construites jusqu'ici ont, en dehors des points de branchements, localement une structure identique à celle de la partie du plan complexe qu'elles recouvrent. Localement ces surfaces, diminuées de leurs points de branchement, sont donc partout bidimensionnelles mais leur structure topologique globale est très différente de celle d'un espace de dimension deux. Il existe par ex. sur la surface définie dans l'ex. 3 des courbes simples fermées qui ne séparent pas la surface en deux parties (ill. C).

Par des méthodes comme celles de la p. 246, on voit que les surfaces introduites sont respectivement homéomorphes à une sphère (ou un plan achevé) avec ses deux points de branchement, ou à un plan réel (ou à une sphère privée d'un point), ou à un tore avec ses quatre points de branchement.

h holomorphe et $h(z_\nu) \neq 0$, et de là :

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_\nu}{z - z_\nu} + \frac{h'(z)}{h(z)} \quad \text{i.e. } (\operatorname{res} g)(z_\nu) = n_\nu.$$

De même $(\operatorname{res} g)(z_\mu) = -p_\mu$ pour un pôle z_μ d'ordre p_μ. Si on remplace f par $f - c$ qui a les mêmes pôles que f, on constate que la prop. 2 reste valable pour l'ensemble des antécédents de c par f. Car si la valeur c n'est pas prise sur ∂D, il en est de même pour toute valeur d'un voisinage assez petit de c. Toutes ces valeurs sont donc prises exactement le même nombre de fois quand z parcourt D.

Le passage de $\mathbb{C}$ à $\widehat{\mathbb{C}}$ permet d'éliminer un certain nombre de points exceptionnels d'une fonction, comme les pôles, à condition de passer du concept d'holomorphie à celui de méromorphie. D'autres singularités apparaissant dans le prolongement analytique (p. 436 ill. C) sont parfois supprimées par une extension différente du domaine de définition.

Ex. 1 : L'expression $\sqrt{z}$ n'a pas de sens précis sur $\mathbb{C}^*$ sans convention supplémentaire, car un nombre complexe non nul a deux racines carrées. Si x est un réel ≥ 0, $\sqrt{x}$ est, par définition, la racine carrée positive de x. En écrivant pour $0 \leq x \leq 2$,

$$\sqrt{x} = \sqrt{1 + (x-1)} = 1 + \sum_1^\infty \binom{\frac{1}{2}}{n} (x-1)^n,$$ on peut définir le prolongement analytique complexe :

$$f(z) = 1 + \sum_1^\infty \binom{\frac{1}{2}}{n} (z-1)^n$$ qui est une fonction racine carrée du nombre complexe z sur le disque fermé $|z - 1| \leq 1$ (convergence normale sur ce disque).

Le long du cercle $|z| = 1$ on peut prolonger la restriction de f au disque ouvert $|z - 1| < 1$ qui est holomorphe, par des séries entières de la forme :

$$e^{i\frac{\varphi}{2}} \left[1 + \sum_1^\infty \binom{\frac{1}{2}}{n} (z\, e^{-i\varphi} - 1)^n \right],$$ en faisant varier continûment φ depuis la valeur 0 : pour $\varphi = \pi$ on obtient $$i \left[1 + \sum_1^\infty \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n (z+1)^n \right],$$ et la série opposée pour $\varphi = -\pi$. On voit bien apparaître le fait qu'il y a deux racines possibles.

Une telle ambiguïté n'est pas compatible avec la notion habituelle de fonction.

On peut résoudre ce problème si, selon le procédé de RIEMANN, on prend comme domaine de définition non plus un domaine de $\mathbb{C}$ ou $\widehat{\mathbb{C}}$ mais une « surface » qui recouvre le plan ou la sphère de RIEMANN.

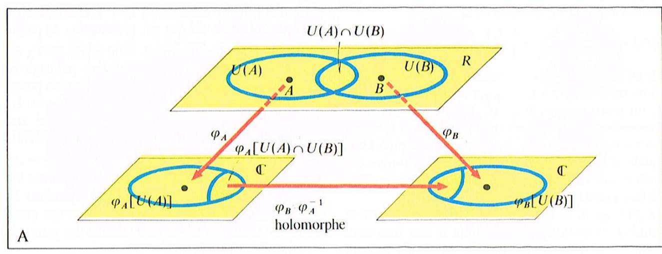
Dans l'exemple de la racine carrée où l'on revient à la même fonction après deux tours autour de 0, on place deux plans appelés *feuillets* sur le plan complexe. Il faut alors imaginer que l'on a effectué une coupure de ces deux plans suivant l'axe des réels négatifs et que l'on a identifié les bords ainsi définis en croix (ill. A) si bien que lorsqu'on traverse l'axe réel négatif on passe du plan supérieur au plan inférieur et vice-versa. On aurait bien sûr pu effectuer la coupure le long de toute demi-droite allant de 0 à ∞. L'identification n'est possible dans $\mathbb{R}^3$ que par introduction de points multiples (*cf.* pp. 246 *sqq.*). Tout point de $\widehat{\mathbb{C}}$, en dehors de 0 et ∞, est recouvert par deux points de la nouvelle « surface » : les points 0 et ∞, appelés points de *branchement*, sont recouverts par un seul point. La « surface » que l'on vient de construire est une *surface de RIEMANN*. On peut maintenant définir $z \mapsto \sqrt{z}$ sur cette « surface » : $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{\infty} = \infty$, et pour deux points situés l'un au-dessus de l'autre les valeurs sont prises opposées en respectant la continuité sur chaque feuillet. La fonction ainsi définie est partout continue et, en dehors des points de branchement, holomorphe.

Pour définir la fonction $(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$, il faut considérer une surface à deux feuillets comme la précédente mais dont les points de branchements sont a et b.

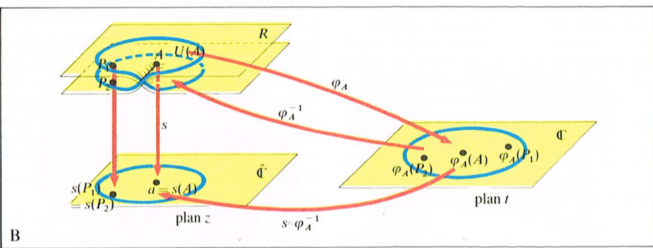
Si on s'intéresse à des racines d'ordre supérieur, il convient d'introduire une surface de RIEMANN possédant un nombre de feuillets en rapport avec cet ordre dont les bords sont identifiés de manière convenable. Des points de branchement d'ordre supérieur à deux apparaissent (par *ex.* pour définir $z \mapsto \sqrt[n]{z}$, il faut n feuillets se raccordant le long de l'axe des réels négatifs, 1 à 2, 2 à 3, …, $n-1$ à n, n à 1).

Ex. 2 : On peut concevoir également des comportements encore plus compliqués. C'est par exemple le cas pour la fonction définie par $f(z) = \int_{k^+} \frac{1}{\zeta} d\zeta$, où k est un chemin rectifiable qui va de 1 à z sans passer par 0. Dans le cas de la fonction racine carrée, un tour autour de l'origine induisait un passage à la valeur opposée. Il induit ici une addition de $\pm 2i\pi$ (*cf.* p. 441). On ne peut donc jamais revenir à la valeur initiale en tournant autour de 0 dans le même sens. La surface de RIEMANN qu'il convient d'introduire dans cet exemple a une infinité dénombrable de feuillets dont les bords sont identifiés successivement (ill. B). Les points 0 et ∞ sont des *points de branchement logarithmiques*. La fonction est holomorphe sur toute la surface si on exclut 0 et ∞.

Ex. 3 : Avant d'étudier des propriétés topologiques concernant les surfaces de RIEMANN, on considère un dernier exemple. Soit f la fonction que l'on veut définir par $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$, où a, b, c, d sont deux à deux distincts. En dehors des points a, b, c, d où la fonction vaudra 0 et du point à l'infini où elle vaudra ∞, il existera deux valeurs pour f. On introduit donc à nouveau une surface à deux feuillets, qui possède quatre points de branchements. Si on coupe les deux feuillets le long des segments $[a, b]$ et $[c, d]$ supposés, ce qui est loisible, sans points communs, et qu'on identifie en croix les bords ainsi créés, on obtient une surface de RIEMANN qui recouvre $\widehat{\mathbb{C}}$ (ill. C) sur laquelle f est holomorphe en dehors des points de branchement. Aux points de branchement la fonction est continue.



Compatibilité holomorphe des cartes d'un atlas



Application trace, fonction de représentation locale

Tous les points autour desquels une fonction peut être développée en une série de LAURENT selon un paramètre d'uniformisation convenable, ne contenant qu'un nombre fini de termes affectés d'une puissance négative, seront intégrés dans le domaine de définition de la surface de RIEMANN correspondante (points d'holomorphie, pôles, ramifications algébriques). Les points suivants peuvent apparaître comme points frontières de la surface de RIEMANN :

Exemples

	Fonction	Point
a) singularités non isolées	$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu!}$	$\{z \mid \lvert z \rvert = 1\}$ (p. 438, tab. A)
b) singularités simples isolées	$f_2(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$	0
c) singularités isolées sur k feuillets	$f_3(z) = e^{\sqrt[k]{z}}$	∞
d) singularités logarithmiques isolées	$f_4(z) = z^{\sqrt{2}} = (e^{\sqrt{2}})^{\ln z}$	0
	$f_5(z) = e^{\frac{1}{z}} \ln z$	0

Pour d) : une singularité logarithmique isolée a est dite régulière pour f si $\exists\, r \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{z \to a} \lvert (z-a)^r f(z) \rvert = 0$. Sinon c'est une singularité non régulière.

Le point 0 est une singularité régulière pour f_4 et une singularité non régulière pour f_5.

C

Singularités des fonctions analytiques

Surfaces de RIEMANN abstraites

On peut, plus généralement, définir une fonction méromorphe sur un domaine porté par des feuillets plutôt que par $\widehat{\mathbb{C}}$. Ce procédé permet de supprimer certaines ambiguïtés lors des prolongements analytiques. Pour ce faire, les « surfaces » que l'on doit définir sont évidemment des variétés de dimension deux, conformément à la déf. 1 p. 421. Pour tout point A d'une telle « surface », il existe un homéomorphisme qui transforme un certain voisinage $U(A)$ de A en un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$: $\varphi_A : U(A) \to \mathbb{C}$. Mais il faut adapter la notion de compatibilité de deux cartes $(U(A), \varphi_A)$ et $(U(B), \varphi_B)$ vue dans le cas des variétés différentiables réelles (p. 421).

Déf. 1 : On appelle *surface de* RIEMANN une variété connexe de dimension 2 pour laquelle on a la propriété : si $U(A)$ et $U(B)$ sont des voisinages de A et B du type précédent et d'intersection non vide, alors la fonction $\varphi_B \circ \varphi_A^{-1}$ définie sur $\varphi_A(U(A) \cap U(B))$, image de l'intersection, est holomorphe. L'atlas correspondant est appelé *structure complexe* de la surface de RIEMANN.

Le passage d'un système de coordonnées locales à l'autre se fait donc par l'intermédiaire d'une fonction holomorphe (ill. A).

Rem. : Les surfaces de RIEMANN sont toujours orientables (*cf.* p. 247).

Déf. 2 : Une fonction f définie sur une surface de RIEMANN R, $f : R \to \widehat{\mathbb{C}}$ est dite holomorphe (resp. méromorphe) au voisinage de A si $f \circ \varphi_A^{-1}$ l'est au voisinage de $\varphi_A(A)$.

Surfaces de RIEMANN concrètes

Les surfaces de RIEMANN introduites dans la déf. 1 sont des surfaces de RIEMANN abstraites, par opposition à celles introduites à la p. 443 définies comme des recouvrements de domaines de $\widehat{\mathbb{C}}$, appelées surfaces de RIEMANN concrètes. On peut montrer que toute surface de RIEMANN est l'ensemble de définition d'une fonction g qui lui donne un caractère concret.

Pour les surfaces concrètes, tout point $A \in R$ peut être mis en liaison avec un point $s(A)$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ appelé *trace* par *l'application trace* $s : R \to \widehat{\mathbb{C}}$. Les applications $s \circ \varphi_A^{-1}$ sont dites *fonctions de représentation locales*. Elles sont méromorphes (ou holomorphes à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}}$). Sur un domaine contenant $a = \varphi(A) \in \widehat{\mathbb{C}}$ on peut donc les développer, moyennant un changement d'origine convenable, soit sous la forme $b + \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu t^\nu$, avec $k > 0$, $a_k \neq 0$ si $b \in \mathbb{C}$, soit sous la forme $\sum_{\nu=-k}^{\infty} a_\nu t^\nu$, avec $k > 0$, $a_{-k} \neq 0$, si $a = \infty$.

La valeur de k est indépendante des paramétrages locaux adoptés (invariance sous un homéomorphisme holomorphe pour une surface de RIEMANN concrète donnée). Elle a donc une signification intrinsèque pour tout point d'une telle surface. Pour une surface de RIEMANN abstraite, k ne peut apparaître qu'après le choix de g et dépend de g.

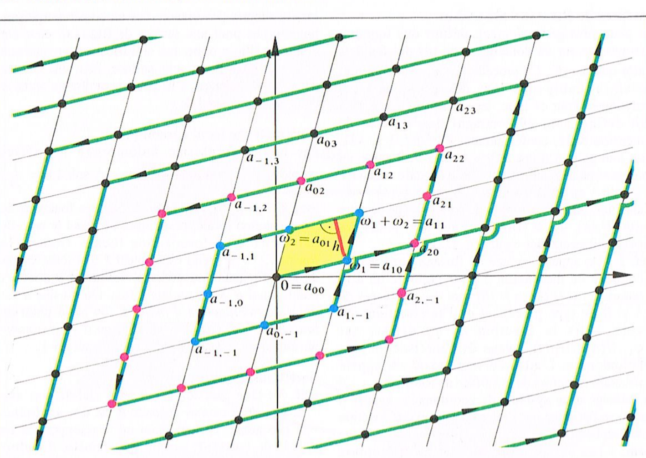
Paramétrage local canonique

Par homéomorphisme holomorphe les séries précédentes se ramènent soit à $w = t^k$, soit à $w = \frac{1}{t^k}$, avec $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On obtient ainsi des fonctions de représentation locale, canoniques : t prend le nom de paramètre d'uniformisation locale. Comme la fonction $t \mapsto w$ prend exactement k fois toute valeur de $\mathbb{C}^*$, il existera un domaine entourant a dont les points, sauf a, sont atteints k fois. On dit que a est *point de ramification d'indice* k (ou aussi point de *branchement d'ordre* $k-1$). Pour qu'il y ait isomorphisme local, il faut et il suffit que l'on ait $k = 1$.

Fonctions analytiques

Déf. 3 : Une fonction $f : R \to \mathbb{C}$ définie sur une surface de RIEMANN concrète R est dite *analytique* si elle admet en tout point un développement en série de LAURENT, suivant le paramètre d'uniformisation locale, ne comportant qu'un nombre fini de termes ayant des puissances négatives.

Les points de branchement d'ordre fini non nul sont des singularités des $\widehat{\mathbb{C}}$-$\widehat{\mathbb{C}}$-fonctions. La plupart du temps, ils perdent cette propriété lorsque les fonctions sont définies sur des surfaces de RIEMANN, i.e. des R-$\widehat{\mathbb{C}}$-fonctions. Les séries de LAURENT vérifiant la propriété décrite dans déf. 3 sont des *éléments de fonction analytique*. Ce concept comprend celui d'élément de fonction holomorphe de la p. 437. Si on dispose d'un élément de fonction analytique d'une $\widehat{\mathbb{C}}$-$\widehat{\mathbb{C}}$-fonction méromorphe, on peut par prolongement analytique obtenir de nouveaux éléments de fonction analytique. L'ensemble de tous les éléments de fonction analytique dont on dispose finalement s'appelle la *représentation analytique de la fonction* considérée ainsi prolongée. On montre que la représentation analytique forme une surface de RIEMANN au sens de la déf. 2, surface de RIEMANN concrète sur laquelle les éléments de fonction définissent une fonction. On peut inversement trouver pour toute surface de RIEMANN concrète R une fonction qui soit méromorphe sur tout R, qui a, en des points différents mais de même trace, des éléments de fonction différents et ne soit pas prolongeable analytiquement en dehors de R. La surface de RIEMANN et la fonction sont, dans ce cas, dites *correspondantes*. Le tab. C montre différents types de singularités essentielles de fonctions analytiques.



Soit ω_1 et ω_2 deux nombres de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dont le quotient n'est pas réel. (Les vecteurs représentatifs ω_1 et ω_2 dans $\mathbb{R}^2$ ne sont pas colinéaires.) L'ensemble des points $\nu\omega_1$ et $\mu\omega_2$, $(\nu, \mu) \in \mathbb{Z}^2$, définit un maillage régulier de $\mathbb{R}^2$. Le parallélogramme ayant pour sommets 0, ω_1, ω_2 et $\omega_1 + \omega_2$ est appelé parallélogramme élémentaire.

On veut maintenant construire une fonction ayant en tout point du maillage un zéro d'ordre 1. On pose

$a_{\nu\mu} = \nu\omega_1 + \mu\omega_2, \ \nu, \mu \in \mathbb{Z}$.

On parcourt tous les points du maillage en suivant le chemin tracé sur la figure. Le point 0 étant l'origine du chemin, on rencontre successivement :

8 sommets d'un parallélogramme du 1er ordre
8.2 sommets d'un parallélogramme du 2e ordre et de manière générale
8.n sommets d'un parallélogramme du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Pour les parallélogrammes du $n^{\text{ième}}$ ordre, on a : $|a_{\nu\mu}| \geqslant nh$, où h désigne la plus petite hauteur du parallélogramme fondamental.
De là, on tire :

$$\sum^{(n)} \left|\frac{z}{a_{\nu\mu}}\right|^3 \leq 8n \frac{|z|^3}{(nh)^3} = \frac{8|z|^3}{h^3} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C},$$

où la sommation porte sur tous les points du maillage du parallélogramme du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Comme $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum^{*} \left(\frac{z}{a_{\nu\mu}}\right)^3$ est absolument convergente sur $\mathbb{C}$. La sommation est ici effectuée pour tous les couples $(\nu, \mu) \in \mathbb{Z}^2$, excepté le couple (0, 0). L'étoile désigne ce type de sommation.
Dans la prop. du produit de WEIERSTRASS, on peut donc prendre $m_\nu = 2$.
La fonction définie par

$$\sigma(z) : z \prod_{(\nu,\mu)}^{*} \left(1 - \frac{z}{a_{\nu\mu}}\right) e^{\frac{z}{a_{\nu\mu}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_{\nu\mu}}\right)^2}$$

s'appelle fonction σ. Ses zéros sont les points du maillage et ∞ est une singularité essentielle. Comme on a absolue convergence, l'ordre des facteurs ne joue aucun rôle.

Construction de la fonction σ de WEIERSTRASS

Fonctions entières
Les fonctions polynomiales de degré n sont holomorphes sur tout $\mathbb{C}$ et possèdent en ∞ un pôle d'ordre n. On pose :

Déf. 1 : Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ est dite *fonction entière*. Une fonction entière qui n'est pas polynomiale est dite *fonction entière transcendante* (ex. $z \mapsto \exp z$).

Les fonctions entières sont développables en série de TAYLOR en tout point de $\mathbb{C}$, le rayon de convergence de la série étant ∞. Les coefficients a_ν de la série vérifient $\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0$. Si un nombre fini de a_ν est différent de 0, la fonction est polynomiale, sinon elle est entière transcendante. Dans le second cas ∞ est une singularité essentielle. La propriété suivante est très importante :

Prop. 1 (LIOUVILLE) : *Toute fonction entière et bornée est constante.*

Pour prouver cette proposition, on calcule les coefficients du développement en série de TAYLOR de la fonction autour de 0, à l'aide de la formule intégrale de CAUCHY

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_k \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} \mathrm{d}\zeta$$

Si on suppose que pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, $|f(\zeta)| < M$ et que k est un cercle de centre 0 de rayon ρ, on a alors la relation $|a_\nu| < \frac{M}{\rho^\nu}$. Comme ρ est quelconque, on en déduit que $a_\nu = 0$ si $\nu \neq 0$, d'où la prop. Ce résultat permet de justifier la propriété algébrique fondamentale de $\mathbb{C}$ (p. 67).

Prop. 2 : *Toute fonction polynomiale de degré $n > 0$ sur $\mathbb{C}$ a au moins un zéro.*

Soit en effet une fonction f polynomiale sans zéro. Dans ce cas $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. C'est donc une fonction entière. Un raisonnement simple montre que $\frac{1}{f}$ est bornée et donc constante d'après la prop. 1. Par suite f est constante et donc $n = 0$. Les fonctions entières transcendantes n'ont pas forcément de zéro comme le prouve l'exemple de la fonction exponentielle. Si g est une fonction entière, il en va de même pour la fonction déf. par $e^{g(z)}$. De plus cette dernière fonction n'a pas de zéro. On peut montrer que :

Prop. 3 : *Pour toute fonction entière f sans zéro, il existe une fonction entière g telle que $f(z) = e^{g(z)}$ pour tout z de $\mathbb{C}$.*

Si on s'intéresse maintenant à une fonction entière non nulle f pouvant prendre la valeur 0, on doit d'abord remarquer que les zéros éventuels de f situés dans un disque fermé sont en nombre fini, sinon f serait nulle en vertu de la propriété d'unicité (p. 435). On en déduit que l'ensemble des zéros de f est au plus dénombrable.
On peut alors se demander si on peut trouver une fonction entière possédant des zéros a_ν d'ordre k_ν donnés où ν décrit tout ou partie de $\mathbb{N}$.
Si l'ensemble des zéros est fini, la fonction déf. par $f(z) = \prod_{\nu=1}^{n} (z - a_\nu)^{k_\nu}$ est une solution du problème.

Pour toute autre solution F, on a

$F(z) = e^{g(z)} \prod_{\nu=1}^{n} (z - a_\nu)^{k_\nu}$, où g est une fonction entière.

Si l'ensemble des zéros est infini dénombrable, le produit correspondant ne converge pas toujours (*cf.* p. 281). Cependant, en introduisant des facteurs convenables, on peut rétablir la convergence :

Prop. 4 (prop. du produit de WEIERSTRASS) : *Soit (a_ν), $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ une suite de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'ayant pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{C}$ et (k_ν), $k_\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, une suite d'entiers. Il existe une suite d'entiers (m_ν), $m_\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, telle que le produit :*

$$f(z) := \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\mu}\right]^{k_\nu}$$

converge uniformément sur tout domaine borné de $\mathbb{C}$. La fonction définie par $f(z)$ possède au point a_ν un zéro d'ordre k_ν et n'a pas d'autres zéros que les a_ν. Si 0 est un zéro d'ordre k_0, il convient d'introduire en plus dans le produit le facteur z^{k_0}. f est une fonction entière.
Toute autre fonction entière ayant les mêmes prop. concernant ses zéros se distingue de cette fonction particulière simplement par un facteur $e^{g(z)}$, où g est une fonction entière.

Les nombres m_ν sont choisis de telle façon que $\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{m_\nu+1}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.
C'est toujours réalisé si l'on prend $m_\nu = k_\nu + \nu$, mais on peut parfois obtenir cette convergence pour des valeurs plus petites de m_ν.
Ex. :

a) Représentation par un produit de la fonction sinus
La fonction sinus possède un zéro du premier ordre en tout multiple entier de π. Il suffit ici de prendre $m_\nu = 1$ pour tout ν. On obtient alors :

$$\sin z = z\, e^{g(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\nu\pi}\right) e^{\frac{z}{\nu}} \prod_{\nu=-1}^{-\infty} \left(1 - \frac{z}{\nu\pi}\right) e^{\frac{z}{\nu}}$$

$$= z\, e^{g(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2\pi^2}\right)$$

D'autres propriétés de la fonction sinus permettent de montrer que $g = 0$, d'où l'égalité :

$$\sin z = z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2\pi^2}\right).$$

b) Représentation par un produit de la fonction gamma
Les fonctions entières qui possèdent en tout point entier négatif ou nul un zéro du premier ordre, sont de la forme $f(z) = z\, e^{g(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}}$.
Si on prend $g(z) = Cz$ (C désigne la constante d'EULER), la fonction $f(z)$ représente pour tout z réel l'inverse du développement en produit infini de la fonction gamma (p. 311). $\frac{1}{\Gamma}$ est donc prolongeable de manière holomorphe sur $\mathbb{C}$; Γ est de ce fait méromorphe sur $\mathbb{C}$, sans zéro et ses pôles sont les points de $\mathbb{Z}^-$. Tous ses pôles sont du premier ordre. Une autre fonction entière importante est décrite dans l'ill. ci-contre.

Pour les extensions holomorphes des fonctions du tableau C, p. 304, on a les décompositions en éléments simples suivantes :

$$f_1(z) = \frac{z+15}{(z+3)(z-1)} = -\frac{3}{z+3} + \frac{4}{z-1}$$ Pôles d'ordre 1 en -3 et 1

$$f_2(z) = \frac{2z+1}{(z-1)^2} = \frac{2}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2}$$ Pôle d'ordre 2 en 1

$$f_3(z) = \frac{(z-1)^2(z+1)(z-6)}{3z(z-2)^2} = \frac{1}{3}z - 1 - \frac{1}{2z} - \frac{19}{6(z-2)} - \frac{2}{(z-2)^2}$$ Pôle d'ordre 1 en 0 et ∞, Pôle d'ordre 2 en 2

$$f_4(z) = \frac{15z-26}{(z-4)(z^2+1)} = \frac{2}{z-4} + \frac{-1-3{,}5i}{z-i} + \frac{-1+3{,}5i}{z+i}$$ Pôles d'ordre 1 en 4, i et $-$i

A

Décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle

De :
$$\frac{1}{(z-a_{\nu\mu})^2} = \left(\frac{1}{a_{\nu\mu}} + \frac{z}{a_{\nu\mu}^2} + \frac{z^2}{a_{\nu\mu}^3} + \dots\right)^2 = \frac{1}{a_{\nu\mu}^2} + \frac{2}{a_{\nu\mu}^3}z + \frac{3}{a_{\nu\mu}^4}z^2 + \dots, \quad |z| < |a_{\nu\mu}|$$

on tire : $\displaystyle \frac{1}{(z-a_{\nu\mu})^2} - \frac{1}{a_{\nu\mu}^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{a_{\nu\mu}^{n+2}} z^n$,

c'est-à-dire $\displaystyle \wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{(\nu,\mu)}^{*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{a_{\nu\mu}^{n+2}} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)s_{n+2}z^n$

où $\displaystyle s_n := \sum_{(\nu,\mu)}^{*} \frac{1}{a_{\nu\mu}^n}, \quad n \geq 3.$

Comme pour tout indice impair $s_n = 0$, on a donc

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3s_4z^2 + 5s_6z^4 + 7s_8z^6 + \dots,$$
$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6s_4z + 20s_6z^3 + 42s_8z^5 + \dots,$$
$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - 24s_4 \cdot \frac{1}{z^2} - 80s_6 + \dots$$
$$4(\wp(z))^3 = \frac{4}{z^6} + 36s_4 \cdot \frac{1}{z^2} + 60s_6 + \dots$$
$$(\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 + 60s_4\wp(z) = -140s_6 + \dots$$

On pose

$g_2 := 60s_4, \quad g_3 := 140s_6.$

La fonction entière $\wp'^2 - 4\wp^3 + g_2\wp$ est, comme chacun de ses termes, doublement périodique (p. 451), donc constante. On a donc :

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Rem. 1 : La fonction $\wp$ est solution de l'équation différentielle $w'^2 = 4w^3 - g_2w - g_3$.

Rem. 2 : En posant $w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$, on définit une fonction algébrique qui peut être paramétrée par : $w = \wp'(t)$, $z = \wp(t)$. Il s'agit d'un cas particulier d'une propriété plus générale.
On peut montrer que pour toute fonction analytique f définie sur une surface de RIEMANN R il existe deux fonctions méromorphes φ_1 et φ_2 définies sur un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$ telles que :
$\{(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) | t \in D\} = \{(s(P), f(P)) | P \in R\}$.

Rem. 3 : Le début du développement en série de LAURENT de la fonction $\wp$ autour de 0 est :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \frac{g_2^2}{1200}z^6 + \frac{3g_2g_3}{6160}z^8 + \dots$$

B

Autres propriétés de la fonction $\wp$

Décomposition partielle en éléments simples

Le comportement d'une fonction rationnelle en ses pôles devient clair si on effectue une décomposition partielle de la fonction en éléments simples. Les facteurs quadratiques $q_0(x)$ qui pouvaient apparaître en dénominateur dans le cas de décomposition en éléments simples réels de fonctions réelles (p. 305) disparaissent dans le cas complexe. La décomposition partielle relative aux pôles est exactement la somme des parties principales des séries de LAURENT autour de tous les pôles isolés de la fonction (ill. A). L'éventuelle partie polynomiale correspond à la partie principale de la série de LAURENT en ∞.

Un pôle d'une fonction rationnelle peut être décrit par la donnée de la partie principale de la fonction en ce pôle. La méthode de décomposition n'est pas extensible à toute fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$. En effet, la série des parties principales des séries de LAURENT relatives aux pôles peut ne pas converger si on a un nombre infini de pôles. La prop. suivante prouve qu'en ajoutant des termes convenables on peut rétablir la convergence :

Prop. de décomposition de MITTAG-LEFFLER :

Soit (a_ν) une suite où $a_\nu \in \mathbb{C}$, n'ayant pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{C}$ et $(h_\nu(z))$ une suite de fonctions rationnelles de la forme :

$$h_\nu(z) = \sum_{\mu=1}^{k_\nu} \frac{c_{\nu\mu}}{(z-a_\nu)^\mu}.$$

Il existe une suite (g_ν) de fonctions polynomiales telle que la série $f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} (h_\nu(z) - g_\nu(z))$ converge uniformément sur tout fermé borné $K \subset \mathbb{C}$, pourvu qu'on exclue les termes portant sur les $a_\nu \in K$. La fonction déf. par $f(z)$ est méromorphe. Elle possède en tout point a_ν un pôle dont la partie principale est $h_\nu(z)$, et n'a pas d'autre pôle sur $\mathbb{C}$. Toute autre fonction ayant cette propriété se déduit de f par l'addition d'une fonction entière.

Ex :

a) Décomposition en éléments simples de la fonction cotangente

La fonction cotangente possède un pôle d'ordre 1 en tout multiple entier de π. Le résidu y prend la valeur 1. Les termes à ajouter pour que l'on ait convergence peuvent être de degré 0.

$$\cot z = g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\pi\nu} + \frac{1}{\pi\nu}\right) + \sum_{\nu=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{z-\pi\nu} + \frac{1}{\pi\nu}\right)$$
$$= g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\pi\nu} + \frac{1}{z+\pi\nu}\right)$$
$$= g(z) + \frac{1}{z} + 2z \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \pi^2\nu^2}.$$

Des recherches plus poussées montrent que $g = 0$, si bien que $\displaystyle \cot z = \frac{1}{z} + 2z \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z^2-\pi^2\nu^2}$.

b) Décomposition en éléments simples de la fonction Γ

Les pôles de la fonction Γ sont les entiers négatifs au sens large $-\nu$ (p. 447). Les résidus valent $\lim_{z \to -\nu} (z+\nu)\Gamma(z)$.

En utilisant plusieurs fois la relation $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$, on obtient $(\text{res}\,\Gamma)(-\nu) = \dfrac{(-1)^\nu}{\nu!}$. La partie principale du développement autour de $-\nu$ vaut donc

$h_\nu(z) = \dfrac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \dfrac{1}{z+\nu}$. Il est ici inutile d'ajouter des termes pour obtenir la convergence. On obtient donc $\Gamma(z) = g(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \dfrac{1}{z+\nu}$ où g est une fonction entière qui ne s'exprime pas à l'aide des fonctions élémentaires.

c) La fonction $\wp$

On veut maintenant construire une fonction qui possède en tout zéro de la fonction σ (p. 446) un pôle du deuxième ordre. Pour $a_{\nu\mu} = \nu\omega_1 + \mu\omega_2$, $\nu, \mu \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ non réel, la partie principale correspondante est

$$h_{\nu\mu}(z) = \frac{1}{(z-a_{\nu\mu})^2}.$$

Les termes correctifs correspondants pour obtenir la convergence peuvent être pris sous la forme

$g_{\nu\mu}(z) = \dfrac{1}{a_{\nu\mu}^{\;2}}$ avec $(\nu, \mu) \neq (0, 0)$. La fonction définie par $f(z) = \dfrac{1}{z^2} + \sum_{(\nu,\mu)}^{*}\left(\dfrac{1}{(z-a_{\nu\mu})^2} - \dfrac{1}{a_{\nu\mu}^{\;2}}\right)$, où ν et μ parcourent de manières indépendantes tous les entiers relatifs mais ne peuvent être simultanément nuls — c'est pourquoi on fait apparaître une étoile à côté du signe de sommation — satisfait les exigences que l'on s'est données et s'appelle la fonction $\wp$ (prononcer : fonction pé). Sa construction, comme celle de la fonction σ revient à WEIERSTRASS. Si on veut spécifier le choix de ω_1 et ω_2, on écrit $\wp_{\omega_1, \omega_2}$. La fonction $\wp$ est étroitement liée à la fonction σ. On a en effet $(\ln \sigma)'(z) = \dfrac{1}{z} + \sum_{(\nu,\mu)}^{*}\left(\dfrac{1}{z-a_{\nu\mu}} + \dfrac{1}{a_{\nu\mu}} + \dfrac{z}{a_{\nu\mu}^{\;2}}\right)$,

$$(\ln \sigma)''(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{(\nu,\mu)}^{*}\left(\frac{1}{(z-a_{\nu\mu})^2} - \frac{1}{a_{\nu\mu}^{\;2}}\right) = -\wp(z)$$

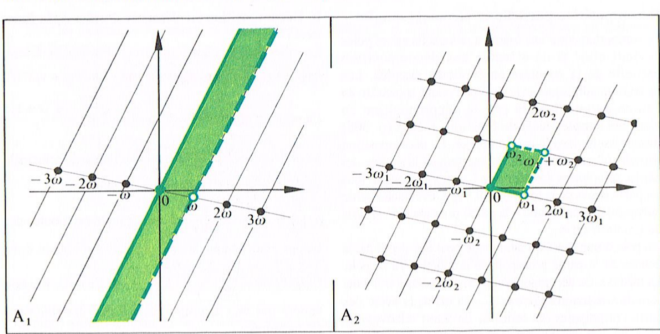
La dérivée de $\wp$ vaut $\wp'(z) = -2 \sum_{(\nu,\mu) \in \mathbb{Z}^2} \dfrac{1}{(z-a_{\nu\mu})^3}$.

Cette série montre que $\wp'(z+\omega_1) = \wp'(z+\omega_2) = \wp'(z)$ c.-à-d. que la fonction $\wp'$ est périodique de périodes ω_1 et ω_2. Par intégration, on trouve $\wp(z+\omega_1) = \wp(z) + c$. En prenant :

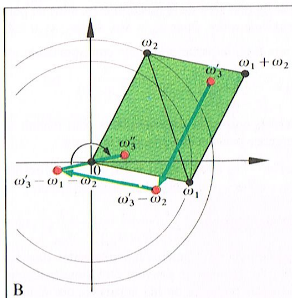
$z = -\dfrac{\omega_1}{2}$, on trouve $\wp\left(\dfrac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(-\dfrac{\omega_1}{2}\right) + c$.

Mais comme $\wp(z) = \wp(-z)$ on a $c = 0$. ω_1 et ω_2 sont donc aussi des périodes de la fonction $\wp$.

Le tab. B donne d'autres propriétés de la fonction $\wp$.



Bandes de périodes, parallélogrammes de périodes



Soit ω_1 une période de module minimal et ω_2 une période prise parmi celles qui ne sont pas de la forme $\nu\omega_1$, $\nu \in \mathbb{Z}$, de module minimal également. Toutes les périodes sont alors de la forme $\nu\omega_1 + \mu\omega_2$, $(\nu, \mu) \in \mathbb{Z}^2$.
En effet toute période peut s'écrire
$\omega_3 = (\nu_0 + \theta_1)\,\omega_1 + (\mu_0 + \theta_2)\,\omega_2$ où $(\nu_0, \mu_0) \in \mathbb{Z}^2$, $0 \leqslant \theta_1 < 1$, $0 \leqslant \theta_2 < 1$ et $(\theta_1, \theta_2) \neq (0, 0)$. Alors
$\omega'_3 = \theta_1\,\omega_1 + \theta_2\,\omega_2$ est aussi une période. Ce nombre est situé dans le parallélogramme dont les sommets sont 0, ω_1, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$. Si ω'_3 n'est pas dans le triangle 0, ω_1, ω_2, $\omega''_3 = -(\omega'_3 - \omega_1 - \omega_2)$ a cette propriété.
Sa norme est plus petite que $|\omega_2|$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Fonctions doublement périodiques

Les développements en série de FOURIER sont des développements de la forme :

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{\frac{2\pi i}{\omega}\nu z}$$

Exemples :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{i}{2}e^{-iz} - \frac{i}{2}e^{iz}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (\omega = 2\pi i),$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = i + 2i\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu e^{2i\nu z}, \quad \operatorname{Im} z > 0 \quad (\omega = \pi).$$

Par les fonctions réelles périodiques, on préfère développer en sinus et cosinus, à cause de la périodicité réelle de ces fonctions.
On utilise la relation :

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega}\nu z} = \cos\frac{2\pi\nu}{\omega}z + i\sin\frac{2\pi\nu}{\omega}z$$

On obtient ainsi des séries de la forme :

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(b_\nu\cos\frac{2\pi\nu}{\omega}x + c_\nu\sin\frac{2\pi\nu}{\omega}x\right).$$

C

Développements en série de FOURIER réelle ou complexe

Périodes des fonctions complexes

Déf. 1 : Une fonction complexe $f : D_f \to \widehat{\mathbb{C}}$ est dite *périodique* s'il existe un nombre $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $z \in D_f$ on ait $z \pm \omega \in D_f$ et $f(z + \omega) = f(z)$. ω s'appelle *période* de f.

Si P est l'ensemble des périodes de f, alors $(P \cup \{0\}, +)$ est un groupe. C'est le *groupe des périodes* de f (on convient de dire que le groupe des périodes d'une fonction non périodique est réduit à $\{0\}$). Si ω est une période de f, $\mathbb{Z}\omega$ est un sous-groupe du groupe des périodes.

Dans la suite, f sera toujours supposée méromorphe sur $\mathbb{C}$. Si le groupe des périodes de f admet un point d'accumulation, ce ne peut être évidemment un pôle, et f est constante en vertu de la propriété d'identité. Pour une fonction méromorphe périodique non constante il existe donc une période ω_1 telle que $|\omega_1| = \inf\{|\omega|, \omega \in P\}$. Si $\mathbb{Z}\omega_1$ est le groupe des périodes de f, f est dite *simplement périodique* et ω_1 (ou $-\omega_1$) est dite période *primitive* de f. Si $P' = P \setminus \mathbb{Z}^*\omega_1$ n'est pas vide, il existe une période ω_2 telle que $|\omega_2| = \inf\{|\omega|, \omega \in P'\}$. On voit facilement que $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ n'est pas réel ; par suite $\{\omega_1, \omega_2\}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Le raisonnement du tab. B montre que les périodes de f peuvent alors s'écrire sous la forme $\nu\omega_1 + \mu\omega_2$, $\nu, \mu \in \mathbb{Z}$, $(\nu, \mu) \neq (0, 0)$. f est dans ce cas dite *doublement périodique*.

Un couple (ω_1, ω_2) s'appelle un *couple de périodes primitives* si toutes les périodes peuvent s'écrire sous la forme $\nu\omega_1 + \mu\omega_2$. Le procédé décrit ci-dessus pour trouver un couple de périodes primitives n'est pas univoque.

Fonctions simplement périodiques

Soit f une fonction méromorphe simplement périodique et ω une période primitive. On considère une droite passant par 0 et ne passant pas par ω, et on construit toutes les parallèles à cette droite passant par les $\nu\omega$, $\nu \in \mathbb{Z}^*$. Le plan complexe est ainsi découpé en bandes dites *bandes de période* (ill. A) qui peuvent être identifiées les unes aux autres à l'aide des translations dont la représentation est $z' = z + \nu\omega$, $\nu \in \mathbb{Z}$ (on incorpore seulement une des deux droites frontières dans une bande) ; la fonction est alors entièrement connue par sa restriction à une bande.

La fonction simplement périodique la plus remarquable est la fonction exponentielle dont la période vaut $2i\pi$ (*cf.* p. 437). On peut à partir de cette fonction obtenir la fonction de période ω :

$g(z) = e^{\frac{2i\pi}{\omega}z}$ à laquelle se ramènent toutes les fonctions simplement périodiques de période ω. Soit en effet g^{-1} la fonction inverse de g définie sur une surface de RIEMANN ayant un nombre infini de feuillets. Les valeurs de cette fonction en des points ayant la même trace $t = e^{\frac{2i\pi}{\omega}z}$ diffèrent d'un multiple de ω, si bien que la fonction $f \circ g^{-1}$ est une fonction sur $\mathbb{C}^*$ dont la valeur en t est $f \circ g^{-1}(t) = f\left(\frac{\omega}{2i\pi} \cdot \ln t\right)$.

Si $z \mapsto f(z)$ est holomorphe sur une bande ouverte de $\mathbb{C}$ limitée par deux droites de direction ω, il en va de même de $t \mapsto f \circ g^{-1}(t)$ sur une couronne ouverte de $\mathbb{C}$ centrée en 0.

De $t = e^{\frac{2i\pi}{\omega}z}$ et $f \circ g^{-1}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu t^\nu$ on tire

$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{\frac{2i\pi}{\omega}\nu z}$ (*développement en série de* FOURIER ; ex. dans tab. C).

Rem. : Si f est une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, continûment différentiable, elle peut être développée en série de FOURIER sous la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(b_\nu\cos\frac{2\pi}{\omega}\nu x + c_\nu\sin\frac{2\pi}{\omega}\nu x\right).$$

Plus généralement une fonction continue appliquant $[\alpha, \alpha + \omega] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ peut être développée sur $]\alpha, \alpha + \omega[$ sous la même forme dans des conditions plus larges.

Fonctions doublement périodiques

Les bandes de période utilisées dans le cas des fonctions simplement périodiques deviennent des *parallélogrammes de périodes* pour les fonctions doublement périodiques, parallélogrammes dans lesquels on n'inclut qu'un des sommets et deux des côtés (on assimile ces côtés à des intervalles semi-ouverts) (ill. A_2). Comme une fonction entière est bornée sur un domaine borné, il ne peut, conformément à la prop. de LIOUVILLE, exister de fonction doublement périodique entière non constante.

Déf. 2 : Une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ doublement périodique est appelée *fonction elliptique*.

Ses singularités sur $\mathbb{C}$ sont ses pôles. ∞ est une singularité essentielle.

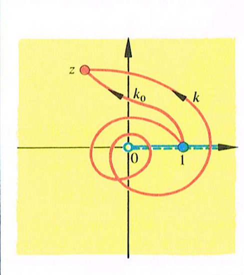
Déf. 3 : On entend par *ordre* d'une fonction elliptique f la somme des ordres des pôles dans un parallélogramme de périodes dont la frontière ne contient aucun pôle (cette somme ne dépend que de f).

À cause de la périodicité, l'intégrale de f sur la frontière d'un tel parallélogramme vaut 0. La somme des résidus des pôles dans un tel parallélogramme vaut donc également 0. Il ne peut de ce fait exister de fonction elliptique du premier ordre.

On peut aussi montrer qu'une fonction elliptique du $k^{\text{ième}}$ ordre prend, sur un parallélogramme de périodes, k fois toutes les valeurs de $\widehat{\mathbb{C}}$.

La fonction $\wp_{\omega_1, \omega_2}$ (p. 449) est une fonction elliptique du deuxième ordre dont un couple de périodes primitives est (ω_1, ω_2). Sa dérivée $\wp'$ est du troisième ordre. La fonction $\wp$, avec sa dérivée, joue, dans le cas des fonctions doublement périodiques, un rôle aussi important que la fonction exp. dans le cas des fonctions simplement périodiques. On a en effet la prop.

Prop. : *Toute fonction doublement périodique f s'écrit sous la forme $f = r_1 \circ \wp + \wp' \cdot (r_2 \circ \wp)$ où r_1 et r_2 désignent des fonctions rationnelles.*

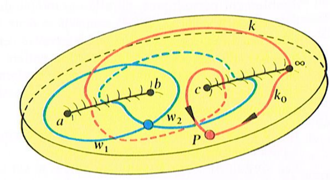


Soit k_0 un chemin de 1 à z, situé dans le plan $\mathbb{C}$ épointé, coupé le long de l'axe réel positif, les points de cette demi-droite étant comptés dans le demi-plan supérieur.

$\int_{k_0} \frac{1}{\zeta} \mathrm{d}\zeta$ est alors noté $\ln z$: c'est la détermination principale du logarithme naturel.

Soit k un autre chemin allant de 1 à z dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a la relation $\int_k \frac{1}{\zeta} \mathrm{d}\zeta = \ln z + 2\pi \mathrm{i}\, \nu$ où $\nu \in \mathbb{Z}$ est le nombre de tours effectués autour de 0. L'intégrale ne permet pas de définir une fonction sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La configuration analytique est une infinité dénombrable de plans épointés superposés. La trace de la fonction réciproque est la fonction exponentielle.

A_1



Soit f définie par

$f(z) = 2\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$, a, b, c distincts deux à deux. La surface de RIEMANN R correspondant à cette fonction possède deux feuillets dont les points de branchement sont a, b, c et ∞. R est homémorphe à un tore : or un tore d'axe d muni d'une frontière constituée de deux de ses cercles l'un coaxial à d, l'autre coplanaire à d, devient homéomorphe à un parallélogramme de périodes, donc simplement connexe (pp. 246, 442, 450). Ici R muni de w_1 et w_2 devient R' simplement connexe.

On pose : $\omega_1 := \int_{w_1} \frac{1}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta$ et $\omega_2 := \int_{w_2} \frac{1}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta$.

Soit k_0 un chemin de R' de ∞ vers un point P ; alors $I(P) = \int_{k_0} \frac{1}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta$ est indépendant du chemin suivi.

Par contre $\int_k \frac{1}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta = I(P) + \nu\omega_1 + \mu\omega_2$, $(\nu, \mu) \in \mathbb{Z}^2$, si k est un chemin quelconque de R reliant ∞ et P.

La configuration analytique de $\int_k \frac{1}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta$ est une surface de RIEMANN comportant une infinité de feuillets superposés sur R. La trace de la fonction réciproque est doublement périodique.

Le facteur 2 dans $f(z)$ et l'origine du chemin d'intégration k ont été choisis pour que la fonction doublement périodique sont la fonction $\wp$. Elle prend sur tout parallélogramme de périodes (p. 450) 2 fois chaque valeur de $\widehat{\mathbb{C}}$ puisque R est une surface à 2 feuillets sur $\widehat{\mathbb{C}}$.

A_2

Intégrales abéliennes

(Suite de la p. 453)

L'étude de ces intégrales a conduit à introduire les transformations dites birationnelles (f et f^{-1} rationnelles) de façon à mettre en évidence des propriétés intrinsèques (F et P sont des fonctions rationnelles). On a pu classer les intégrales abéliennes en trois espèces (les ex. A_1 et A_2 sont d'espèces différentes). Le sujet ne peut être abordé ici.

Fonctions algébriques

Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, $P \notin \mathbb{C}[X]$, $P \notin \mathbb{C}[Y]$, P étant également supposé irréductible, c'est-à-dire non décomposable en un produit de deux polynômes non constants. La relation $P(x, y) = 0$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, permet de définir implicitement y en fonction de x, resp. x en fonction de y (fonctions multiformes en général dont il s'agit de préciser les branches). On peut énoncer un premier théorème qui reprend des situations connues dans le cas réel.

Th. 1 : *Si $P(x_0, y_0) = 0$ et si $P'_y(x_0, y_0) \neq 0$, il existe $\rho > 0$ et une et une seule fonction continue $y = \varphi(x)$ définie pour $|x - x_0| < \rho$ telle que $y_0 = \varphi(x_0)$ et $\forall\, x \in D(x_0, \rho)$ $P(x, \varphi(x)) = 0$. De plus cette fonction est holomorphe au voisinage de x_0 :*

$$\varphi'(x) = \frac{-P'_x(x, \varphi(x))}{P'_y(x, \varphi(x))}$$

(*même formule que dans le cas réel*).

Quitte à faire une translation, on prend pour simplifier $P(0, 0) = 0$. Alors, on peut écrire
$P(x, y) = A_n(x, y) + \ldots + A_1(x, y)$ où les A_k sont des polynômes homogènes de degré k en (x, y). On pose $P'_x(0, 0) = a$, $P'_y(0, 0) = b$, soit $A_1(x, y) = ax + by$.

Si $b \neq 0$, $y = \varphi(x) = -\frac{a}{b}x + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu x^\nu$ au voisinage de $x = 0$, d'où $y \sim \alpha x^q$, $\alpha \neq 0$, $q \in \mathbb{N}^*$. De même si $a \neq 0$, $x = \psi(y) = -\frac{b}{a}y + \sum_{\nu=2}^{\infty} b_\nu y^\nu$ au voisinage de $y = 0$, d'où $x \sim \beta y^q$, $\beta \neq 0$, $q \in \mathbb{N}^*$. L'expression $x \sim \beta y^q$, montre qu'un problème se pose si l'on cherche à exprimer y en fonction de x pour $q > 1$ ($a \neq 0$, $b = 0$). Et bien entendu, si $a = b = 0$, le théorème 1 n'est plus utilisable, que l'on cherche à exprimer y en fonction de x, ou x en fonction de y.

On va préciser le cas $a \neq 0$, $b = 0$. On peut écrire
$P(x, y) = C_p(x)\, y^p + \ldots + C_1(x)\, y + C_0(x)$, où les $C_\nu \in \mathbb{C}[X]$. On a $C_0(0) = 0$ car $P(0, 0) = 0$ et $C_1(0) = P'_y(0, 0) = b = 0$. Il existe un plus petit indice $q \geq 2$ tel que $C_q(0) \neq 0$ car P est irréductible. On pose $C_\nu(x) = x\, B_\nu(x)$ pour $\nu < q$:

$$P(x, y) = C_p(x)\, y^p + \ldots + C_q(x)\, y^q + x\,[B_{q-1}(x)\, y^{q-1} + \ldots + B_0(x)]$$ avec $C_q(0) \neq 0$ et $B_0(0) = a \neq 0$. L'équation en y, $P(0, y) = 0$, admet 0 comme racine multiple d'ordre $q \geq 2$.

On désigne par E_∞ l'ensemble des x qui annulent $C_p(x)$ et par E_m l'ensemble des x tels que l'équation en y $P(x, y) = 0$ admette au moins une racine multiple.

Ex. 1 : $P_1(x, y) = xy^2 - 2(x + 5)\, y + x^2 - 5$ $E_\infty = \{0\}$, $E_m = \{5, -2 + \mathrm{i}, -2 - \mathrm{i}\}$.

Ex. 2 : $P_2(x, y) = 2xy^3 - 3y^2 + x$ $E_\infty = \{0\}$, $E_m = \{0, 1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$.

E_m résulte de l'élimination de x entre $P(x, y) = 0$ et $P'_y(x, y) = 0$.

E_∞ et E_m sont des ensembles finis. Par suite pour x non nul suffisamment voisin de 0, $x \notin E_m$; donc l'équation $P(x, y) = 0$ n'a que des racines simples en y pour $x \in D(0, \rho) \setminus \{0\}$, ρ assez petit. On peut démontrer que pour tout x non nul tendant vers 0, il existe exactement q racines distinctes $y_1, \ldots, y_q$ qui seront des fonctions holomorphes de x et qui tendront vers 0 avec x. De l'expression de P selon les C_μ et B_ν, on tire pour tout $k = 1, 2, \ldots, q$: $C_q(0)\, y_k^q \sim -x\, B_0(0)$. Finalement on a un point de ramification algébrique d'ordre q : $y_k \sim \mathrm{e}^{\frac{2k\mathrm{i}\pi}{q}} \sqrt[q]{\frac{x}{\beta}}$.

Th. 2 : *Si y_0 est racine multiple d'ordre q de $P(x_0, y) = 0$, si $P'_x(x_0, y_0) \neq 0$, alors (x_0, y_0) est point de ramification algébrique d'ordre q pour la fonction multiforme $y(x)$ définie par $P(x, y) = 0$.*

Les dém. des th. 1 et 2 supposent que l'une au moins des deux dérivées premières P'_x ou P'_y ne s'annule pas en (0, 0). Une étude complète doit aborder le cas où toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $s - 1$ inclusivement s'annulent en (0, 0), une dérivée partielle au moins d'ordre s ne s'annulant pas en (0, 0). L'expression de $P(x, y)$ avec les polynômes homogènes se présente alors sous la forme
$A_n(x, y) + \ldots + A_s(x, y)$. On peut montrer qu'au point ($x = y = 0$) se superposent des points simples et des points de ramification algébrique.

Ex. : $x^8 - x^4 y^4 + y^8 - x^2 y\,(x^2 + y^2)\,(y - x)^2 = 0$

1) $y_1(x) = x^2 + x^3 s_1(x)$, $y_2(x) = \mathrm{i}x + x^2 s_2(x)$, $y_3(x) = -\mathrm{i}x + x^2 s_3(x)$, où s_1, s_2, s_3 sont des séries entières.

2) $y^3 \sim x^2$ point de ramification d'ordre 3.

3) $(y - x)^2 \sim \frac{x^3}{2}$ point de ramification d'ordre 2.

On remarquera que ce sont les directions annulant $A_s(x, y)$ qui interviennent dans la construction des branches de la fonction multiforme au point (0, 0) et que l'expression de y en fonction de x fait appel à des fonctions holomorphes et des radicaux.

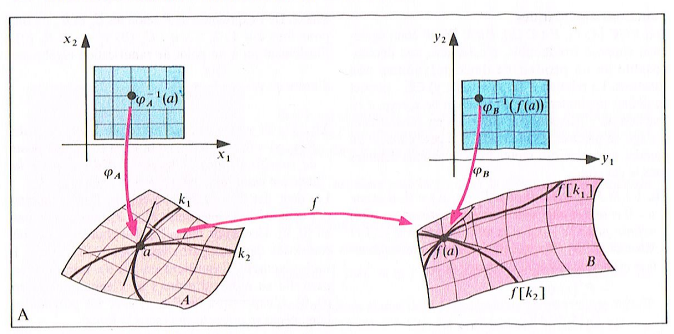
Pour être complet il faut préciser les situations pour lesquelles x ou y devient infini.

Si $x \to \infty$, en posant $x = \frac{1}{X}$ et en rendant entier, on est ramené à $X \to 0$. Si $x \to x_1$ annulant $C_p(x)$, on peut montrer que l'une au moins des branches de la fonction multiforme $y(x)$ tend vers l'infini. En posant $y = \frac{1}{Y}$, on est ramené à $Y \to 0$. En définitive on aura soit des pôles, soit des points de ramification algébrique, à distance finie ou non. La fonction multiforme $x \mapsto y(x)$ définie par $P(x, y) = 0$, de degré p en y pour $x \notin E_\infty$ applique $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$. Sa surface de RIEMANN est à p feuillets. Il n'y a pas de points singuliers autres que des points de ramification algébrique. Cela caractérise d'ailleurs les fonctions algébriques.

Intégrales abéliennes

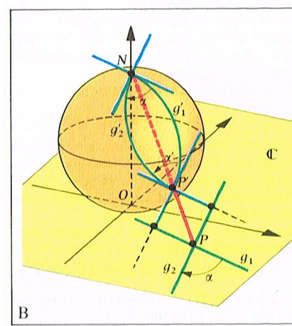
Soit $F(u, v)$ une fraction rationnelle irréductible à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $y = \varphi(x)$ une fonction algébrique définie par $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme irréductible : à P on peut associer une surface de RIEMANN concrète R. L'expression

$$A(\overset{\frown}{M_0 M}) = \int_{\overset{\frown}{M_0 M}} F\big(z, \varphi(z)\big)\mathrm{d}z$$ où $\overset{\frown}{M_0 M}$ est un chemin de classe C^1 orienté sur R compatible avec l'existence de l'intégrale, est par définition une *intégrale abélienne*. La connaissance de M_0 et de M ne suffit pas pour déterminer l'intégrale, comme le montrent les exemples A_1 et A_2 de la p. 452.



A

Transformation conforme d'une surface sur une autre



Dans la projection stéréographique de centre N les deux droites g_1 et g_2 sécantes en P sont transformées en deux cercles g'_1 et g'_2 passanr par P' (image de P) et N. Les tangentes à ces cerclés en P' et N font le même angle. L'angle défini en N est le même que celui défini par g_1 et g_2 dans le plan, puisque le plan tangent en N à la sphère est parallèle au plan complexe. Les angles géométriques en P et P' sont égaux. Si on oriente le plan complexe par $\overrightarrow{ON}$ et la sphère par $\overrightarrow{ON}$ en 0, c'est-à-dire de l'extérieur vers l'intérieur, on a conservation des angles en grandeur et en signe. La transformation est conforme.

Sur la sphère de RIEMANN, on peut aussi mesurer des angles en ∞. La transformation conforme définie par $h(z) = \frac{1}{z}$, qui correspond à une rotation sur la sphère, permet d'ailleurs de se ramener en 0.

B

Transformation conforme du plan complexe sur la sphère de RIEMANN

La composée $f_2 \circ f_1$ de deux transformations homographiques définies par $f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ et $f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$ est une transformation homographique. En effet d'une part

$$(f_2 \circ f_1)(z) = \frac{a_2 \cdot \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \cdot \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2) z + (b_1 a_2 + d_1 b_2)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)}$$

et d'autre part de $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ et $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$ on tire

$$(a_1 a_2 + c_1 b_2)(b_1 c_2 + d_1 d_2) - (b_1 a_2 + d_1 b_2)(a_1 c_2 + c_1 d_2) = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0 .$$

Une transformation homographique quelconque f définie par $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ où $c \neq 0$ peut donc s'écrire sous la forme $f : k \circ h \circ g$ où $g(z) = cz + d$, $h(z) = \frac{1}{z}$, $k(z) = -\frac{ad - bc}{c} z + \frac{a}{c}$. g et k sont alors des transformations affines, cas particulier des transformations homographiques.

C

Composition de transformations homographiques

Transformations conformes

Si f est une application d'un ouvert D_f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (structure euclidienne), de classe 1 et régulière, localement l'image $f(J)$ d'un arc de JORDAN J, orienté de classe 1 et régulier, est un arc de JORDAN de même nature. Si deux arcs J_1 et J_2 se rencontrent en a, l'angle de leurs tangentes orientées est un élément α de $[0, \pi]$: cet angle α devient un angle β pour les images $f(J_1)$ et $f(J_2)$ en $b = f(a)$. En général, on n'a pas $\beta = \alpha$.

Déf. 1 : f est dite *conforme* sur D_f si $\beta = \alpha$ pour toute paire d'arcs $\{J_1, J_2\}$ ayant un point commun a pris quelconque dans D_f.

Par ex., toute similitude de $\mathbb{R}^n$ est conforme.

Si on prend $n = 2$, le plan $\mathbb{R}^2$ peut être orienté et on peut remplacer la paire $\{J_1, J_2\}$ par le couple (J_1, J_2) ; dans ce cas $\alpha \in \mathbb{R}$ modulo 2π ainsi que β :

Déf. 2 : La *conformité* est alors définie de façon analogue par $\beta = \alpha$, en remplaçant paire par couple, et l'*anticonformité* par $\beta = -\alpha$ (modulo 2π).

Par ex., toute translation dans le plan euclidien orienté est conforme, toute symétrie orthogonale par rapport à une droite est anticonforme.

Rem. : On peut généraliser les résultats du plan au cas où f est une application d'une surface simple A de classe C^1, régulière et orientée, dans une surface B de même nature. Pour appréhender f on opère comme suit : A et B étant respectivement paramétrées par φ_A définie sur un domaine $\Omega_A \subset \mathbb{R}^2$ et φ_B définie sur un domaine $\Omega_B \subset \mathbb{R}^2$, on introduit de fait l'application $g = \varphi_B^{-1} \circ f \circ \varphi_A$ qui devra être injective, de classe C^1 et régulière de Ω_A dans Ω_B. Une courbe de A sera définie par $t \mapsto \varphi_A(x_1(t), x_2(t))$. Son image par f sera définie par $t \mapsto \varphi_B \circ g(x_1(t), x_2(t))$ (Fig. A).

On a les propriétés suivantes :

Prop. 1 : *La projection stéréographique du plan compactifié $\widehat{\mathbb{C}}$ sur la sphère de* RIEMANN *est une transformation conforme* (ill. B).

Prop. 2 : *Soit $f : D_f \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si $f'(a) \neq 0$ alors il existe un voisinage ouvert $U(a)$ de a sur lequel f est conforme.*

Pour prouver la prop. 2 on considère un arc Γ de classe C^1 et régulier défini par $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $t \mapsto k(t)$ $(\varepsilon > 0)$, avec $k(0) = a$. Par hyp. $k'(0) \neq 0$. L'arc image sous f est défini par $t \mapsto f \circ k(t)$. Or $f(z) = f(a) + (z - a)\, h(z)$ où h est holomorphe avec $h(a) = f'(a)$. On a, en remplaçant z par $k(t)$:

$$\frac{f \circ k(t) - f \circ k(0)}{t} = \frac{k(t) - k(0)}{t} \cdot (h \circ k)(t)$$

qui tend vers $k'(0) \cdot f'(a) \neq 0$ lorsque $t \to 0$. L'arc image $f(\Gamma)$ admet donc en $f(a)$ une tangente orientée par le vecteur d'affixe $f'(a) \cdot k'(0)$, obtenu par similitude de rapport complexe $f'(a)$ à partir du vecteur d'affixe $k'(0)$ qui oriente la tangente en a à l'arc Γ. La direction de la tangente orientée en a à Γ a tourné de l'angle Arg $f'(a)$ pour donner la direction de la tangente orientée en $f(a)$ à $f(\Gamma)$. On en déduit immédiatement la conformité de f d'abord en a, puis dans un voisinage de a, puisque f' est continue ($f'(z) \neq 0$ au voisinage de a).

On a aussi la réciproque de la propriété 2 :

Prop. 3 : *Soit $f : D_f \to \mathbb{C}$ une application conforme sur D_f. Alors f est holomorphe et $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in D_f$.*

Pour prouver cette propriété, on montre que les relations différentielles de CAUCHY-RIEMANN sont vérifiées (p. 431).

En tenant compte de la propriété 1, on voit que les propositions 2 et 3 sont encore valables pour des fonctions méromorphes.

Une fonction complexe anticonforme est aussi appelée *antiholomorphe*. Pour ces fonctions, les égalités de CAUCHY-RIEMANN sont remplacées par les égalités $\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\partial v}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$.

La conjugaison transforme toute fonction holomorphe en une fonction antiholomorphe et réciproquement.

La composée de deux transformations de même nature (conformes, resp. anticonformes) est conforme, celle de deux transformations de natures différentes est anticonforme.

La conformité est une propriété équivalente à la dérivabilité complexe dans le cas où $f'(z) \neq 0$.

En étudiant le cas où $f'(a) = 0$ on peut montrer que la mesure de l'angle formé par les images sous f de deux courbes se coupant en a est égale à k fois la mesure de l'angle initial dans le cas où $f^{(k)}(a) \neq 0$ et $f^{(\nu)}(a) = 0$ pour tout $\nu < k$. Mais f n'est plus localement inversible.

Si on considère une transformation conforme $(k = 1)$, l'application inverse est elle aussi conforme sur un voisinage de $f(a)$. Pour la dérivée $(f^{-1})'$, on a $(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}$ comme pour une fonction réelle (p. 295).

Transformations conformes de $\widehat{\mathbb{C}}$ sur lui-même.

Si on veut transformer $\widehat{\mathbb{C}}$ en lui-même par une transformation conforme f, cette fonction doit avoir un seul zéro et un seul pôle, tous deux d'ordre 1. f doit donc être une fonction rationnelle de la forme

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ avec } ad - bc \neq 0.$$

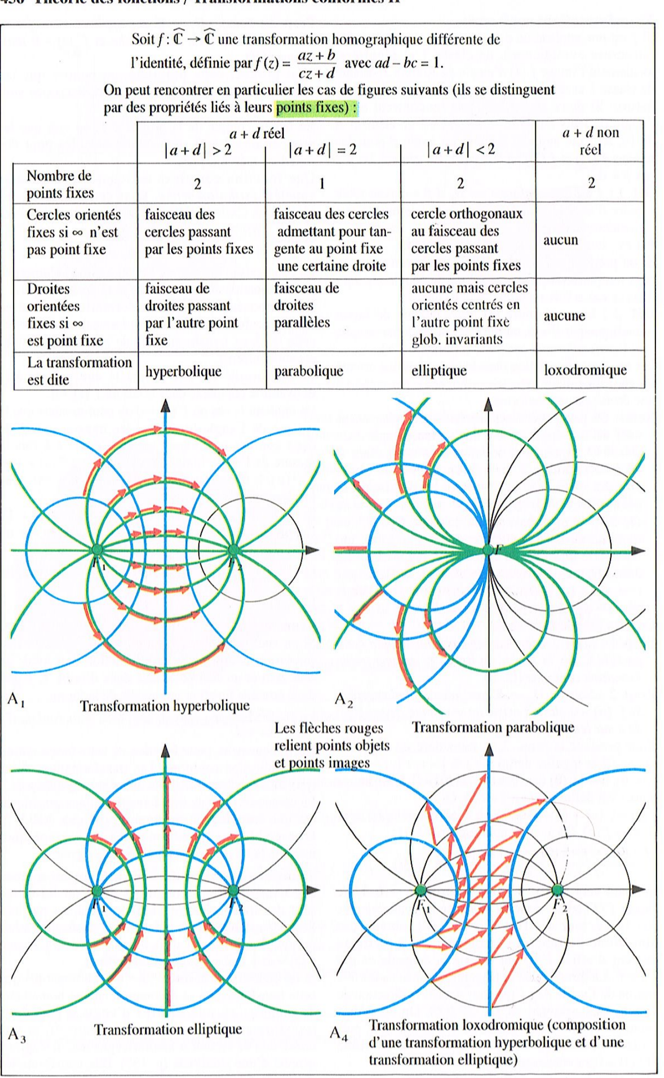
Réciproquement, toute fonction de cette forme définit une application conforme. Les transformations de ce type sont appelées *transformations homographiques*.

La composée de deux transformations homographiques est une transformation homographique (tab. C). L'ensemble des transformations homographiques muni de la loi de composition forme un groupe.

Transformations conformes de $\mathbb{C}$ sur lui-même.

Les transformations conformes de $\mathbb{C}$ sur lui-même sont des transformations homographiques particulières dans lesquelles le point ∞ est transformé en lui-même. La fonction doit donc être de la forme $f(z) = az + b$, $a \neq 0$ (*application affine*).

Si on écrit a sous la forme $|a| \cdot e^{i\varphi}$, on remarque que cette transformation se décompose en une homothétie de rapport $|a|$, une rotation d'angle φ (ces deux transformations ayant le même centre 0) et une translation de vecteur b. Géométriquement, il s'agit en général d'une similitude (p. 157). Elle transforme les droites en droites et les cercles en cercles.



Soit $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ une transformation homographique différente de l'identité, définie par $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc = 1$.

On peut rencontrer en particulier les cas de figures suivants (ils se distinguent par des propriétés liés à leurs points fixes) :

	$a+d$ réel			$a+d$ non réel
	$\lvert a+d \rvert > 2$	$\lvert a+d \rvert = 2$	$\lvert a+d \rvert < 2$	
Nombre de points fixes	2	1	2	2
Cercles orientés fixes si ∞ n'est pas point fixe	faisceau des cercles passant par les points fixes	faisceau des cercles admettant pour tangente au point fixe une certaine droite	cercle orthogonaux au faisceau des cercles passant par les points fixes	aucun
Droites orientées fixes si ∞ est point fixe	faisceau de droites passant par l'autre point fixe	faisceau de droites parallèles	aucune mais cercles orientés centrés en l'autre point fixe glob. invariants	aucune
La transformation est dite	hyperbolique	parabolique	elliptique	loxodromique

Classification des transformations homographiques en fonction de leurs points fixes

Toute transformation homographique est la composée d'applications affines et de l'application $h(z) = \dfrac{1}{z}$ (ill. C), cette dernière correspondant à une rotation d'angle π sur la sphère de RIEMANN autour du diamètre joignant les points $z = \pm 1$; une transformation homographique de la sphère de RIEMANN transforme un cercle en un cercle. Dans le plan $\mathbb{C}$, complété par ∞, l'ensemble des droites et des cercles est transformé en lui-même par une transformation homographique.

Classification des transformations homographiques

Une transformation homographique f a toujours au moins un *point fixe*, solution de $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = z$ (équation dans $\widehat{\mathbb{C}}$).

On suppose que f n'est pas l'identité et que l'écriture de f est normalisée ($ad - bc = 1$, en multipliant a, b, c, d par un même facteur convenable). Si $c = 0$ alors ∞ est point fixe de cette application : si de plus $a = d$, ∞ est le seul point fixe, sinon il y en a un autre $\dfrac{b}{d-a}$.

Si $c \neq 0$, ∞ n'est plus un point fixe de la transformation.

Les points fixes sont caractérisés par les égalités :

$$z_{1,2} = \frac{a-d}{2c} \pm \sqrt{\frac{(a-d)^2 + 4bc}{4c^2}}\ ,$$

soit avec la relation de normalisation :

$$z_{1,2} = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(a+d)^2 - 4}\ .$$

En tenant compte du cas $c = 0$, on a donc :

Si $a + d$ est réel et si $|a + d| = 2$, f a un seul point fixe.

Dans tous les autres cas f a deux points fixes.

Une classification plus poussée des transformations homographiques fait intervenir les cercles orientés globalement invariants, i.e. les cercles qui sont transformés en eux-mêmes sans changement d'orientation (idem pour les droites) (ill. A).

Transformations conformes de l'intérieur du disque unité sur lui-même

Les transformations homographiques à coefficients a, b, c, d réels (écriture normalisée) sont exactement celles qui laissent l'axe réel, les demi-plans resp. supérieur et inférieur globalement invariants.

Comme la transformation homographique f_0 définie par $f_0(z) = \dfrac{z+i}{iz+1}$ transforme l'intérieur du disque unité en le demi-plan supérieur puisque $f_0(1) = 1$, $f_0(-1) = -1$, $f_0(-i) = 0$, $f_0(0) = i$, on en déduit que toute transformation homographique l de l'intérieur du disque unité sur lui-même s'écrit nécessairement sous la forme $l = f_0^{-1} \circ r \circ f_0$, où r est une transformation homographique à coefficients réels. Cela induit les relations $d = \overline{a}$ et $c = \overline{b}$ (valeurs conjuguées) sur les coefficients a, b, c, d de l. Une étude plus complète montre que les transformations homographiques de cette forme sont effectivement celles qui transforment l'intérieur du disque unité en lui-même.

Transformations conformes d'un domaine simplement connexe

Si on veut transformer un domaine D_1 en un domaine D_2 par une transformation conforme, ces deux domaines doivent avoir nécessairement les mêmes propriétés de connexité puisqu'une transformation conforme est une application topologique.

Si $D_1 = \widehat{\mathbb{C}}$, alors D_2 est nécessairement $\widehat{\mathbb{C}}$. Les applications de ce type ont déjà été examinées à la p. 455.

Si D_1 est de la forme $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$ (plan $\widehat{\mathbb{C}}$ épointé) et si D_2 est également de la forme $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{b\}$, on peut construire une application conforme de D_1 sur D_2. En envoyant, par transformations homographiques, a et b à l'infini, on est ramené à une transformation conforme de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$, vue page 455.

$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$ est un domaine simplement connexe (il suffit de passer à la sphère de RIEMANN pour s'en convaincre). Un disque ouvert est également un domaine simplement connexe. Mais il n'existe pas d'application conforme de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$ sur un disque ouvert. En effet :

À une transformation homographique près on peut prendre $z \mapsto f(z)$ de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ sur le disque ouvert de centre b et de rayon $r > 0$: $z \mapsto f(z)$ est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire entière, majorée par $|b| + r$. D'après le théorème de LIOUVILLE (p. 447) f devrait être constante. Ce n'est pas le cas, d'où le résultat.

On peut démontrer le théorème suivant :

Théorème (Th. de représentation conforme de RIEMANN) : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine simplement connexe de $\widehat{\mathbb{C}}$ puisse être transformé par une application conforme en l'intérieur du disque unité est que sa frontière contienne au moins deux points distincts.*

Ce théorème s'applique par ex. à un domaine polygonal limité par une ligne brisée fermée sans point multiple. Sa démonstration est longue et difficile.

Transformation conforme d'un domaine en un autre

Transformer de manière conforme un domaine en un autre est un problème compliqué. Des propriétés de connexité identiques n'impliquent pas l'existence d'une telle transformation conforme, comme on vient de le voir.

On peut démontrer le théorème suivant :

Th. : *Tout domaine simplement connexe d'une surface de RIEMANN concrète est isomorphe soit à $\widehat{\mathbb{C}}$, soit à $\mathbb{C}$, soit à $D(0, 1)$.*

A_1

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z_1^{\nu}(1+\nu!\,z_2)$$

a pour ensemble de convergence

$\{(z_1, z_2) \mid (z_1 = 0) \vee (0 < |z_1| < 1 \wedge z_2 = 0)\}$.

L'ensemble de convergence ne contient pas de point intérieur ; la série ne définit pas de fonction holomorphe sur un domaine de $\mathbb{C}^2$.

A_2

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z_1^{\nu} z_2$$

a pour ensemble de convergence

$\{(z_1, z_2) \mid |z_1| < 1 \vee z_2 = 0\}$.

Il s'agit, à l'intérieur du domaine de convergence, du développement en série entière de la fonction

$f: (\mathbb{C} \setminus \{1\}) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ déf. par $f(z_1, z_2) = \dfrac{z_2}{1-z_1}$.

Cette fonction n'est pas définie au point (1, 0) et ne peut être prolongée par continuité en ce point, bien que la série y soit convergente. Les zéros et les pôles constituent deux droites de $\mathbb{C}^2$, privées de leur point commun (1, 0). Comme f est un quotient de fonctions holomorphes, on dit que f est méromorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et que (1, 0) est un point d'indétermination de la fonction.

A_3

$$\sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}}{\nu_1!\cdot\nu_2!}$$

a pour ensemble de convergence $\mathbb{C}^2$. On a

$$\sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\nu_1}\cdot z_2^{\nu_2}}{\nu_1!\cdot\nu_2!} = e^{z_1+z_2}.$$

A_4

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (z_1 z_2)^{\nu}$$

a pour ensemble de convergence

$\{(z_1, z_2) \mid |z_1|\cdot|z_2| < 1\}$.

Il s'agit du développement en série entière de la fonction définie par $\dfrac{1}{1-z_1 z_2}$.

A_5

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\nu_1} \binom{\nu_1}{\nu_2} z_1^{\nu_2} z_2^{\nu_1-\nu_2}$$

a pour ensemble de convergence

$\{(z_1, z_2) \mid |z_1| + |z_2| < 1\}$.

Il s'agit du développement de la fonction définie par $\dfrac{1}{1-(z_1+z_2)}$.

Ensembles de convergence de séries entières

(Suite de la p. 459)

On peut alors énoncer les deux théorèmes :

Prop. 3 : *La somme d'une série entière en plusieurs variables est holomorphe sur son domaine de convergence lorsqu'il n'est pas vide. On peut dériver terme à terme par rapport à une variable et la série dérivée est holomorphe sur le même domaine de convergence.*

Prop. 4 : *Réciproquement si une fonction f en plusieurs variables est holomorphe sur un ouvert Ω, elle est développable en série entière au voisinage de tout point $\boldsymbol{a} \in \Omega$ sur un polydisque ouvert de centre $\boldsymbol{a}$, inclus dans Ω.*

L'espace $\mathbb{C}^n$

Lors de l'étude des fonctions réelles, on avait abordé le problème plus général des fonctions de plusieurs variables, c.-à-d. des fonctions définies sur des espaces de dimension supérieure à 1 (p. 318. *sqq.*). L'analyse complexe se prête également à de telles extensions. L'espace $\mathbb{C}^n$, qui joue le même rôle que $\mathbb{R}^n$ dans le cas réel est composé de n-uplets $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de nombres complexes et peut être considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n. C'est un espace topologique si on le munit de la distance définie à partir de la norme :

$$|z| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2}.$$

En décomposant $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en leurs parties réelles et imaginaires, on remarque que $\mathbb{C}^n$ est un espace vectoriel de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$ (p. 233).

Holomorphie

Une fonction complexe du n-uplet complexe $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, où l'on pose

$z = \boldsymbol{x} + \mathrm{i}\boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \mathrm{i}\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ peut se mettre sous la forme $f(z) = u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \mathrm{i}v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ où u et v sont des fonctions réelles des $2n$ variables réelles indépendantes x_ν et y_ν. Si les fonctions u et v sont de classe C^1 par rapport aux x_ν et y_ν sur un ouvert Ω, il en est de même de f par rapport à ces mêmes variables et réciproquement. On a alors :

$$\mathrm{d}f = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\mathrm{d}x_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_\nu}\mathrm{d}y_\nu.$$

Les $2n$ fonctions particulières $z_\nu = x_\nu + \mathrm{i}y_\nu$ et $\bar{z}_\nu = x_\nu - \mathrm{i}y_\nu$ admettent pour différentielles respectives $\mathrm{d}z_\nu = \mathrm{d}x_\nu + \mathrm{i}\mathrm{d}y_\nu$ et $\mathrm{d}\bar{z}_\nu = \mathrm{d}x_\nu - \mathrm{i}\mathrm{d}y_\nu$; on en tire :

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\right)\mathrm{d}z_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\right)\mathrm{d}\bar{z}_\nu.$$

Déf. 1 : Dire que f est *holomorphe sur Ω*, c'est dire que f est dérivable selon chaque z_ν en tout point de Ω.

Cela revient donc à écrire les n conditions de Cauchy-Riemann : $\dfrac{\partial u}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial v}{\partial y_\nu}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_\nu} = -\dfrac{\partial u}{\partial y_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

En tenant compte de la définition de u et v, ces conditions s'expriment également par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_\nu} = 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

D'où :

Prop. 1 : *Une condition nécessaire et suffisante pour que f de classe C^1 par rapport aux x_ν et y_ν soit holomorphe par rapport aux $z_\nu = x_\nu + \mathrm{i}y_\nu$ est que l'on puisse écrire* $\mathrm{d}f = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(z)\,\mathrm{d}z_\nu$, *les A_ν s'identifiant d'ailleurs aux dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial z_\nu}$.

Séries entières de plusieurs variables

Pour faciliter la compréhension on prendra dans un premier temps trois variables complexes x, y, z. Une série entière en trois variables est de la forme $\sum_{(p,q,r)\in\mathbb{N}^3} a_{pqr}\, x^p y^q z^r$ où les a_{pqr} sont des coef. appartenant à $\mathbb{C}$. L'ordre dans lequel sont pris les termes n'étant pas précisé, on doit se placer dans l'hypothèse d'une série commutativement convergente, c'est-à-dire absolument convergente. On peut faire des combinaisons linéaires, des produits de telles séries. L'exemple qui suit est fondamental :

Pour $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$,

$$\sum_{p=0}^{\infty} x^p \cdot \sum_{q=0}^{\infty} y^q \cdot \sum_{r=0}^{\infty} z^r = \sum_{(p,q,r)\in\mathbb{N}^3} x^p y^q z^r = \frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}$$

De $\left(\sum_0^n x^p\right)\cdot\left(\sum_0^n y^q\right)\cdot\left(\sum_0^n z^r\right) \le \sum_{(p,q,r)\in\mathbb{N}^3} x^p y^q z^r$

pour $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ et n quelconque on déduit d'ailleurs que la série $\sum_{p,q,r} x^p y^q z^r$ converge absolument si, et seulement si, $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$.

Le domaine d'absolue convergence est le produit de trois disques ouverts de rayon 1.

Si on prend maintenant la série d'aspect plus simple $\sum_{n\in\mathbb{N}} (xyz)^n$, son domaine d'absolue convergence est défini par $|x||y||z| < 1$ (la somme est alors $\dfrac{1}{1-xyz}$).

Il n'apparaît pas ici de disque de manière évidente. Il convient donc d'approfondir l'étude de l'absolue convergence. On a le résultat suivant, analogue au lemme d'Abel.

Prop. 2 : *Si x_0, y_0, z_0 sont non nuls et s'il existe $M \ge 0$ tel que $\forall\,(p, q, r)\ |a_{pqr}\, x_0^p y_0^q z_0^r| \le M$, alors* $\sum a_{pqr}\, x^p y^q z^r$ *est absolument convergente sur l'ouvert $\Omega\,(x_0, y_0, z_0)$ défini par :* $|x| < |x_0| \wedge |y| < |y_0| \wedge |z| < |z_0|$.

En effet $|a_{pqr}\, x^p y^q z^r| \le M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^p\left|\dfrac{y}{y_0}\right|^q\left|\dfrac{z}{z_0}\right|^r$, *terme général d'une série à termes positifs convergente (ex. fondamental).*

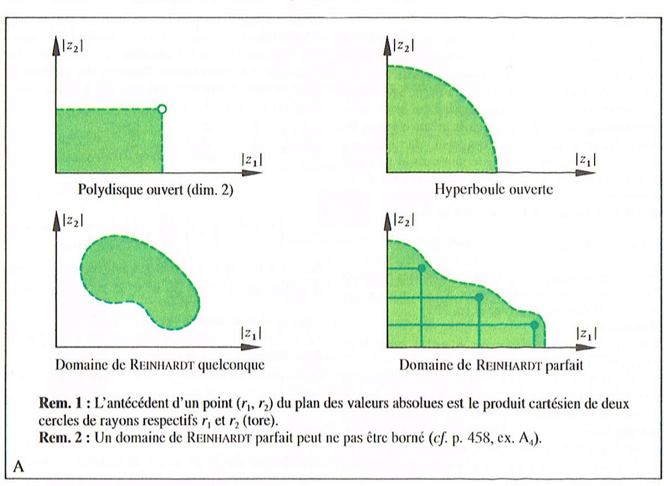
Soit E l'ensemble des (x, y, z) pour lesquels la série est absolument convergente. E n'est jamais vide puisque $(0, 0, 0) \in E$. Si pour tout $(x, y, z) \in E$ l'un des trois nombres x, y, z est nul, on est ramené à des séries d'au plus deux variables. On suppose donc qu'il existe $(x_0, y_0, z_0) \in E$ avec $x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 \ne 0$. Alors l'intérieur $\mathring{E}$ de E n'est pas vide d'après la prop. 2. $\mathring{E}$ est la réunion des ouverts connexes $\Omega\,(x_0, y_0, z_0)$, $(x_0, y_0, z_0) \in E$, $x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 \ne 0$. Comme tous ces ouverts ont $(0, 0, 0)$ en commun, $\mathring{E}$ est un ouvert connexe c'est-à-dire un domaine. $\mathring{E}$ s'appelle le *domaine de convergence* (sous-entendu absolue) de la série.

On reprend maintenant n quelconque.

Déf. 2 : On appelle *polydisque* (sous-entendu fermé) de centre $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, défini par $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ l'ensemble des $z = (z_1, \ldots, z_n)$ tels que $\forall \nu\ |z_\nu - a_\nu| \le |a_\nu - b_\nu|$.

On notera que si $\forall \nu\ b_\nu \ne a_\nu$, on peut définir le *polydisque ouvert* par $\forall \nu\ |z_\nu - a_\nu| < |a_\nu - b_\nu|$. (Ex. : $\Omega(x_0, y_0, z_0)$.)

Il n'est pas difficile de montrer que $\mathring{E}$ est la réunion des polydisques de centre 0, passant par $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathring{E}$.



Rem. 1 : L'antécédent d'un point (r_1, r_2) du plan des valeurs absolues est le produit cartésien de deux cercles de rayons respectifs r_1 et r_2 (tore).
Rem. 2 : Un domaine de Reinhardt parfait peut ne pas être borné (*cf.* p. 458, ex. A_4).

Exemples de domaines de Reinhardt dans $\mathbb{C}^2$

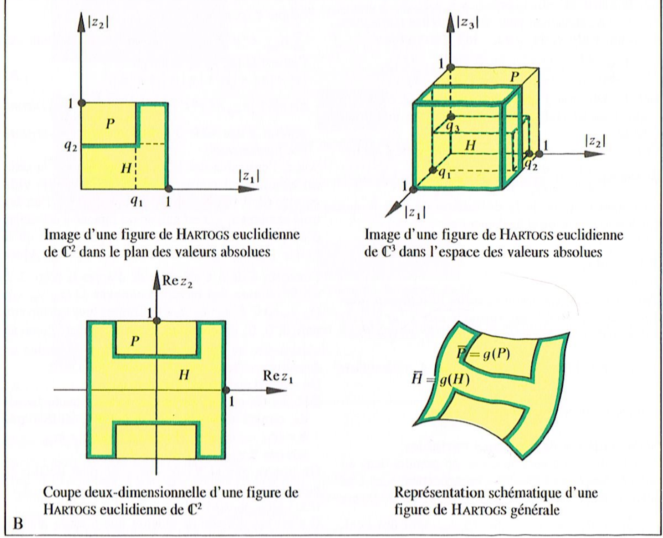


Image d'une figure de Hartogs euclidienne de $\mathbb{C}^2$ dans le plan des valeurs absolues

Image d'une figure de Hartogs euclidienne de $\mathbb{C}^3$ dans l'espace des valeurs absolues

Coupe deux-dimensionnelle d'une figure de Hartogs euclidienne de $\mathbb{C}^2$

Représentation schématique d'une figure de Hartogs générale

Figures de Hartogs euclidiennes et générales

Les concepts et les résultats qui suivent vont être énoncés pour des séries entières autour de **0**. On peut facilement les étendre à des séries entières autour d'un point quelconque ***a***.
On définit l'application τ de $\mathbb{C}^n$ dans $(\mathbb{R}^+)^n$ par :
$\tau(z) = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$.

Déf. 3 : L'antécédent $\tau^{-1}[D]$ d'un domaine $D \subseteq (\mathbb{R}^+)^n$ est appelé un domaine multicellulaire ou domaine de Reinhardt. Un domaine de Reinhardt R est dit parfait si pour tout $z_0 \in R$ il contient l'ensemble des polydisques de centre **0** passant par z_0, i.e. l'ensemble des points z tels que $|z_\nu| \leq |z_{0\nu}|$ (ill. A).

En particulier, le domaine de convergence (*cf.* supra) d'une série entière autour de **0** est un domaine de Reinhardt parfait.

Rem. : Si on peut également parler des séries de Laurent de plusieurs variables, leur étude est toutefois plus compliquée.

Prolongements analytiques / Singularités

Dans le cas des fonctions d'une variable, on avait montré que l'on pouvait prolonger une fonction définie par une série entière autour d'un point en développant la fonction autour d'autres points. Cela permettait d'effectuer des prolongements au-delà du domaine de convergence initial. Dans le cas de fonctions de plusieurs variables, de tels prolongements sont également possibles. On peut montrer que le prolongement le long d'un chemin donné est unique :

Prop. 5 : *Soit* H_1 *et* H_2 *deux boules ouvertes* ($|z| < r_1$, resp. $|z| < r_2$, $0 < r_2 < r_1$). *Soit* f *une fonction holomorphe sur* H_1 *telle que* $f(z) = 0$ *pour tout* $z \in H_2$ *: alors* $f(z) = 0$ *pour* $z \in H_1$.

Sur la frontière du domaine de convergence, on trouve des singularités comme dans le cas de fonctions d'une seule variable (déf. 1 p. 439). Si $(r_1, \ldots, r_n)$ est un point frontière de $\tau\left[\mathring{E}\right]$, il existe au moins un point de l'ensemble des antécédents $\tau^{-1}[(r_1, \ldots, r_n)]$ où aucun prolongement analytique n'est possible. On peut ensuite se demander si les fonctions holomorphes de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ peuvent présenter des singularités isolées et si tout domaine est le domaine d'holomorphie d'une certaine fonction.

Propriété de continuité

Afin de répondre à ces questions, on introduit d'abord certains domaines.

Déf. 4 : Soit n nombres réels $q_1, \ldots, q_n$ de $]0, 1[$, $n \geq 2$. Soit en outre P le polydisque unité ouvert
$P := \{z \,/\, |z_\nu| < 1,\ \nu \in \{1, \ldots, n\}\}$ et
$H := \{z \,/\, z \in P \wedge (|z_1| > q_1 \vee |z_\nu| < q_\nu,\ \nu \in \{2, \ldots, n\})\}$;
alors (P, H) est une *figure de Hartogs* dite *euclidienne*. Si $\boldsymbol{g}$ est une application de P dans $\mathbb{C}^n$, dont les composantes $g_1, \ldots, g_n$, supposées injectives sont holomorphes ainsi que leurs réciproques, alors $(\overline{P}, \overline{H})$ défini par $\overline{P} := \boldsymbol{g}[P]$ et $\overline{H} := \boldsymbol{g}[H]$ est une *figure de Hartogs* au sens général. On a alors :

Prop. 6 (prop. dite de continuité) : *Soit* $(\overline{P}, \overline{H})$ *une figure de* Hartogs. *Si* f *est holomorphe sur* $\overline{H}$ *alors* f *peut être prolongée analytiquement de manière unique sur* $\overline{P}$.

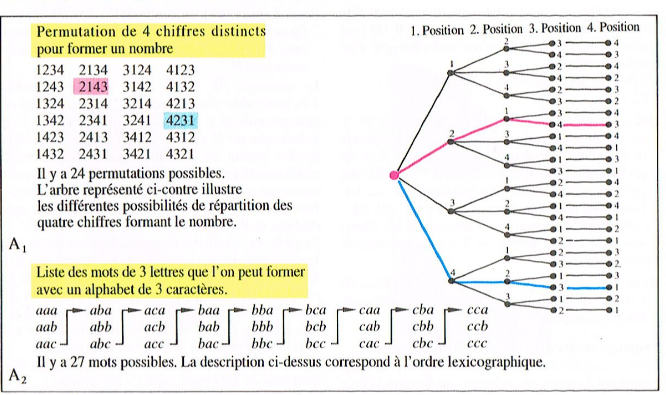
Le domaine $\overline{H}$ n'est donc pas le domaine d'holomorphie d'une fonction. Dans la preuve de cette proposition, il faut montrer que la fonction $f \circ \boldsymbol{g}$ holomorphe sur $H = \boldsymbol{g}^{-1}[\overline{H}]$ est développable en série entière autour de **0** et que cette série converge absolument en tout point de H. Le domaine de convergence de cette série sera un domaine de Reinhardt parfait qui contient H. Or le plus petit domaine de Reinhardt ayant cette propriété est P.
La prop. de continuité montre en particulier qu'une fonction holomorphe sur un domaine épointé $D \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ de $\mathbb{C}^n$ où $n \geq 2$ est holomorphe sur D. Pour prouver ce corollaire, il suffit de considérer une figure de Hartogs $(\overline{P}, \overline{H})$ dans D telle que $\overline{P} \subseteq D$ mais $\boldsymbol{a} \notin \overline{H}$.
Une fonction f de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ holomorphe avec $n \geq 2$ ne peut donc pas avoir de singularités isolées.
Le corollaire de la prop. de continuité peut être généralisé de différentes façons, en particulier :
Si K est une partie compacte d'un domaine D telle que $D \setminus K$ soit un domaine connexe, alors toute fonction holomorphe sur $D \setminus K$ est prolongeable en fonction holomorphe sur D.
Pour $n \geq 2$, les zéros d'une fonction holomorphe comme ses pôles ne sont pas isolés mais forment une variété de dimension $(2n - 2)$ sur $\mathbb{R}$ dans l'espace $\mathbb{C}^n$ qui, lui, est de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$. Pour $n = 2$, il s'agit en fait de surfaces de Riemann.

Problèmes relatifs aux prolongements

Le prolongement analytique d'une fonction peut dépendre du chemin suivi. Pour sauvegarder l'unicité, on introduit, en analogie avec les surfaces de Riemann, les domaines de Riemann, qui ont également une structure complexe, et qui, dans les cas concrets, sont des recouvrements superposés dans $\mathbb{C}^n$, ou $\mathbb{C}^n$ compactifié.
Par ailleurs dans l'espace $\mathbb{C}$, tout domaine D est le domaine d'holomorphie d'une fonction, au sens où il existe une fonction holomorphe sur D qui ne peut être prolongée analytiquement en une fonction holomorphe sur un domaine plus grand. Dans l'espace $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, par contre, il existe des domaines sur lesquels toute fonction holomorphe peut être prolongée analytiquement sur un domaine plus grand.
On a vu en particulier que si $(\overline{P}, \overline{H})$ est une figure de Hartogs, et si f est holomorphe sur $\overline{H}$, elle l'est aussi sur l'ensemble plus grand $\overline{P}$.

Déf. 5 : Un domaine de Riemann R sur $\mathbb{C}^n$ est *pseudo-convexe* si pour toute figure de Hartogs $(\overline{P}, \overline{H})$, $\overline{H} \subseteq R$ implique que $\overline{P} \subseteq R$.

La propriété de continuité permet de montrer que tout domaine d'holomorphie est pseudo-convexe.
Oka a prouvé que tout domaine pseudo-convexe est le domaine d'holomorphie d'une fonction.



Permutation de 4 chiffres distincts pour former un nombre

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Il y a 24 permutations possibles.
L'arbre représenté ci-contre illustre les différentes possibilités de répartition des quatre chiffres formant le nombre.

A_1

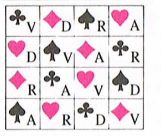
Liste des mots de 3 lettres que l'on peut former avec un alphabet de 3 caractères.

aaa aab aac → *aba abb abc* → *aca acb acc* → *baa bab bac* → *bba bbb bbc* → *bca bcb bcc* → *caa cab cac* → *cba cbb cbc* → *cca ccb ccc*

Il y a 27 mots possibles. La description ci-dessus correspond à l'ordre lexicographique.

A_2

Groupements



α	δ	β	γ
γ	β	δ	α
δ	α	γ	β
β	γ	α	δ

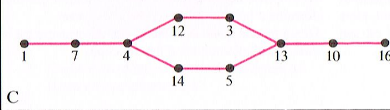
V	D	R	A
D	V	A	R
R	A	V	D
A	R	D	V

Les valets, dames, rois et as d'un jeu de cartes doivent être ordonnés dans un tableau de telle manière que chaque ligne et chaque colonne contienne une et une seule fois chaque valeur et chaque couleur. En remplaçant les symboles des couleurs trèfle, pique, cœur, carreau par α, β, γ, δ, la solution cherchée est obtenue par superposition des deux carrés ci-dessus.
Les carrés individuels s'appellent carrés latins. Chaque lettre apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne. Leur superposition constitue un carré gréco-latin lorsque la propriété demandée est réalisée. Les carrés individuels sont alors dits orthogonaux.

B

Carrés latins et gréco-latins

Un passeur (P) doit faire traverser un fleuve à un loup (L), une chèvre (C) et un chou (H). L veut manger C et C veut manger H. Ceci signifie que d'une part L et C, d'autre part C et H, ne doivent pas être laissés sans surveillance de la part de P. Le bateau ne peut transporter qu'un passager à la fois en plus du passeur.
Le tableau décrit les situations possibles de chacun des deux bords, celles écrites entre parenthèses étant évidemment à rejeter. Les traversées possibles se laissent également représenter par un graphe. Le problème revient alors à déterminer un chemin entre 1 et 16. On voit que, sans prendre en compte les détours, le problème a deux solutions distinctes.



N°	1. bord	2. bord	Traversée possible par
1	L C H P		7
(2)	L C H	P	—
3	L C P	H	12, 13
4	L H P	C	7, 12, 14
5	C H P	L	13, 14
(6)	L C	H P	—
7	L H	C P	1, 4
(8)	L P	C H	—
(9)	C H	L P	—
10	C P	L H	13, 16
(11)	H P	L C	—
12	L	C H P	4, 3
13	C	L H P	10, 5, 3
14	H	L C P	5, 4
(15)	P	L C H	—
16		L C H P	10

C

Problème du loup, de la chèvre et du chou

Champ d'étude de l'analyse combinatoire

L'analyse combinatoire s'emploie à étudier et à dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis. Les quelques exemples qui suivent font intervenir des questions d'analyse combinatoire : le classement des nombres au sein d'un n-uplet, la disposition d'un groupe de personnes autour d'une table, celle des pièces sur un échiquier, l'agencement des lettres d'un mot, des mots dans un dictionnaire, les chances de gain à un jeu de hasard, etc.
L'analyse combinatoire est née de l'étude des jeux de hasard et s'est fortement développée sous l'influence du calcul des probabilités. Elle est par ailleurs liée à la théorie des nombres et à la théorie des graphes. Ses méthodes étaient originellement adaptées à la résolution de problèmes particuliers. En revanche, actuellement, on tente de ramener les problèmes rencontrés à des exemples types pour lesquels on développe des méthodes générales de résolution.

Exemples

a) Permutation de 4 chiffres distincts
On cherche à déterminer toutes les bijections d'un ensemble à quatre éléments, par ex. {1, 2, 3, 4}, sur lui-même (appelées aussi *permutations*, voir p. 75). Le choix de l'image du premier chiffre est quelconque, le choix de la deuxième image se fait donc entre trois chiffres, le choix de la troisième entre les deux restants. La quatrième image est alors totalement déterminée. Il y a donc $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ bijections distinctes. L'ensemble de ces bijections est illustré dans la fig. A_1 sous forme d'un arbre (voir aussi p. 253). Chaque bijection correspond exactement à une branche de l'arbre. Sa représentation débute au niveau du nœud extrême à gauche et suit une branche jusqu'à son extrémité droite.

b) Juxtaposition de lettres pour former un mot
Lorsque, partant d'un alphabet donné, on cherche à combiner des lettres pour former un mot, la position d'une lettre donnée joue évidemment un rôle comme pour l'exemple a), mais, à la différence de a), une lettre peut apparaître plusieurs fois dans le mot. Chaque position peut alors être occupée de manière indifférente par l'une quelconque des lettres de l'alphabet. Soit un alphabet de 26 lettres. Il est possible de former $26^5 = 11\,881\,376$ mots distincts de 5 lettres. Tous n'ont naturellement pas une signification ni ne peuvent être prononcés de manière intelligible ! Le tab. A_1 est un exemple de mots de 3 lettres formés à partir d'un alphabet à 3 lettres. Les mots sont répertoriés ici selon l'ordre lexicographique. Lorsque l'on remplace les lettres a, b, c par les chiffres 1, 2, 3, les mots deviennent des nombres à trois chiffres. L'ordre lexicographique est celui correspondant à l'ordre croissant des nombres.

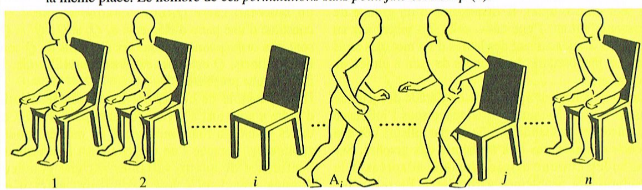
c) Carrés latins et gréco-latins
Le problème consiste à placer n lettres différentes dans une matrice (n, n) de telle manière que chaque lettre apparaisse une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne. La matrice obtenue s'appelle *carré latin d'ordre n*. Pour $n > 1$, il existe de nombreuses façons d'obtenir un carré latin d'ordre n.
On peut à partir de 2 carrés latins Q_1 et Q_2 construire un nouveau carré Q, dont chaque élément est constitué d'une paire d'éléments de Q_1 et Q_2. Q_1 et Q_2 sont dits *orthogonaux* lorsque les éléments de Q sont tous distincts. Q est alors dit *gréco-latin*. Le tab. B illustre cette propriété.
Il est possible de construire un carré gréco-latin d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sauf pour $n = 6$. Ces carrés jouent un rôle fondamental en mathématiques appliquées. Lorsque l'on cherche ainsi à déterminer l'influence de quatre variables sur une grandeur donnée (réaction à une excitation, effet d'un médicament, etc.), chacune des variables pouvant prendre n valeurs distinctes, les carrés gréco-latins permettent de constituer les échantillons test. Les lignes contrôlent la première variable, les colonnes la seconde, le premier élément de la paire la troisième, le second élément de la paire la quatrième. Pour n donné, il y a généralement plus de 2, mais au maximum $n - 1$, carrés latins orthogonaux deux à deux. En géométrie, on s'intéresse particulièrement à l'existence d'exactement $n - 1$ carrés latins d'ordre n orthogonaux deux à deux. La détermination de tous les n pour lesquels cette propriété est vraie n'a pas encore été résolue. La validité de la propriété précédente implique l'existence d'espaces projectifs finis (voir p. 133 et p. 139), dans lesquels chaque droite possède $n + 1$ points et chaque point appartient à $n + 1$ droites.

d) Le problème du loup, de la chèvre et du chou
La fig. C décrit un jeu mathématique classique et une méthode pour résoudre un tel problème sans chercher à obtenir une solution « au hasard ». L'exemple du paragraphe précédent montre néanmoins que l'on n'a pas encore réussi à déterminer pour tous les problèmes types une méthode générale de résolution.

e) Partitions
De nombreux problèmes (jeux de dés, jeux d'argent, etc.) se ramènent à écrire un nombre n comme somme de termes choisis dans un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ et à dénombrer ces décompositions de n (*partitions*). On cherche par exemple à obtenir $n = 14$ à l'aide de trois dés. Chaque dé peut prendre une valeur de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6}. On obtient alors les partitions suivantes :
$14 = 2 + 6 + 6 = 3 + 5 + 6 = 4 + 4 + 6 = 4 + 5 + 5$.
Lorsque le nombre de dés n'est pas limité à trois, on obtient 90 partitions distinctes du nombre 14. Il y a 135 partitions distinctes lorsque les valeurs sont quelconques dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Enfin lorsque l'ordre des termes a également une importance, il y a finalement $2^{13} = 8\,192$ partitions distinctes.

a) Le nombre de manières différentes d'asseoir 10 personnes sur 10 chaises est :
$p(10) = 10! = 3\,628\,800$

b) Lorsque l'on part d'une situation où les n personnes ($n \geq 2$) sont assises sur les n chaises, on peut se demander de combien de manières il est possible de permuter ces personnes tel qu'aucune ne garde la même place. Le nombre de ces *permutations sans point fixe* est noté $\bar{p}(n)$.



Lorsqu'il est clair que la personne A_i assise sur la chaise i choisit de s'asseoir sur la chaise j ($i \neq j$), il est alors possible d'asseoir de $\bar{p}(n-1) + \bar{p}(n-2)$ manières différentes.les personnes restantes. En effet, soit A_j décide de s'asseoir sur la chaise i (d'où $\bar{p}(n-2)$ possibilités), soit sur une autre chaise (d'où $\bar{p}(n-1)$ possibilités).
Comme A_i a le choix entre $n - 1$ chaises, on obtient la formule de récurrence :

$$\bar{p}(n) = (n-1)\big(\bar{p}(n-1) + \bar{p}(n-2)\big)$$

d'où par récurrence :

$$\bar{p}(n) = n! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\nu!} = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

(La somme entre parenthèses est le début du développement en série de e^{-1} (p. 309))
Lorsque $n = 10$, $\bar{p}(10) = 1\,334\,961$

c) Il est possible à partir des chiffres 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 7 d'obtenir :

$$p(8;2,4,1,1) = \frac{8!}{2!4!1!1!} = 840$$

nombres distincts à 8 chiffres.

A

Permutations

a) Il y a $a(10,6) = \frac{10!}{4!} = 151\,200$ manières différentes de placer 6 personnes sur 10 chaises.

b) Pour remplir une grille de loto sportif, il faut cocher 1, 2 ou 0 selon que l'on parie sur le gain d'une équipe (1 ou 2) ou sur le match nul (0) pour chacune des 20 parties en jeu. Il y a donc $a^*(3, 20) = 3^{20} = 3\,486\,784\,401$ manières différentes de remplir une grille de loto sportif.

B

Arrangements et listes

a) Au jeu de la belote, chaque joueur reçoit 8 cartes d'un jeu de 32 cartes. Comme chaque joueur peut ranger ses cartes dans l'ordre qu'il désire, le nombre de mains différentes d'un joueur est de $c(32, 8) = 10\,518\,300$.
Le deuxième joueur reçoit 8 cartes des 24 restantes, le troisième 8 des 16 restantes, le dernier les 8 dernières. L'ordre des joueurs ayant une importance (il n'est pas équivalent que deux joueurs différents aient la même main), le nombre de distributions différentes est de : $c(32, 8) \cdot c(24, 8) \cdot c(16, 8) \cdot c(8, 8) = 99\,561\,092\,450\,391\,000$

b) Au loto, il faut choisir 6 numéros sur une grille de 49 numéros. Il y a donc $c(49,6) = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$ choix distincts.
Il n'y a qu'une seule possibilité d'obtenir 6 bons numéros, $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} = 258$ possibilités d'obtenir 5 bons numéros, $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13\,545$ d'obtenir 4 bons numéros, $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246\,820$ possibilités d'obtenir 3 bons numéros, etc.

c) Le nombre de lancers distincts de 5 dés identiques est de $c^*(6,5) = \binom{10}{5} = 252$.

C

Combinaisons

Les exemples de la p. 463 montrent que les problèmes d'analyse combinatoire peuvent être très divers. Seuls certains d'entre eux, très importants, seront traités de manière générale dans ce qui suit.

Permutations sans répétition

Le premier exemple de la p. 463 illustre le cas fondamental des permutations. Dans la terminologie combinatoire, une *permutation de n éléments* est une bijection sur lui-même d'un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, qu'il est commode de représenter par le n-uplet image du n-uplet naturel $(1, 2, \ldots, n)$, ou plus généralement par tout n-uplet de n éléments distincts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Théorème 1 : *Le nombre $p(n)$ des permutations (sans répétition) de n éléments est $p(n) = n!$*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de remarquer qu'il y a n choix possibles pour la première place du n-uplet, $n-1$ choix pour la seconde, $n-2$ choix pour la troisième, etc. La propriété générale se démontre par récurrence sur n. Un arbre (p. 462, tab. A) permet de se représenter $p(n)$.
Un autre exemple de permutations est illustré dans le tab. A a). Le tab. A b) propose une formule pour calculer le nombre de *permutations sans point fixe*. Cela consiste à déterminer à partir d'un n-uplet donné le nombre de permutations possibles lorsqu'aucun élément ne garde sa place.

Permutations avec répétitions

Ici on prend plus généralement un n-uplet où les éléments ne sont pas tous distincts. Lorsque seuls k éléments sont distincts ($k \leq n$), chacun d'eux apparaissant $n_1, n_2, \ldots, n_k$ fois, avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, on parle de *permutation de n éléments avec $n_1, n_2, \ldots, n_k$ répétitions.*

Théorème 2 : *Le nombre $p(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ des permutations de n éléments avec $n_1, n_2, \ldots, n_k$ répétitions est :*

$$p(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

En effet, si chacune des n_ν places occupées de manière identique ($\nu \in \{1, 2, \ldots, k\}$) était occupée par des éléments différents, le nombre des permutations serait alors à multiplier par $n_\nu!$. D'où :

$$p(n_1, n_2, \ldots, n_k) \cdot n_1!\, n_2! \ldots n_k! = n! \quad \text{(ex. c) du tab. A).}$$

Arrangements sans répétition

Les permutations sont un cas particulier du problème plus général des arrangements. Au lieu de constituer à partir des n éléments un n-uplet, on peut constituer des k-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ avec $k \leq n$. Un tel k-uplet avec $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$ s'appelle un *arrangement sans répétition de n éléments pris k à k.*

Théorème 3 : *Le nombre $a(n, k)$ d'arrangements sans répétition de n éléments pris k à k est :*

$$a(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

La démonstration est semblable à celle du théorème 1. Il y a n choix possibles pour l'occupation de la première place du k-uplet, $n - 1$ choix pour la seconde, pour la k-ième, il n'y a plus que $n - (k - 1)$ choix possibles. Le produit $n(n-1) \ldots \big(n - (k-1)\big)$ peut alors être écrit sous la forme $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Arrangements avec répétitions

Lorsque d'un jeu de n cartes, on tire k cartes sans les replacer dans le jeu et que l'ordre des cartes tirées revêt une importance, on est dans le cas du paragraphe précédent. Le problème est distinct lorsque, après avoir tiré une carte, il est possible de la remettre dans le jeu et donc de la tirer une seconde fois. Ce cas est semblable au second exemple de la p. 463, où les lettres formant les mots pouvaient apparaître plusieurs fois.
On appelle *arrangement avec répétitions de n éléments pris k à k*, un k-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ d'éléments d'un ensemble de cardinal n. Comme chaque position du k-uplet peut être occupée de manière indifférente par l'un quelconque des éléments, on a :

Théorème 4 : *Le nombre $a^*(n, k)$ des arrangements avec répétitions de n éléments pris k à k est :*
$a^*(n, k) = n^k$

Combinaisons sans répétition

Dans la plupart des jeux de cartes, l'ordre dans lesquels sont tirées les cartes n'a aucune importance. On s'intéresse alors aux sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de cardinal n plutôt qu'aux k-uplets. On appelle un tel sous-ensemble une *combinaison sans répétition de n éléments pris k à k.*
On peut définir une relation d'équivalence sur les arrangements sans répétition : deux arrangements sont équivalents s'il existe une permutation permettant de passer de l'un à l'autre. Une classe d'équivalence est alors une combinaison. Le théorème 1 précise qu'il y a $k!$ permutations possibles d'un ensemble à k éléments. D'où :

Théorème 5 : *Le nombre $c(n, k)$ des combinaisons sans répétitions de n éléments pris k à k est :*

$$c(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{(voir ex. a) et b) du tab. C))}$$

Combinaisons avec répétitions

Lorsque l'ordre des éléments des k-uplets n'a plus d'importance dans les problèmes d'arrangements avec répétitions, on parle de *combinaisons avec répétitions.* On désigne par $c^*(n, k)$ le nombre de *combinaisons avec répétitions de n éléments pris k à k.* Soit a_1 un élément de l'ensemble de départ. On note K_1 l'ensemble des combinaisons où a_1 apparaît, $\bar{K}_1$ celui où a_1 n'apparaît pas. En éliminant une fois a_1 des combinaisons de K_1, on voit que K_1 correspond à l'ensemble des combinaisons de n éléments pris $(k-1)$ à $(k-1)$. K_1 a donc $c^*(n, k-1)$ éléments. $\bar{K}_1$ est en revanche l'ensemble des combinaisons avec répétitions de $(n-1)$ éléments pris k à k et a donc $c^*(n-1, k)$ éléments. On obtient ainsi une formule de récurrence :

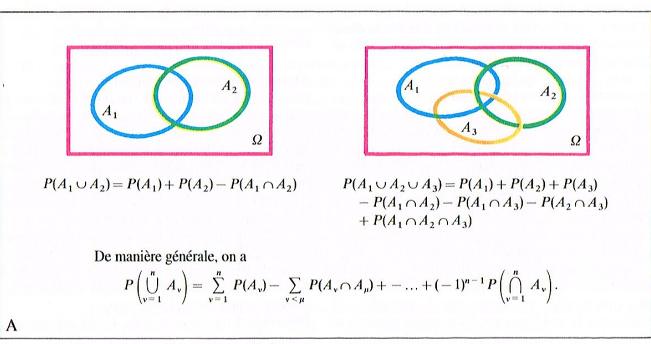
$$c^*(n, k) = c^*(n, k-1) + c^*(n-1, k)$$

on en déduit :

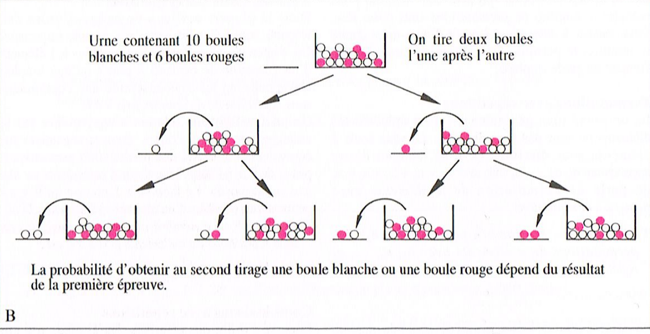
Théorème 6 : *Le nombre $c^*(n, k)$ des combinaisons avec répétitions de n éléments pris k à k est :*

$$c^*(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$$

(voir ex. c) du tab. C).



Réunion d'événements



Probabilités conditionnelles

Déf. : n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits *indépendants*, lorsque pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $m \leq n$, et pour tout sous-ensemble $\{A_{k_1}, \ldots, A_{k_m}\}$ de $\{A_1, \ldots, A_n\}$, on ait $P\left(\bigcap_{\mu=1}^{m} A_{k_\mu}\right) = \prod_{\mu=1}^{m} P\left(A_{k_\mu}\right)$.

L'exemple suivant montre qu'il n'est pas suffisant que les événements soient deux à deux indépendants pour qu'ils soient indépendants dans leur ensemble :

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, $A_3 = \{1, 4\}$.
$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$,
$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3 = \{1\}$,
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4}$.

Comme $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ on en déduit que les événements A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants.

Par contre $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$ et est donc différent de $P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$, donc A_1, A_2, A_3 ne sont pas indépendants.

C

Événements indépendants (voir p. 469)

Le but du calcul des probabilités est d'associer une mesure à certains événements pour caractériser leur fréquence d'apparition au cours d'une épreuve. Son développement a débuté par des considérations sur les jeux de hasard.

Notion d'événement

Pour appliquer les mathématiques à des épreuves aléatoires, il est tout d'abord nécessaire de préciser la notion d'événement. Lorsque l'on jette un dé, le *résultat* de l'épreuve aléatoire est un des éléments de l'espace $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ω est appelé *espace des résultats possibles* d'une épreuve aléatoire. Un événement sera soit le lancer d'un 6, soit le lancer d'un nombre premier, soit le lancer d'un nombre plus grand que 2. Le résultat de l'épreuve doit appartenir dans le premier cas à $A_1 = \{6\}$, dans le second cas à $A_2 = \{2, 3, 5\}$, dans le troisième cas à $A_3 = \{3, 4, 5, 6\}$. Un événement peut donc être décrit comme un sous-ensemble de Ω, et on est alors conduit à dénommer ces sous-ensembles eux-mêmes des *événements*. On dit que l'événement A est réalisé, si le résultat de l'épreuve aléatoire appartient à A. $\varnothing$ est appelé *événement impossible*, car aucun résultat ne lui appartient. L'ensemble Ω est appelé *événement certain*, car tout résultat lui appartient. Lorsque A est un événement, $\Omega \setminus A$ est appelé *événement contraire de* A et est noté $\bar{A}$. Par extension, on peut aussi parler de l'intersection et de la réunion de deux événements. Plus A contient d'éléments de Ω, plus la réalisation de A est « probable ».

Les événements à un élément sont dits *événements élémentaires*. Lorsque ceux-ci sont équiprobables, comme dans le cas d'un dé idéal, et lorsque Ω est fini, il est possible de calculer le quotient du cardinal (p. 35) de A par celui de Ω. On appelle ce quotient la *probabilité de l'événement* A. L'événement impossible a pour probabilité 0, l'événement certain pour probabilité 1.

Soit un ensemble Ω donné. L'ensemble de tous les événements est l'ensemble des parties de Ω noté $\mathfrak{P}(\Omega)$. Muni des lois $\cap$, $\cup$ et formation du complémentaire, $\mathfrak{P}(\Omega)$ constitue un treillis booléen. Lorsque Ω est infini, on utilise généralement des sous-ensembles de parties de Ω, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ présentant des propriétés particulières.

Déf. 1 : Un sous-ensemble $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ est appelé une *tribu sur* Ω lorsque :
(E1) $\varnothing \in \mathfrak{F} \wedge \Omega \in \mathfrak{F}$,
(E2) $A_i \in \mathfrak{F}\,(i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{F} \wedge \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathfrak{F}$, si I est un ensemble d'indices au plus dénombrable (voir les ensembles de Borel p. 359),
(E3) $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{F}$.

Toute tribu est un treillis booléen. La déf. 1 n'impose pas que les ensembles à un élément de $\mathfrak{P}(\Omega)$ appartiennent à $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$ ne contient donc pas nécessairement d'atomes (p. 27).

Déf. 2 : Une *mesure de probabilité* sur une tribu $\mathfrak{F}$ est une fonction $P : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}_0^+$ ayant les propriétés suivantes :
(K1) $P(\Omega) = 1$,
(K2) $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ lorsque les A_i sont disjoints deux à deux, et l'ensemble I au plus démonbrable.
(K1) et (K2) sont appelés *axiomes de* Kolmogoroff.

On déduit de la déf. 2 que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Dans le cas d'un ensemble fini Ω, le quotient du cardinal de A par celui de Ω décrit ci-dessus, et appelé probabilité en calcul classique des probabilités, est une mesure de probabilité. Elle est le quotient du nombre d'événements favorables par le nombre d'événements possibles, lorsque l'on considère que les événements de A sont des événements favorables pour A.

La déf. 2 est par contre plus générale, pouvant être appliquée dans le cas d'événements élémentaires non équiprobables et dans le cas d'une tribu infinie.

Intersection et réunion

Lorsque deux événements A_1 et A_2 de $\mathfrak{F}$ sont *incompatibles*, c'est-à-dire lorsque $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, il résulte de (K2) que $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$. Dans le cas d'événements non incompatibles, on déduit des lois régissant les treillis booléens que :
$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ (représentation à l'aide de diagrammes dans la fig. A).
Ce résultat peut être généralisé à plus de deux événements :

$$P\left(\bigcup_{\nu=1}^{3} A_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{3} P(A_\nu) - \sum_{\nu<\mu} P(A_\nu \cap A_\mu) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$P\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} P(A_\nu) - \sum_{\nu<\mu} P(A_\nu \cap A_\mu) + - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{\nu=1}^{n} A_\nu\right)$$

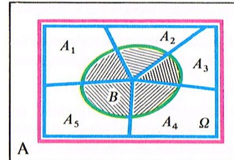
(Formules de Sylvester).
L'intersection d'événements est tout aussi importante.

Probabilités conditionnelles

On considère une urne contenant 10 boules blanches et 6 boules rouges (tab. B) et on tire l'une après l'autre deux boules de cette urne. La probabilité B_1 d'obtenir une boule blanche au premier tirage est $P(B_1) = \frac{10}{16}$, celle d'obtenir une boule rouge est $P(R_1) = \frac{6}{16}$. Lorsque la première boule n'est pas remise dans l'urne après son tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche ou une boule rouge au second tirage (événement B_2 ou R_2) dépend du résultat de la première expérience. On note $P(B \mid A)$ la probabilité de B sous la condition que A ait été réalisé.

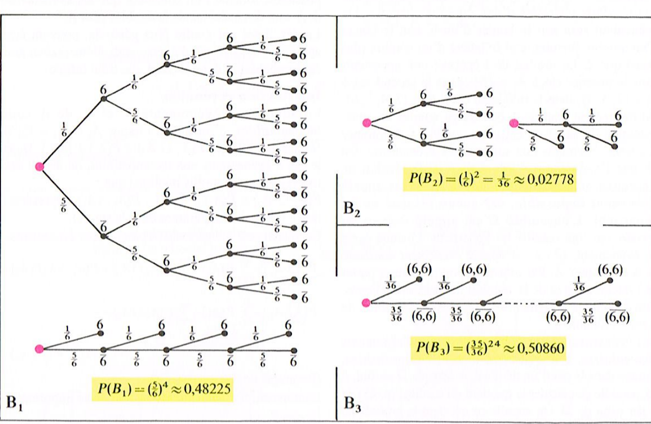
On a donc $P(B_2|B_1) = \frac{9}{15}$, $P(B_2|R_1) = \frac{10}{15}$, $P(R_2|B_1) = \frac{6}{15}$, $P(R_2|R_1) = \frac{5}{15}$.

Il est possible d'obtenir l'égalité $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ lorsque $P(A) \neq 0$ à l'aide de diagrammes en probabilité classique. A partir de cette égalité, il est possible de définir la *probabilité conditionnelle* de manière générale. On en déduit facilement que les propriétés (K1) et (K2) sont aussi valables pour les probabilités conditionnelles.



On définit une mesure de probabilité P sur une tribu.
Soit $\{A_i \mid i \in I\}$ un système exhaustif d'événements.
De $B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$,
on déduit $P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i) P(B \mid A_i)$

Probabilité totale



Arbres et épreuves multiples

Loi faible des grands nombres. Théorème limite.

Soit une suite de variables aléatoires indépendantes X_n définies par une épreuve aléatoire E.
Ex. 1 : E est une suite d'épreuves aléatoires E_k ind. entre elles et X_k est définie par le résultat de E_k.
Ex. 2 : Cas particulier où les E_k sont les répétitions ind. successives d'une même épreuve E_0, d'esp. des résultats Ω, et où X_k prend les valeurs 1 ou 0 selon qu'un événement $A \subseteq \Omega$ est réalisé ou non par E_k.
Ex. 3 : Les E_k sont les répétitions ind. d'une opération de mesure d'une même grandeur et les X_k les valeurs obtenues.

On pose $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dans l'ex. 2, $Y_n = f(A)$ (p. 471) au cours de $E_1, E_2 \ldots E_n$. Si $\forall k\ E(X_k) = m \wedge \sigma(X_k) = s$, s fini, on a la *loi faible des grands nombres* due à J. BERNOULLI : $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \to \infty} P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) = 0$. Elle résulte de l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV : $V(Z) = \sigma(Z)^2 \geq P(|Z - E(Z)| \geq \varepsilon)\, \varepsilon^2$, qui entraîne
$P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{s^2}{\varepsilon^2 n}$ car $E(Y_n) = m$, et $\sigma(Y_n) = \frac{s}{\sqrt{n}}$ (les X_k sont ind.). Si dans l'ex. 2, $P(A) = 0{,}5$ alors, $m = 0{,}5$ et $s = 0{,}5$; il suffit que l'on ait $n \geq 25 \times 10^6$ pour que $P(|Y_n - 0{,}5| \geq 0{,}01) \leq 10^{-4}$.
La *loi forte des grands nombres*, due à KOLMOGOROV, énonce que, sous les mêmes hyp., $P(\lim_{n \to \infty} Y_n = m) = 1$.
Si, de plus, les X_k ont même fonction de répartition et un écart-type fini on a le *théorème limite* suivant :

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\alpha < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{s\sqrt{n}} < \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

. Cette propriété a été établie par GAUSS dans sa théorie des erreurs de mesure (*Ex.* 3). L'approximation de la répartion binomiale par la répartition normale (p. 473) en est un cas particulier (*Ex.* 2). Le th. limite est vrai sous des hyp. plus gén., sans même supposer que les répartitions sont les mêmes, ce qui montre le rôle universel de la répartition normale.

Événements indépendants

Lorsque, dans l'exemple de l'urne de la p. 467, la première boule est replacée dans l'urne avant le tirage de la seconde, le résultat de la seconde épreuve est indépendant du résultat de la première.
On dit que deux événements A_1 et A_2 sont *indépendants* lorsque $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2)$. Dans ce cas, on a aussi :
$P(A_1 \mid A_2) = P(A_1)$ et $P(A_2 \mid A_1) = P(A_2)$.
Le tab. C de la p. 466 généralise la notion d'indépendance.

Probabilité totale

Considérons un système exhaustif d'événements, c'est-à-dire un ensemble au plus dénombrable $\{A_1, A_2, \ldots\}$ d'événements deux à deux incompatibles, tel que $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$. La probabilité d'un événement quelconque B peut alors être calculée à partir des probabilités conditionnelles $P(B \mid A_i)$. On a

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i) P(B \mid A_i) \qquad \text{(fig. A).}$$

$P(B)$ est la probabilité de B indépendamment de la réalisation d'un quelconque A_i. Pour souligner la différence avec la notion de probabilité conditionnelle, on parle de *probabilité totale* de B.
On déduit de la formule précédente le
Théorème de BAYES : *Si* $\{B_1, B_2, \ldots\}$ *est un système exhaustif d'événements, on a :*

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) P(A \mid B_i)}{\sum_{j \in I} P(B_j) P(A \mid B_j)} .$$

Ce théorème permet donc de ramener le calcul de la probabilité de B_i conditionnelle en A aux calculs des probabilités totales des B_j et des probabilités de A conditionnelles en les B_j.

Arbres, épreuves successives

Pour déterminer des propriétés générales du calcul des probabilités, les diagrammes d'ensembles du type de ceux de la fig. A sont d'une grande utilité. Par contre, pour des problèmes concrets, en particulier ceux faisant intervenir des probabilités conditionnelles au cours d'*épreuves successives*, il est parfois plus clair d'utiliser des *arbres* (p. 463). On trace depuis un nœud initial les chemins qui mènent aux résultats possibles deux à deux incompatibles de la première épreuve et on les affecte de leurs probabilités respectives. De là, on continue à tracer les chemins vers les résultats de l'épreuve suivante. Tout chemin allant du nœud initial à un nœud terminal correspond à un résultat de l'épreuve multiple. Les formules des probabilités conditionnelles et totales permettent alors de déduire :
La probabilité pour qu'un certain chemin soit suivi au cours d'une épreuve multiple est le produit des probabilités le long de ce chemin. Lorsque plusieurs chemins appartiennent à un même événement, la probabilité totale de cet événement est la somme des probabilités de chacun des chemins.

Exemples :
a) On cherche à déterminer la probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de 4 lancers successifs d'un même dé (événement B_1). Si on voulait représenter tous les résultats possibles de l'épreuve à l'aide d'un arbre, celui-ci aurait 6^4 nœuds terminaux. Pour simplifier, on ne considère donc que les cas 6 et $\overline{6}$ (non 6), c'est-à-dire le système exhaustif d'événements $\{\{6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$. On obtient alors les deux premiers arbres du tab. B_1. Du fait que seul le cas 6 présente un intérêt, il est possible de simplifier encore l'arbre en éliminant les chemins inintéressants (tab. B_1, arbre inférieur).
b) On cherche à déterminer la probabilité d'obtenir un double six lors du lancer de deux dés (événement B_2). On décompose l'épreuve en deux niveaux correspondant chacun au lancer d'un dé. On obtient alors l'arbre du tab. B_2.
c) On cherche à déterminer la probabilité de ne pas obtenir de double six au cours de 24 lancers de deux dés (événement B_3). Le tab. B_3 présente un arbre simplifié utilisant les résultats de l'exemple b).
d) Une urne contient 7 boules noires, 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire 4 boules en même temps. La probabilité d'obtenir au moins une boule de chaque couleur (événement B_4) donne un arbre à 24 cas $P(B_4) = \frac{21}{55} \approx 0{,}38182$.

Probabilité et analyse combinatoire

Les arbres sont souvent trop compliqués pour pouvoir représenter l'ensemble des cas. Il est alors souvent possible d'utiliser les résultats de l'analyse combinatoire.

Exemples :
e) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 bons numéros au tirage du loto ? (événement B_5)
On utilise les résultats du tab. C p. 464. Le nombre de cas possibles est $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$, le nombre de cas favorables est $1 + \binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} + \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13\,804$.

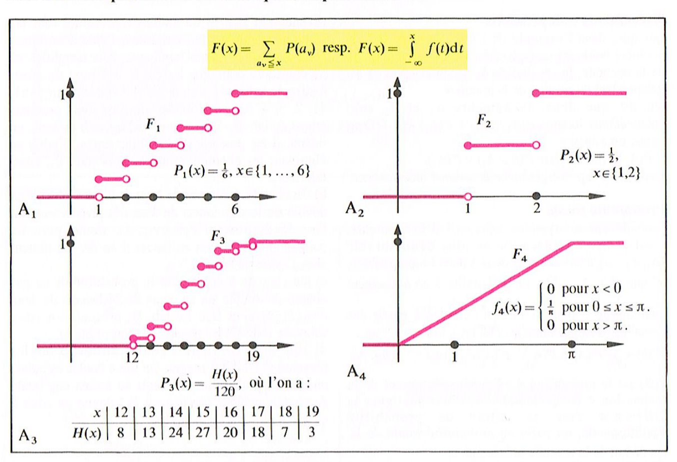
Donc, $P(B_5) = \frac{13\,804}{13\,983\,816} \approx 0{,}000987$.

f) Quelle est la probabilité pour que l'un des joueurs ait les quatre valets au cours de la distribution des cartes à la belote ? (événement B_6).
Le tab. C a) de la p. 464 nous donne ici le résultat :

$$P(B_6) = \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}} = \frac{20\,475}{10\,518\,300} \approx 0{,}001947 .$$

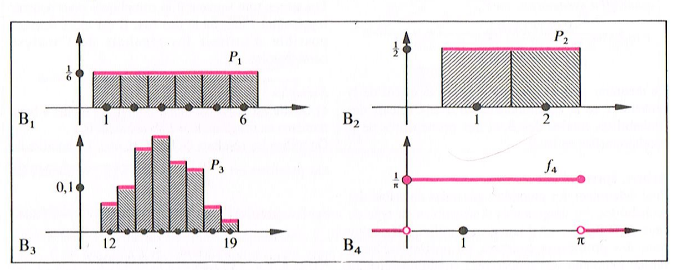
g) Quelle est la probabilité pour que dans un groupe de 10 personnes, deux d'entre elles au moins fêtent leur anniversaire le même jour ? (événement B_7. Tous les jours de l'année sont supposés équiprobables, le 29 février est exclu du calcul par simplification.)
L'événement contraire a $a^*(365,10)$ cas possibles et $a(365,10)$ cas favorables. D'où :

$$P(B_7) = 1 - \frac{365!}{355!\, 365^{10}} \approx 0{,}11695 .$$



x	12	13	14	15	16	17	18	19
$H(x)$	8	13	24	27	20	18	7	3

Fonction de répartition



Répartition, densité

$$\mu = E(X) \qquad \sigma^2 = E((X-\mu)^2)$$

Dans le cas des exemples précédents, on obtient :

$$\mu_1 = \sum_{\nu=1}^{6} \nu \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5\,; \qquad \sigma_1^2 = \sum_{\nu=1}^{6} (\nu - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = 2{,}917\,; \quad \sigma_1 = 1{,}708\,.$$

$$\mu_2 = \sum_{\nu=1}^{2} \nu \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5\,; \qquad \sigma_2^2 = \sum_{\nu=1}^{2} (\nu - 1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}25\,; \quad \sigma_2 = 0{,}5\,.$$

$$\mu_3 = \sum a_\nu P_3(a_\nu) = 15{,}125\,; \quad \sigma_3^2 = \sum (a_\nu - \mu)^2 P_3(a_\nu) = 2{,}9094\,; \quad \sigma_3 = 1{,}7057\,.$$

$$\mu_4 = \int_0^\pi t \cdot \frac{1}{\pi}\,dt = \frac{\pi}{2}\,; \qquad \sigma_4^2 = \int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi}\,dt = \frac{\pi^2}{12}\,; \quad \sigma_4 = 0{,}9069\,.$$

On a : $\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$.

Lorsque μ et σ^2 sont à déterminer à partir de n valeurs a_ν d'un ensemble de mesures, on a :

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\,; \quad \sigma^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^2\right).$$

C

Espérance mathématique, variance, écart-type

Fréquence relative

Lorsque l'on répète une épreuve n fois sous les mêmes conditions, on appelle le nombre de résultats où apparaît l'événement A, *la fréquence absolue* $F(A)$ de A, et le quotient $\frac{F(A)}{n}$ *la fréquence relative* $f(A)$. Cette déf. est donc analogue à celle des probabilités classiques. Lorsque n croît, $f(A)$ se « rapproche » de la probabilité $P(A)$. Néanmoins, il y a ici une différence de taille par rapport à la convergence d'une suite réelle (voir déf. 3 p. 277). Il n'est pas possible de déterminer pour un ε donné un rang N à partir duquel la différence entre probabilité et fréquence relative est inférieure à ε de façon certaine. Seuls des écarts importants deviennent de moins en moins probables (*loi des grands nombres*, voir page 468).

Variable aléatoire

Pour pouvoir associer la notion d'espérance mathématique à une épreuve, ainsi que pour pouvoir déterminer mathématiquement l'importance et la fréquence des écarts obtenus, on définit tout d'abord les *variables aléatoires*.

Déf. 1 : Soit Ω un ensemble de résultats possibles. L'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ s'appelle *variable aléatoire* de la tribu $\mathfrak{F}$ sur Ω, si l'antécédent par X de tout réel et de tout intervalle de $\mathbb{R}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

L'ensemble antécédent $\{\omega \mid X(\omega) = a\}$ est également noté de manière simplifiée $X = a$. De même, $\{\omega \mid X(\omega) \leq a\}$ est noté par $X \leq a$. $X = a$ et $X \leq a$ sont donc aussi des événements.

Exemples :

Le résultat d'un lancer de dé est une variable aléatoire X_1.

Soit un lancer de pièce ayant pour résultats possibles « pile » (p) et « face » (f). L'application X_2 définie par

$$X_2(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega = p \\ 2 \text{ si } \omega = f \end{cases} \quad \text{est une variable aléatoire.}$$

Lorsque l'on mesure la taille des individus d'un groupe de personnes, la valeur arrondie au décimètre du résultat de la mesure définit une variable aléatoire X_3.

La mesure de l'angle α entre les aiguilles d'une horloge pour une heure quelconque ($0 \leq \alpha \leq \pi$) définit une variable aléatoire X_4.

Déf. 2 : Une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs prises dans un segment quelconque est fini est dite *discrète*.

C'est le cas pour X_1, X_2, X_3 dans les exemples précédents.

Fonction de répartition

Déf. 3 : Soit X une variable aléatoire et P une mesure de probabilité. La fonction $F : \mathbb{R} \to [0\,;\,1]$ définie par $x \mapsto F(x) = P(X \leq x)$ est appelée *fonction de répartition de X*.

On peut déduire des propriétés de P que les fonctions de répartition sont monotones croissantes et continues à droite en tout point (fig. A).

Soit une variable aléatoire discrète X prenant les valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $F(x)$ est alors la somme des $P(X = a_\nu)$ avec $a_\nu \leq x$. Les valeurs $P(a_\nu) := P(X = a_\nu)$ peuvent être représentées sous forme d'un tableau (voir tab. A_3). F est alors une fonction en escalier.

Il est aussi possible de se représenter P sous forme d'*histogrammes* lorsque X est une variable aléatoire discrète et lorsque les a_ν n'ont pas de point d'accumulation (voir fig. B_1 à B_3 pour la représentation en histogramme des exemples du tab. A). La fonction $a_\nu \mapsto P(a_\nu)$ définissant l'histogramme est appelée *fonction de probabilité*.

S'il est possible de mettre une fonction de répartition sous la forme $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, f étant une fonction positive telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, on dit que f est la *densité de probabilité* de la variable aléatoire X.

Déf. 4 : Si une variable aléatoire X admet une densité de probabilité, on dit que la loi de probabilité de X est *absolument continue* (fig. A_4 et B_4).

Espérance mathématique, variance, écart-type

Une variable aléatoire est totalement déterminée soit par sa fonction de répartition, soit par sa densité ou encore par sa fonction de probabilité. En statistiques, on se contente généralement de certaines valeurs caractéristiques qui ne décrivent pas entièrement la variable aléatoire mais qui sont en général suffisantes. On doit être alors parfaitement conscient de perdre en précision certaines informations. La valeur caractéristique la plus importante est l'espérance mathématique.

Déf. 5 : L'*espérance mathématique* $E(X)$ d'une variable aléatoire X, appelée également *moyenne* μ, est, si elle existe, dans le cas discret la valeur $\sum_\nu a_\nu P(a_\nu)$ (la somme portant sur un nombre fini ou infini de ν), et dans le cas absolument continu $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$, où f est la fonction densité associée à X.

Les écarts à la moyenne, voire d'autres écarts particulièrement importants, sont introduits par l'espérance mathématique de $(X - \mu)^2$.

Déf. 6 : La *variance* $V(X)$ d'une variable aléatoire X est, si elle existe, l'espérance mathématique $E((X - \mu)^2)$. La valeur $\sigma := \sqrt{V(X)}$ est appelée *écart-type*.

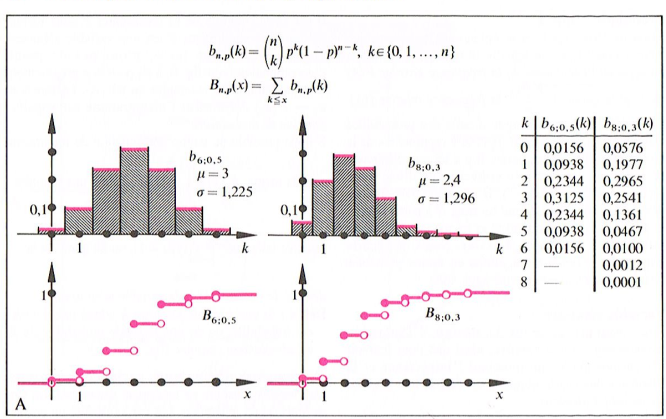
Lorsque X est discrète, $\sigma^2 = \sum_\nu (a_\nu - \mu)^2 P(a_\nu)$,

et lorsque la loi de probabilité est absolument continue,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu)^2 f(t)\,dt\,.$$

Dans le tab. C sont calculés l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type des exemples des fig. A et B.

Rem. : L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X n'appartient pas obligatoirement aux valeurs possibles de X. Ainsi, l'espérance mathématique des valeurs prises par un dé idéal est 3,5 alors que le dé ne peut faire apparaître que des valeurs entières.



k	$b_{6;0,5}(k)$	$b_{8;0,3}(k)$
0	0,0156	0,0576
1	0,0938	0,1977
2	0,2344	0,2965
3	0,3125	0,2541
4	0,2344	0,1361
5	0,0938	0,0467
6	0,0156	0,0100
7	—	0,0012
8	—	0,0001

Répartition binomiale

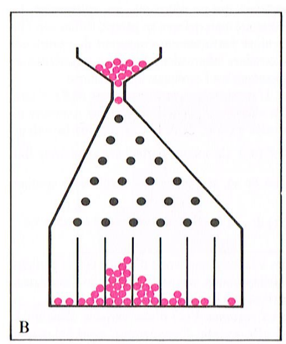
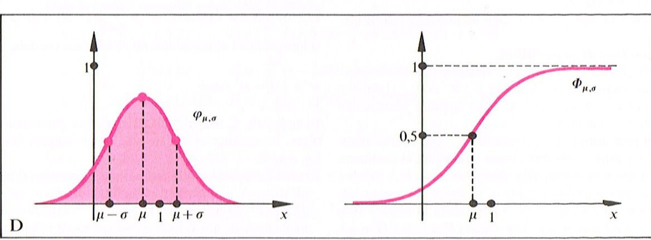


Planche de GALTON

$$\psi_\mu(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!},\ k \in \mathbb{N}$$

Répartition de POISSON



Répartition normale

Sous certaines hypothèses, les variables aléatoires ont des fonctions de répartition et de densité remarquables.

Répartition binomiale

Il s'agit d'une épreuve avec exactement deux résultats possibles A et $\bar{A}$, de probabilités respectives p et $1-p$. On renouvelle cette épreuve n fois sous les mêmes conditions (Ω est alors l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\{A, \bar{A}\}$). On cherche à déterminer la probabilité pour que A apparaisse k fois.

Soit la variable aléatoire S_n définie sur Ω par $s_n(\omega) = k$ si et seulement si A apparaît k fois, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, dans le n-uplet ω. A l'événement $s_n = k$ sont associés $\binom{n}{k}$ n-uplets, chacun ayant la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ (déterminé par ex. à l'aide d'un arbre). On en déduit que la probabilité

$b_{n,p}(k) = P(S_n = k)$ a pour valeur :

$$b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

(répartition binomiale).

La fonction de répartition associée B_{np} est alors définie par :

$$B_{np}(x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Le tab. A contient des histogrammes pour certaines valeurs de p et n. Expérimentalement, il est possible d'obtenir ces histogrammes à l'aide d'une *planche de* GALTON : sur une planche inclinée sont placées n rangées de clous. On y fait rouler des billes vers le bas. Chaque bille rencontre un clou de chaque rangée, et a la probabilité p de continuer sur la gauche et $1-p$ de continuer sur la droite. Les billes sont ensuites récupérées dans $n+1$ compartiments numérotés de 0 à n. $b_{n,p}(k)$ est la probabilité pour qu'une bille arrive dans le compartiment k (fig. B).

L'espérance mathématique d'une répartition binomiale est calculée à l'aide des formules du binôme (p. 300) :

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$
$$= np(p + (1-p))^{n-1} = np.$$

La variance se calcule de manière analogue et est égale à :

$\sigma^2 = np(1-p)$, d'où l'écart-type :

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Répartition de POISSON

Lorsque n est grand ($n \geq 10$) et p petit (événements rares), la répartition binomiale devient peu aisée à manier, et on a tendance à remplacer $b_{n,p}(k)$ par $\lim_{n \to +\infty} b_{n,p}(k)$ en supposant $p = p(n)$.

Lorsque $\mu = np$ est constant, on a alors :

$$\lim_{n \to +\infty} b_{n,p}(k) = \lim_{n \to +\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{\mu^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\mu^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$$
$$\cdot \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k}\right]$$

Le terme entre crochets a pour limite 1, $\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$ a pour limite $e^{-\mu}$, d'où :

$$\lim_{n \to +\infty} b_{n,p}(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

La répartition définie par $\psi_\mu(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$ s'appelle *répartition de* POISSON. La fonction de répartition Ψ_μ associée est :

$$\Psi_\mu(x) = \sum_{k \leq x} \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}.$$

Le tab. C illustre par des histogrammes et des graphes les fonctions de répartition de POISSON pour $\mu = 4$ et $\mu = 6$. L'histogramme est presque symétrique pour des valeurs élevées de μ.

On déduit des formules du binôme que la variance d'une répartition de POISSON est égale à l'espérance mathématique μ. L'écart-type est alors égal à $\sqrt{\mu}$.

Répartition normale

Ici on fait encore tendre n vers l'infini, mais on introduit la fonction de probabilité discrète définie par $\varphi_{n,p}(x) = \sigma\, b_{n,p}(k)$, pour $x = \frac{k - np}{\sigma}$.

Par substitution et transformation, on en déduit :

$$\frac{\varphi_{n,p}(x) - \varphi_{n,p}\left(x - \frac{1}{\sigma}\right)}{\frac{1}{\sigma}} = \frac{\left(\frac{p}{\sigma} - x\right) \cdot \varphi_{n,p}\left(x - \frac{1}{\sigma}\right)}{1 + \frac{1-p}{\sigma} x}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{1}{\sigma}$, $\frac{p}{\sigma}$ et $\frac{1-p}{\sigma}$ tendent vers 0. La fonction limite φ vérifie alors :

$$\varphi'(x) = -x\varphi(x).$$

Cette équation différentielle linéaire homogène de degré 1 a pour solution (voir p. 377) :

$$\varphi(x) = K e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ doit être égal à 1, $K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

La densité φ est appelée *répartition normale centrée*. Il lui correspond la fonction de la répartition ϕ définie par :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \quad \text{(fonction de GAUSS).}$$

L'espérance mathématique d'une répartition normale centrée est égale à 0, son écart-type à 1. Pour des valeurs quelconques de μ et de σ, on définit *la répartition normale généralisée* $\varphi_{\mu,\sigma}$ par :

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{(fig. D).}$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,0	0,3989	0,5000
0,1	0,3970	0,5398
0,2	0,3910	0,5793
0,3	0,3814	0,6179
0,4	0,3683	0,6554
0,5	0,3521	0,6915
1,0	0,2420	0,8413
1,5	0,1295	0,9332
2,0	0,0540	0,9772

a	$\int_{\mu-a}^{\mu+a} \varphi_{\mu,\sigma}(t)\mathrm{d}t$
σ	0,6827
2σ	0,9545
3σ	0,9973
$1{,}64\sigma$	0,90
$1{,}96\sigma$	0,95
$2{,}58\sigma$	0,99
$3{,}29\sigma$	0,999

A

Tableaux de répartition normale

$k-1$ \ α	0,99	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,01
1	0,00016	0,0039	0,016	0,455	2,71	3,84	6,64
2	0,00201	0,103	0,211	1,39	4,61	5,99	9,21
3	0,115	0,352	0,584	2,37	6,25	7,81	11,3
4	0,297	0,711	1,06	3,36	7,78	9,49	13,3
5	0,554	1,15	1,61	4,35	9,24	11,1	15,1
10	2,56	3,94	4,87	9,34	16,0	18,3	23,2
15	5,23	7,26	8,55	14,3	22,3	25,0	30,6
20	8,26	10,9	12,4	19,3	28,4	31,4	37,6
25	11,5	14,6	16,5	24,3	34,4	37,7	44,3

k-1 : degrés de liberté α : seuil de tolérance

La probabilité pour que l'on ait $\chi^2_{k-1} > \chi^2_{k-1,\alpha}$, sous la condition que la répartition soit celle intervenant dans le test, est proche de α.

B

Valeurs de $\chi^2_{k-1,\alpha}$ pour le test du χ^2

Un client d'une boulangerie qui lui livre tous les jours du pain se plaint que de nombreux petits pains n'aient pas le poids requis de 50 g. Il décide de peser tous les petits pains dans l'avenir. Il espère obtenir une répartition normale. Pour $n = 1200$, il obtient les valeurs suivantes :

Classe n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Poids en g	45/46	46/47	47/48	48/49	49/50	50/51	51/52	52/53	53/54	54/55	55/56	56/57
valeur médiane de la classe	45,5	46,5	47,5	48,5	49,5	50,5	51,5	52,5	53,5	54,5	55,5	56,5
n_ν	1	2	56	93	172	364	273	150	60	21	5	3

On calcule à partir des valeurs du tableau : $\mu = 50{,}784$, $\sigma = 1{,}579$.

Dans le cas d'une répartition normale avec les valeurs précédentes de μ et σ, on doit s'attendre aux valeurs suivantes :

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n\varphi(x_\nu)$	1,4	8,5	36,7	108,4	216,6	293,6	270,0	168,4	71,2	20,6	4,0	0,6

Comme $n\,\varphi(x_\nu)$ ne doit pas être inférieur à 1, on rassemble les classes 11 et 12.

On en déduit :

$$\chi^2_{10} = \sum_{\nu=1}^{11} \frac{(n_\nu - n\varphi(x_\nu))^2}{n\varphi(x_\nu)} = 49{,}813$$

Comme $\chi^2_{10} > \chi^2_{10\,;\,0{,}01}$, l'hypothèse d'avoir affaire à une répartition normale est à rejeter. La probabilité d'erreur est inférieure à 1%. La suspicion que le boulanger ait trié ses pains avant de les livrer au client pour éviter des plaintes futures et non qu'il ait amélioré la qualité de ses pains, est donc fondée.

C

Exemple de test du χ^2

Population et échantillon

Le calcul des probabilités est utilisé en statistiques, par exemple pour contrôler des tests de qualité, pour élaborer les commandes des processus industriels, pour déterminer les tables de mortalité des compagnies d'assurance, pour définir un lien entre diverses grandeurs.

Il n'est pas possible en général d'utiliser tous les éléments de l'ensemble étudié (*population*) pour déterminer la répartition des variables aléatoires à l'aide des fréquences relatives. La population est en général trop vaste et ne permet pas de cerner les problèmes. Il est évidemment hors de question de casser tous les exemplaires d'un article pour déterminer sa résistance. Il faut se limiter à un échantillon.

Lorsque l'on calcule les fréquences relatives des éléments de l'échantillon, on ne peut pas être certain qu'il y ait coïncidence entre les répartitions des variables aléatoires d'une part de l'échantillon, d'autre part de la population, ni égalité de leurs espérances mathématiques et de leurs variances. La moyenne arithmétique $\overline{x}$ de l'échantillon fournit une *approximation* de l'espérance mathématique μ de la population lorsque la taille n de la population n'est pas trop petite. La variance de la variable aléatoire restreinte à l'échantillon se comporte de manière un peu différente. Sa valeur espérée n'est pas σ^2 mais plutôt $\frac{n-1}{n}\sigma^2$, ce qui explique que l'on considère comme valeur approchée pour σ^2 le terme :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2;$$

s^2 est aussi appelée de manière incorrecte la *variance de l'échantillon.*

Tests d'hypothèses

Lorsque, dans des échantillons, apparaissent des écarts entre les valeurs réelles et les valeurs espérées, ceux-ci peuvent être dus au hasard, mais il se peut aussi que l'échantillon n'ait été constitué que d'hommes, que de membres d'une certaine catégorie de la population, que d'articles fabriqués uniquement le lundi, etc. On émet alors l'hypothèse h que l'écart n'est pas dû au hasard. Il faut alors vérifier la fiabilité d'une telle hypothèse.

Les tableaux A décrivent une répartition normale et seront utilisés par la suite. On remarque que l'on peut s'attendre à des écarts par rapport à la moyenne d'une valeur supérieure à l'écart-type avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. On peut encore considérer un tel écart comme dû au hasard. Par contre, des écarts supérieurs à $1{,}96\,\sigma$ ($2{,}58\,\sigma$) ont une probabilité inférieure à 5 % (1 %). L'hypothèse précédente h est alors valable avec un *écart-seuil significatif* inférieur à 5 % (1 %). Lorsque σ est inconnu, on utilise la valeur s calculée à partir de l'échantillon.

Lorsque l'on choisit un *seuil de tolérance* α et que l'on considère l'hypothèse comme valable, la *probabilité d'une erreur* est inférieure à α. $1-\alpha$ est appelé seuil de confiance statistique. Généralement, on impose $1-\alpha = 95$ %, voire égal à 99 % ou 99,5 %.

Test du χ^2

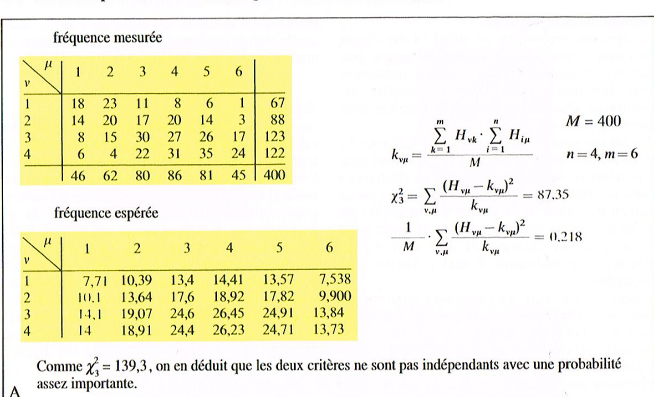
On vient de voir comment on pouvait comparer des valeurs moyennes de populations et d'échantillons, et apprécier certains écarts. On peut également chercher à déterminer la nature d'une répartition, c'est-à-dire savoir si elle correspond à une répartition normale ou à une autre répartition connue. Le test du χ^2 (prononcer *test du ki deux*) fournit une méthode fiable de résolution d'un tel problème. La répartition peut être choisie continue ou discrète. Dans le cas continu, il faut néanmoins faire une partition de l'espace des résultats. Le nombre k de classes est généralement choisi entre 6 et 20. On calcule alors les fréquences n_ν, ($\nu \in \{1, \ldots, k\}$) des valeurs de l'échantillon dans chacune des classes. Dans le cas discret, $n_\nu = H(x_\nu)$ est la fréquence d'apparition de x_ν. On calcule alors la valeur test :

$$\chi^2_{k-1} = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(n_\nu - np_\nu)^2}{np_\nu}.$$

n est le nombre d'échantillons et p_ν la fréquence théorique espérée. $k-1$ est appelé le *degré de liberté* de la répartition. On compare alors χ^2_{k-1} avec une valeur $\chi^2_{k-1,\alpha}$ issue d'un tableau, α étant le seuil de tolérance (tab. B). Si $\chi^2_{k-1} > \chi^2_{k-1,\alpha}$ et si n n'est pas trop petit, alors l'hypothèse d'avoir effectivement affaire à la répartition théorique voulue est à rejeter avec une probabilité d'erreur d'au plus α.

Exemple :

On lance 300 fois un dé. Les faces 1, 2, 3, 4, 5, 6 apparaissent avec les fréquences respectives 54, 49, 57, 51, 47, 42. Le nombre de degrés de liberté est égal à 5. Dans le cas d'un dé idéal, $n \cdot p_\nu = 50$ pour tous les ν. On obtient $\chi^2_5 = 2{,}8$ tandis que $\chi^2_{5\,;\,0{,}05} \approx 11{,}1$ et que $\chi^2_{5\,;\,0{,}7} \approx 2{,}8$. Dans environ 70 % des séries de 300 lancers d'un dé idéal, on peut s'attendre à obtenir des écarts du même ordre de grandeur. Par contre, avec 3 000 lancers, toutes les fréquences étant multipliées par 10, on aurait $\chi^2_5 = 28$. Or $\chi^2_{5\,;\,0{,}01} \approx 15{,}1$. Des écarts d'un tel ordre de grandeur ne sont à envisager que dans bien moins de 1 % des cas. Le dé serait vraisemblablement construit de manière irrégulière. On remarque ainsi que le test fournit des résultats quasi exacts pour des valeurs élevées de n. Une valeur très faible de χ^2_{k-1} est généralement tout aussi suspecte. Si dans le premier cas, toutes les fréquences avaient été de 50, c'est-à-dire $\chi^2_5 = 0$, on aurait pu penser que les valeurs avaient été corrigées. Dans plus de 99 % des cas, pour 300 lancers, on doit s'attendre à une valeur de χ^2_5 supérieure à 0,554. Le calcul des valeurs théoriques du tab. B est très long. Il se fait en pratique à l'aide de *répartitions polynomiales*, une généralisation des répartitions binomiales. Le tab. C illustre un autre exemple de test du χ^2.



fréquence mesurée

ν \ μ	1	2	3	4	5	6	
1	18	23	11	8	6	1	67
2	14	20	17	20	14	3	88
3	8	15	30	27	26	17	123
4	6	4	22	31	35	24	122
	46	62	80	86	81	45	400

$$k_{\nu\mu} = \frac{\sum_{k=1}^{m} H_{\nu k} \cdot \sum_{i=1}^{n} H_{i\mu}}{M} \qquad M = 400 \qquad n = 4, m = 6$$

$$\chi_3^2 = \sum_{\nu,\mu} \frac{(H_{\nu\mu} - k_{\nu\mu})^2}{k_{\nu\mu}} = 87{,}35$$

$$\frac{1}{M} \cdot \sum_{\nu,\mu} \frac{(H_{\nu\mu} - k_{\nu\mu})^2}{k_{\nu\mu}} = 0{,}218$$

fréquence espérée

ν \ μ	1	2	3	4	5	6
1	7,71	10,39	13,4	14,41	13,57	7,538
2	10,1	13,64	17,6	18,92	17,82	9,900
3	14,1	19,07	24,6	26,45	24,91	13,84
4	14	18,91	24,4	26,23	24,71	13,73

Comme $\chi_3^2 = 139{,}3$, on en déduit que les deux critères ne sont pas indépendants avec une probabilité assez importante.

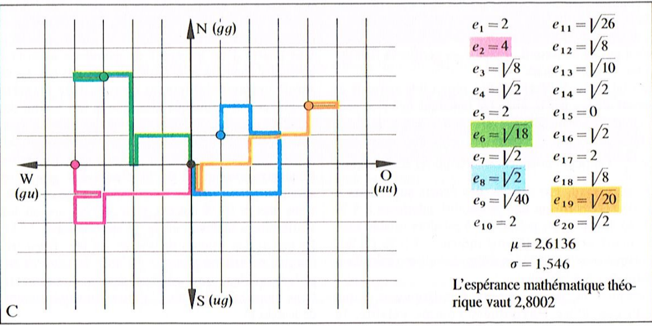
A

Dépendance de deux critères

3541	5541	0517	9314	3100	9063	4741	9801	8495	4948
7138	0001	9574	5176	1567	2506	4237	5654	0522	6973
6221	2465	9062	3271	0750	6225	8376	2844	4009	8539
9841	9888	6894	4550	2071	3611	3171	0096	2926	8536
0509	7225	7620	8909	9489	9131	0792	9413	7409	2443
1825	3729	9478	6998	7598	4892	9262	4907	6990	9710
0877	5619	1871	5432	2507	6090	9268	7786	5213	4465
1063	0177	5324	3899	6605	3614	1122	4304	7904	6016
8759	6654	0469	4486	3097	0562	9535	8713	4144	1331
5262	5371	4419	7988	1561	4694	4677	6992	1254	6863

B

Tableau contenant 100 nombres aléatoires à 4 chiffres



Exemple de la méthode de Monte-Carlo

Dépendance de deux critères

Lorsque l'on cherche à déterminer l'influence de deux critères sur une population, on note souvent les résultats dans une matrice, les lignes dépendant du premier critère, les colonnes du second. On peut ainsi chercher à caractériser un groupe de personnes par la taille et la pointure des chaussures, ou par le poids et la prédisposition à certaines maladies. On peut alors s'intéresser à la dépendance des deux critères.

La méthode consiste à calculer la matrice des fréquences ($H_{\nu\mu}$) (voir tab. A). $H_{\nu\mu}$ est la fréquence avec laquelle les valeurs x_ν et y_μ des variables aléatoires apparaissent de manière simultanée. Les sommes des lignes $\sum_{k=1}^{m} H_{\nu k}$ ainsi que celles des colonnes $\sum_{i=1}^{n} H_{i\mu}$ s'appellent *répartitions de bord.*

Avec ces valeurs, on construit une nouvelle matrice $k_{\nu\mu}$ définie par $k_{\nu\mu} = \frac{\sum_{k=1}^{m} H_{\nu k} \cdot \sum_{i=1}^{n} H_{i\mu}}{M}$, où M est la taille de la population. Cette matrice donne la fréquence à attendre lorsque les deux critères sont indépendants. De manière analogue au test du χ^2, on calcule :

$$\sum_{\nu,\mu} \frac{(H_{\nu\mu} - k_{\nu\mu})^2}{k_{\nu\mu}}$$

En divisant cette valeur par M, on obtient la *contingence quadratique moyenne*. Pour pouvoir utiliser les tableaux du χ^2, il faut encore déterminer le nombre de degrés de liberté. Il est inférieur de 1 au plus petit des nombres m et n. Lorsque les critères ne sont pas uniquement qualitatifs (comme le sexe, la situation de famille, la prédisposition à une maladie, une performance), mais aussi quantitatifs (ex. taille, âge, temps de demi-vie), il est possible de représenter les résultats de la mesure dans un système d'axes, certains points devant éventuellement être comptés plusieurs fois. La régularité du *nuage de points* permet souvent de discerner s'il existe une dépendance ou non. Le *coefficient de corrélation linéaire* r permet de conclure si la dépendance est affine : $y = \alpha_1 + \alpha_2 x$, resp. $x = \beta_1 + \beta_2 y$. On note μ_x, μ_y, μ_{xy}, μ_{x^2}, μ_{y^2}, les valeurs moyennes respectives de x, y, xy, x^2, y^2. La méthode des moindres carrés (pp. 312, 313) montre que

$$\alpha_1 = \frac{\mu_{x^2}\mu_y - \mu_x \mu_{xy}}{\sigma_x^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\mu_{xy} - \mu_x \mu_y}{\sigma_x^2},$$

β_1 et β_2 s'obtenant en échangeant x et y. On pose $r := \frac{\mu_{xy} - \mu_x \mu_y}{\sigma_x \sigma_y}$; on a donc r, α_2, β_2 de même signe et $r^2 = \alpha_2 \beta_2$. On peut prouver que $r^2 \leq 1$, l'égalité n'étant obtenue que si les points sont alignés, les deux droites D' et D'', $y = \alpha_1 + \alpha_2 x$ et $x = \beta_1 + \beta_2 y$, dites de *régression*, étant alors confondues. La corrélation est d'autant meilleure que $|r|$ est élevé. D' et D'' passent par le point (μ_x, μ_y) et font entre elles un angle d'autant plus faible que $|r|$ est voisin de 1.

En remarquant que $r = \frac{\alpha_2 \sigma_x}{\sigma_y}$, on déduit de l'exemple de la p. 312 les valeurs $\alpha_2 = 0{,}430\,2$, $\sigma_x = 3{,}091$, $\sigma_y = 1{,}572$, et finalement $r = 0{,}845\,9$. La corrélation est bonne.

Rem. : Il y a toutes sortes d'autres fonctions de répartition et de tests pour aborder les problèmes statistiques.

Nombres aléatoires, méthode de Monte-Carlo

Certains problèmes statistiques sont d'une telle complexité de calculs qu'il faut les simplifier en faisant intervenir des nombres aléatoires. Il existe toutes sortes de tableaux ayant jusqu'à 10^6 nombres aléatoires obtenus expérimentalement ou par ordinateur. Le tab. B propose 100 nombres aléatoires à 4 chiffres fournis par un ordinateur.

Exemple :

a) On cherche à étudier le chemin d'un homme ivre dans un réseau de rues en quadrillage. L'homme choisit à chaque carrefour l'une quelconque des quatre directions possibles. On demande l'espérance mathématique de la distance du point final au point initial après 10 parcours entre deux carrefours consécutifs. On simule le chemin à l'aide de nombres aléatoires à deux chiffres. Suivant la parité des chiffres, on obtient quatre types de nombres associés aux quatre points cardinaux : *pp* → N, *pi* → O, *ip* → S, *ii* → E. Tout ensemble de cinq nombres consécutifs du tab. B donne, après séparation en nombres à deux chiffres, un chemin possible. On obtient au total 20 chemins dont quatre sont représentés dans la fig. C.

b) Un pêcheur pêche en une heure 0, 1, 2 ou 3 poissons avec les probabilités respectives 0,4, ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1. Combien de poissons arrive-t-il à pêcher en 8 heures ? On associe aux 8 heures deux nombres à 4 chiffres : les chiffres 0, 1, 2, 3 signifient zéro poisson, les chiffres 4, 5, 6 un poisson, les chiffres 7, 8 deux poissons, le chiffre 9 trois poissons. Le tab. B fournit alors 50 résultats possibles pour la pêche, commençant par 5, 7, 4, 9, 14, 4, 11, 6, 7, 7, 4... La moyenne des 50 valeurs est $\mu = 8{,}34$, l'écart-type est $\sigma = 3{,}485$. Il est possible de résoudre facilement le problème par d'autres méthodes conduisant à la valeur moyenne de 8.

On appelle cette méthode de simulation *la méthode de Monte-Carlo*. Elle conduit à des résultats fiables pour de grandes séries d'essais, car l'erreur commise est inversement proportionnelle à $\sqrt{n}$. Pour diviser l'erreur par deux, il faut donc effectuer quatre fois plus d'essais.

La méthode de Monte-Carlo est également valable pour des problèmes de files d'attente de spectateurs devant une caisse de théâtre, de voitures devant un carrefour, lorsque l'on se préoccupe de l'investissement relatif à un nouveau comptoir ou de la construction d'une nouvelle voie de circulation. Elle permet également de simuler des problèmes liés à des coûts de stocks ou à des questions d'assurances.

Fonction objectif

$G(x_1, x_2) = 150x_1 + 450x_2$

(S) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Contraintes

(1) $x_1 \leq 120$, (2) $x_2 \leq 70$,
(3) $x_1 + x_2 \leq 140$,
(4) $x_1 + 2x_2 \leq 180$.

Solution graphique :

(a) A partir de (S) et des contraintes (1) à (4), on détermine le *domaine autorisé* des solutions.

(b) De l'égalité définissant la fonction objectif, on tire $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{450}G$. On est donc en présence d'un *faisceau de droites parallèles* de paramètre G ($\frac{1}{450}G$ est l'ordonnée à l'origine).

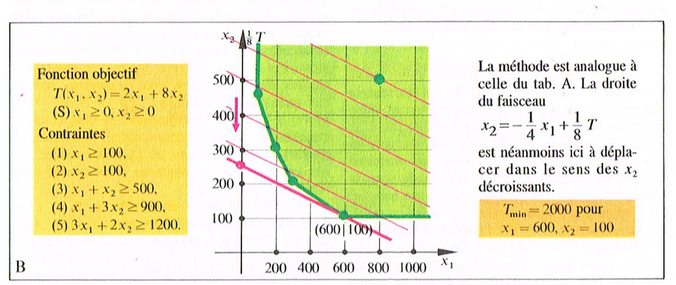
(c) Pour obtenir la valeur maximale de $\frac{1}{450}G$, et donc de G, on choisit tout d'abord une droite quelconque du faisceau ayant un point en commun avec le domaine autorisé, par exemple celle passant par le point (0,0), que l'on déplace dans le sens des x_2 croissants jusqu'à ce qu'elle n'ait plus qu'un sommet ou qu'un côté en commun avec le domaine autorisé.

(d) Dans le problème ci-contre, la solution est obtenue pour le point (40,70), c.-à-d. pour $G_{max} = 37\,500$.

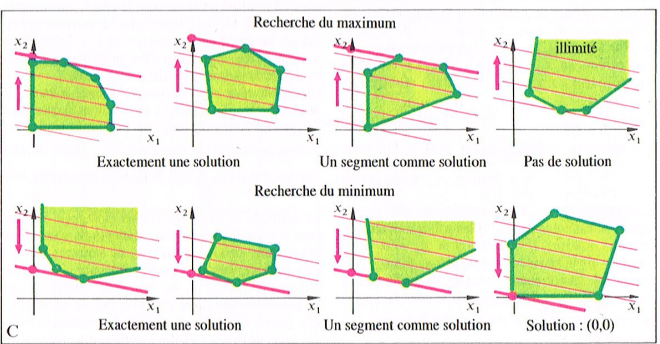
(e) La solution obtenue est entière. Si tel n'avait pas été le cas, il aurait fallu rabaisser la droite du faisceau jusqu'à obtenir une solution entière.

A

Recherche du maximum dans le cas de 2 variables (solution graphique)



Recherche du minimum dans le cas de 2 variables (solution graphique)



Solutions possibles

D'importants procédés numériques doivent être mis en application dans les problèmes d'**optimisation linéaire**. Il s'agit de construire des algorithmes pour déterminer les valeurs extrêmales de fonctions linéaires à plusieurs variables, assujetties généralement à certaines contraintes exprimées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires. L'expression *programmation linéaire* est synonyme d'optimisation linéaire.

Ce sujet se prête particulièrement à des applications concrètes. Néanmoins, les problèmes intervenant dans la pratique doivent souvent être « linéarisés » avant de pouvoir être résolus par les algorithmes d'optimisation linéaire.

Optimisation à deux variables : recherche du maximum (solution graphique)

Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2, vend le premier avec une marge de 150 F, le second avec une marge de 450 F. La production hebdomadaire est soumise aux contraintes suivantes :

Il est possible de fabriquer par semaine au maximum 120 exemplaires de P_1, 70 exemplaires de P_2, 140 exemplaires pour l'ensemble des deux produits. Par ailleurs, on ne dispose que de 180 pièces par semaine d'un élément spécial nécessaire à la production de P_1 et P_2, entrant une fois dans la composition de P_1 et deux fois dans la composition de P_2.

Quelle est alors la production hebdomadaire permettant d'obtenir le profit maximal ?

Pour répondre à cette question, on écrit d'abord le profit hebdomadaire G en fonction des quantités x_1 et x_2 de P_1 et P_2 : $G(x_1, x_2) = 150\,x_1 + 450\,x_2$, avec $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

G est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ appelée *fonction objectif*. Les conditions $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ sont appelées *conditions de signe*. Elles seront notées par la suite (S).

On écrit maintenant les contraintes proprement dites. On obtient le système d'inéquations suivant :

(1) $x_1 \leq 120$, (2) $x_2 \leq 70$,
(3) $x_1 + x_2 \leq 140$, (4) $x_1 + 2\,x_2 \leq 180$.

Les couples (x_1, x_2) satisfaisant à (S) et aux autres conditions décrivent le *domaine autorisé* des solutions du problème. On recherche dans cet ensemble une solution (entière) pour laquelle la fonction objectif présente un *maximum absolu*.

Une telle solution est obtenue de manière graphique dans la fig. A.

Optimisation à deux variables : recherche du minimum (solution graphique)

Pour le transport d'un produit vers une ville, on dispose de deux entrepôts. Chaque jour, x_1 pièces sont transportées depuis l'entrepôt 1 et x_2 depuis l'entrepôt 2, sous les contraintes suivantes :

(1) $x_1 \geq 100$, (2) $x_2 \geq 100$,
(3) $x_1 + x_2 \geq 500$, (4) $x_1 + 3\,x_2 \geq 900$,
(5) $3\,x_1 + 2\,x_2 \geq 1\,200$.

On cherche à déterminer les quantités pour lesquelles les coûts de transport sont minimaux, en comptant 2 F par pièce transportée depuis le premier entrepôt, 8 F depuis le second entrepôt. La fonction objectif est définie par :

$T(x_1, x_2) = 2\,x_1 + 8\,x_2$, avec $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

La solution graphique est donnée dans la fig. B.

Résumé et généralisation (forme normale)

Une optimisation à deux variables consiste donc à déterminer le maximum ou le minimum absolu d'une fonction linéaire Z (fonction objectif) de la forme $Z(x_1, x_2) = c_1\,x_1 + c_2\,x_2$ $(c_k \in \mathbb{R})$ en prenant en compte des conditions de signe et des contraintes (exprimées sous forme d'un système d'inéquations linéaires).

Il est possible de résoudre de manière générale un tel problème. Mentionnons tout d'abord la notion de *forme normale d'une optimisation linéaire avec recherche du maximum* pour n variables (pour d'autres formes, cf. p. 483) :

Soit une fonction linéaire Z de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (*fonction objectif*) définie par :

$Z(x_1, \ldots, x_n) = c_1\,x_1 + \ldots + c_n\,x_n \quad (c_k \in \mathbb{R})$

les conditions de signe suivantes devant être vérifiées :

(S) $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

Tout n-uplet satisfaisant (S) et vérifiant les *contraintes* (indépendantes entre elles) :

$$\begin{array}{ll} (1)\; a_{11}\,x_1 + \ldots + a_{1n}\,x_n \leq b_1 & \\ \quad\vdots & (a_{ik} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}) \\ (m)\; a_{m1}\,x_1 + \ldots + a_{mn}\,x_n \leq b_m & \end{array}$$

est appelé *valeur autorisée* du problème d'optimisation.

Une valeur autorisée est une *solution du problème d'optimisation (maximum)* si la fonction objectif présente un maximum absolu en cette valeur (sous réserve d'existence).

On note le problème d'optimisation symboliquement sous *forme matricielle* de la manière suivante :

$$Z(x) = \langle c, x \rangle, \text{ avec } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \text{ et } \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}.$$

A est ici la matrice (a_{ik}) contenant les coefficients des contraintes (*matrice des contraintes*), $\boldsymbol{b}$ est le *vecteur des contraintes* b_i, $\boldsymbol{c}$ contient les coefficients de la fonction objectif, $\boldsymbol{x}$ ceux des variables. L'utilisation du signe « ≤ » doit être comprise composante par composante.

La *forme normale d'une optimisation linéaire avec recherche du minimum* est définie de manière analogue, avec une contrainte de la forme $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$. Grâce au principe de dualité (p. 483), on ne considérera par la suite que les optimisations avec recherche du maximum. Une solution graphique est pour $n > 3$ impossible, pour $n = 3$ peu judicieuse. Le but est de déterminer des méthodes algébriques, indépendantes d'une dimension donnée, et pouvant être programmées sur ordinateur. La *méthode du simplexe* (DANTZIG, voir p. 481) est un tel procédé.

Rem. : Il est clair à partir de la fig. C qu'un problème d'optimisation peut avoir une ou plusieurs solutions, mais peut également n'avoir aucune solution.

A₁

$Z(x_1, x_2) = 150x_1 + 450x_2 \to$ Maximum (S) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(1) $x_1 \leq 120$, (2) $x_2 \leq 70$, (3) $x_1 + x_2 \leq 140$, (4) $x_1 + 2x_2 \leq 180$. (cf. p. 479)

Les contraintes (1) à (4) sont transformées en équations à l'aide des variables secondaires s_1, s_2, s_3, s_4. (les coefficients nuls ont été indiqués pour la représentation schématique ultérieure) :

(S) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, \ldots, s_4 \geq 0$

(1) $1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4 = 120$

(2) $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4 = 70$

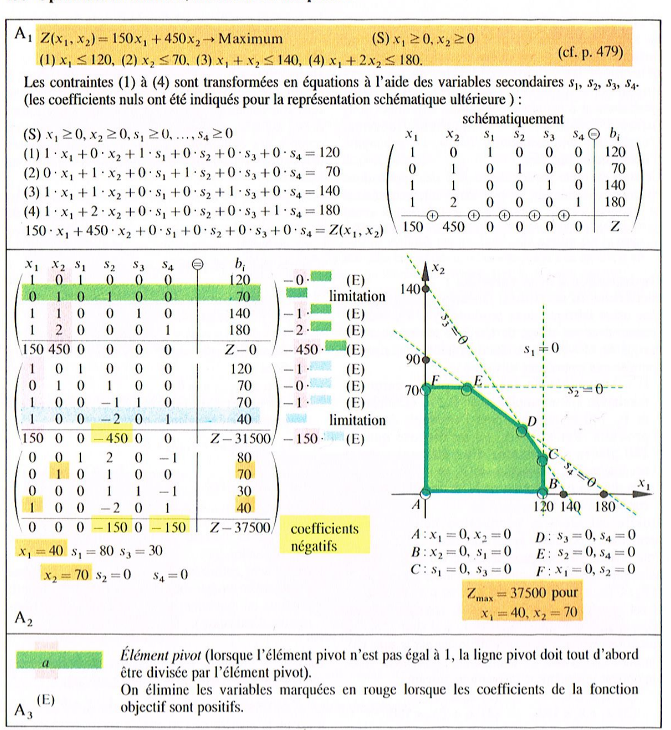
(3) $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 1 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4 = 140$

(4) $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 1 \cdot s_4 = 180$

$150 \cdot x_1 + 450 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4 = Z(x_1, x_2)$

schématiquement

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	⊜ b_i
1	0	1	0	0	0	120
0	1	0	1	0	0	70
1	1	0	0	1	0	140
1	2	0	0	0	1	180
150 ⊕	450 ⊕	0 ⊕	0 ⊕	0 ⊕	0	Z



x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	⊜ b_i	
1	0	1	0	0	0	120	$-0 \cdot$ (E)
0	1	0	1	0	0	70	limitation
1	1	0	0	1	0	140	$-1 \cdot$ (E)
1	2	0	0	0	1	180	$-2 \cdot$ (E)
150	450	0	0	0	0	$Z - 0$	$-450 \cdot$ (E)
1	0	1	0	0	0	120	$-1 \cdot$ (E)
0	1	0	1	0	0	70	$-0 \cdot$ (E)
1	0	0	−1	1	0	70	$-1 \cdot$ (E)
1	0	0	−2	0	1	40	limitation
150	0	0	−450	0	0	$Z - 31500$	$-150 \cdot$ (E)
0	0	1	2	0	−1	80	
0	1	0	1	0	0	70	
0	0	0	1	1	−1	30	
1	0	0	−2	0	1	40	
0	0	0	−150	0	−150	$Z - 37500$	coefficients négatifs

$x_1 = 40$ $s_1 = 80$ $s_3 = 30$

$x_2 = 70$ $s_2 = 0$ $s_4 = 0$

$Z_{max} = 37500$ pour $x_1 = 40, x_2 = 70$

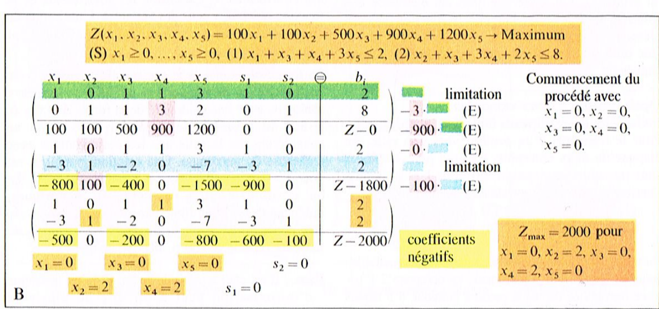
A₂

a — *Élément pivot* (lorsque l'élément pivot n'est pas égal à 1, la ligne pivot doit tout d'abord être divisée par l'élément pivot).

(E) — On élimine les variables marquées en rouge lorsque les coefficients de la fonction objectif sont positifs.

A₃

Optimisation à deux variables



$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 100x_1 + 100x_2 + 500x_3 + 900x_4 + 1200x_5 \to$ Maximum

(S) $x_1 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0$, (1) $x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 2$, (2) $x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 8$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	⊜ b_i	
1	0	1	1	3	1	0	2	limitation
0	1	1	3	2	0	1	8	$-3 \cdot$ (E)
100	100	500	900	1200	0	0	$Z - 0$	$-900 \cdot$ (E)
1	0	1	1	3	1	0	2	$-0 \cdot$ (E)
−3	1	−2	0	−7	−3	1	2	limitation
−800	100	−400	0	−1500	−900	0	$Z - 1800$	$-100 \cdot$ (E)
1	0	1	1	3	1	0	2	
−3	1	−2	0	−7	−3	1	2	
−500	0	−200	0	−800	−600	−100	$Z - 2000$	coefficients négatifs

$x_1 = 0$ $x_3 = 0$ $x_5 = 0$ $s_2 = 0$

$x_2 = 2$ $x_4 = 2$ $s_1 = 0$

Commencement du procédé avec $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$.

$Z_{max} = 2000$ pour $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = 0$

B

Optimisation à cinq variables

Principe

La méthode graphique de la recherche du maximum dans le cas de deux variables (p. 478) montre que le maximum absolu, s'il existe, se trouve au moins en un sommet du domaine autorisé. Ceci est dû au fait que celui-ci est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$. Un ensemble plan est dit *convexe* lorsque pour toute paire de points appartenant à cet ensemble, le segment les joignant est inclus dans cet ensemble.

La notion de convexité peut d'ailleurs être étendue à $\mathbb{R}^n$ en définissant un segment comme il a été vu p. 204. La propriété suivante est alors vérifiée :

Le domaine autorisé d'un problème d'optimisation à n variables est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$.

Le domaine autorisé n'est pas nécessairement borné : du fait que $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, sa frontière est constituée de parties des $(n + m)$ hyperplans (p. 204) définis par $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, d'où l'usage de la terminologie *polyèdre autorisé*.

On appelle *sommet* du polyèdre tout point de la frontière du polyèdre appartenant à au moins n hyperplans. Les sommets jouent un grand rôle, car on démontre le théorème fondamental :

Lorsque le polyèdre autorisé d'un problème d'optimisation est borné, le maximum absolu se trouve au moins en un sommet.

Rem. : Ce théorème explique pourquoi les méthodes d'analyse sont inefficaces dans un problème d'optimisation linéaire : l'extremum absolu est systématiquement recherché en un sommet, c'est-à-dire sur la frontière.

En principe, on pourrait procéder de la manière suivante pour la recherche du maximum : on détermine les sommets du polyèdre autorisé et on leur applique la fonction objectif. Généralement, cette méthode nécessite des temps de calcul beaucoup trop importants, même pour des problèmes simples. On cherche donc à utiliser des *méthodes algorithmiques*.

Une telle méthode ne doit avoir qu'un nombre limité d'étapes, et doit pouvoir aboutir rapidement. On opère donc sur une suite de sommets, en laissant de côté les sommets n'améliorant pas la valeur de la fonction objectif.

La *méthode du simplexe* part de ce principe. Elle sera tout d'abord présentée sur deux exemples.

Rem. : La dénomination de cette méthode provient de polyèdres particulièrement simples appelés simplexes.

Exemples

On considère l'exemple d'optimisation avec recherche du maximum de la p. 479. On transforme pour commencer le système d'inéquations des contraintes en un *système d'équations* contenant quatre équations et autant de *variables secondaires* s_i qu'il y a d'inéquations (tab. A₁). Les s_i, comme les x_k, vérifient les conditions (S). La fonction objectif peut être représentée sous forme d'une fonction de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}$. D'autres informations sont représentées à l'aide d'un schéma.

On doit donc proposer une méthode permettant d'aller d'un sommet à l'autre tout en diminuant à chaque étape l'écart entre la valeur de la fonction objectif et le maximum cherché.

On commence par le sommet A défini par $x_1 = x_2 = s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$. En ce point, $Z = 0$. Pour $x_1 > 0$ ou $x_2 > 0$, la valeur de Z devient strictement positive. Si l'on décide de garder $x_1 = 0$ et de choisir $x_2 \neq 0$, il faut déterminer à l'aide des contraintes la valeur maximale de x_2 permettant d'atteindre un sommet voisin. Les diverses équations impliquent :

(1) x_2 quelconque, (2) $x_2 \leq 70$,
(3) $x_2 \leq 140$, (4) $x_2 \leq 90$.

La deuxième équation est donc celle qui impose la borne supérieure pour x_2. On élimine alors à l'aide de cette équation la variable x_2 dans toutes les autres équations. Il vient :

(1) $x_1 + s_1 = 120$, (3) $x_1 - s_2 + s_3 = 70$,
(4) $x_1 - 2s_2 + s_4 = 40$
et $Z = 31\,500 + 150x_1 - 450s_2$.

Le sommet atteint est le point :

$$F(x_1 = 0, x_2 = 70, s_1 = 120, s_2 = 0, s_3 = 70, s_4 = 40).$$

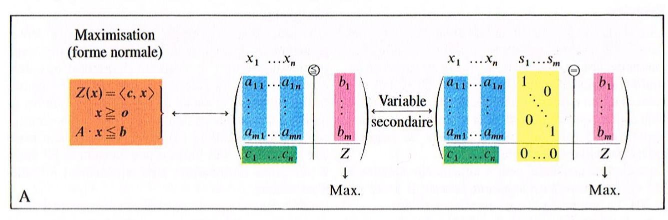
Si on part maintenant de F en faisant croître x_1 depuis la valeur 0, on a sûrement au départ $x_1 < 40 < 70 < 120$, soit $x_1 = 40 - (s_4 - 2s_2)$. Z s'écrit de ce fait $Z = 37\,500 - 150s_2 - 150s_4$.

Sa valeur maximale possible est donc 37 500. Comme cette valeur est effectivement atteinte en :

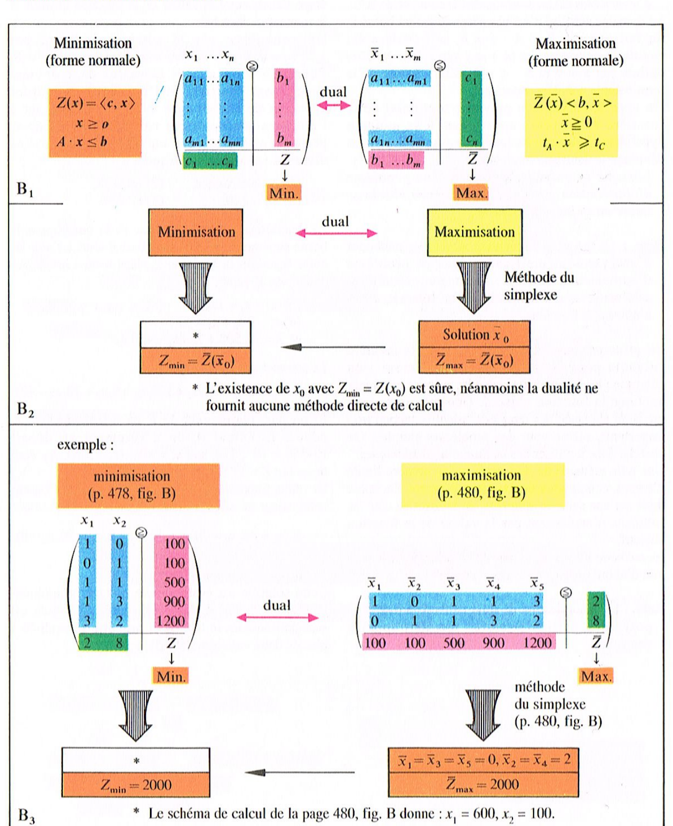
$$E(x_1 = 40, x_2 = 70, s_1 = 80, s_2 = 0, s_3 = 30, s_4 = 0).$$

37 500 est le maximum cherché.

Cette solution est égale à celle obtenue graphiquement p. 478. La méthode présentée ci-dessus est schématisée dans le tab. A₂ et peut être généralisée à plus de deux variables (tab. B).



Introduction de variables secondaires



Dualité

Méthode du simplexe pour une optimisation sous forme normale

Soit une optimisation (maximisation) sous forme normale contenant n variables et m contraintes :
$\mathbf{Z}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle$, avec $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$.

On introduit dans chaque inéquation de $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, une variable supplémentaire $s_i \geq 0$. On obtient alors m équations (indépendantes) à $n + m$ inconnues (tab. A). La résolution générale du système ainsi conçu conduit à adopter la méthode qui va suivre.

On appelle $x_1, \ldots, x_n$ *les variables principales*, $s_1, \ldots, s_n$ *les variables secondaires ou d'écart.*

Lorsque les x_j sont remplacés par 0 et les s_i par les b_i, on a un sommet du domaine autorisé en lequel $Z = 0$. Il s'agit d'augmenter cette valeur pour aboutir à Z_{max} atteinte en un autre sommet.

Les m équations en x_j, s_i écrites sous forme de tableau sont complétées en dernière ligne par l'expression $G(x)$ de Z (tab. A). On choisit un élément *pivot* a_{pq} tel que $a_{pq} > 0$, $c_q > 0$, $\frac{b_p}{a_{pq}}$ = plus petite valeur, lorsque k varie, des $\frac{b_k}{a_{kq}}$ pour lesquels $a_{kq} > 0$ (ex. tab. B, p. 480, $p = 1$, $q = 4$).

Le pivot est à l'intersection de la ligne pivot et de la colonne pivot. On fait disparaître tous les éléments de la colonne pivot, sauf a_{pq}, en ajoutant à chaque ligne du tableau d'indice différent de p, y compris celle de Z, la ligne pivot multipliée par un facteur convenable. $G(x)$ perd son terme en x_q, mais gagne au moins un terme en s_p. Z est diminué d'une certaine valeur. On recommence le même processus avec le nouveau système obtenu, … et on répète l'opération jusqu'à ce que la ligne de Z ne contienne plus aucun facteur > 0 pour les x_j et s_i. Z apparaît alors sous la forme $Z = Z_{max}$ – combinaison linéaire à coef. > 0 de certains x_j et s_i. Les coordonnées du sommet final s'obtiennent en annulant d'une part précisément ces variables principales et secondaires, les autres étant calculées d'autre part à l'aide des équations du dernier système écrit (ex. tab. A_2 et B, p. 480).

Cas général

Souvent les problèmes d'optimisation ne sont pas donnés sous forme normale (p. 479). On peut d'abord signaler le cas limite de la présence d'équations au sein des contraintes (= est plus contraignant que ≤). Par ailleurs on peut rencontrer des contraintes non positives ou des variables ne vérifiant pas les conditions (S). Il est néanmoins possible dans tous les cas de ramener le problème à la forme normale.

a) Contraintes sous forme d'équations : En principe, on peut utiliser les équations pour éliminer autant de variables qu'il y a d'équations, et résoudre le problème ainsi réduit. Il existe des procédés adaptés à ce genre de situation qui permettent d'appliquer rapidement la méthode du simplexe, en particulier par ordinateur.

b) Contraintes négatives : Lorsque l'on est en présence d'une inéquation du type $a_{v1} x_1 + \ldots + a_{vn} x_n \leq - b_v$ $(b_v > 0)$, il est possible, en introduisant une variable supplémentaire p_v $(p_v \geq 0)$, de la ramener à une équation $- a_{v1} x_1 - \ldots - a_{vn} x_n - p_v = b_v$ qui est ensuite traitée comme en a).

c) Contraintes (S) non vérifiées : On suppose que la variable x_v ne vérifie pas $x_v \geq 0$. On utilise alors le fait qu'il existe deux variables positives x'_v et x''_v telles que $x_v = x'_v - x''_v$. On remplace alors x_v par $x'_v - x''_v$ pour poursuivre le calcul.

Dualité (forme normale)

Soit une optimisation avec recherche du minimum donnée sous forme normale (p. 479) :

$$Z(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \quad (c_k \in \mathbb{R}),$$
$$\text{c.-à-d. } \mathbf{Z}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle$$
$$\text{(S) } x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \text{ c.-à-d. } \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},$$
$$(1)\ a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \geq b_1$$
$$\vdots \qquad (a_{ik} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}), \text{ c.-à-d. } \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$(m)\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \geq b_m$$

On appelle *dual* le problème de recherche du maximum suivant (voir tab. B_1) :

$$\bar{Z}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) = b_1 \bar{x}_1 + \ldots + b_m \bar{x}_m,$$
$$\text{c.-à-d. } \bar{\mathbf{Z}}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \langle {}^t\boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{x}} \rangle$$
$$\text{(S) } \bar{x}_1 \geq 0, \ldots, \bar{x}_m \geq 0, \text{ c.-à-d. } \bar{\boldsymbol{x}} \geq \mathbf{0}$$
$$(\bar{1})\ a_{11} \bar{x}_1 + \ldots + a_{m1} \bar{x}_m \leq c_1$$
$$\vdots \qquad \text{c.-à-d. } {}^tA \cdot \bar{x} \leq {}^tc$$
$$(\bar{n})\ a_{1n} \bar{x}_1 + \ldots + a_{mn} \bar{x}_m \leq c_n$$

Pour tout couple de problèmes duaux d'optimisation, il y a un lien remarquable entre leurs solutions. En effet on a :

Th. : *Pour qu'un problème de minimum* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{Z}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle$ *admette pour solution un vecteur autorisé* x_0 ($\langle c, x_0 \rangle = \inf \langle c, x \rangle$), *il faut et il suffit que le problème de maximum dual* ${}^tA \cdot \bar{x} \leq {}^tc$, $\bar{x} \geq 0$, $\bar{Z}(\bar{x}) = \langle {}^tb, \bar{x} \rangle$ *admette pour solution un vecteur autorisé* $\bar{x}_0$:
$(\langle {}^tb, \bar{x}_0 \rangle = \sup \langle {}^tb, \bar{x} \rangle)$.
On a de plus $\langle {}^tb, \bar{x}_0 \rangle = \langle c, x_0 \rangle$.

Pour résoudre un problème de minimisation, on peut donc procéder de la manière suivante : on le transforme tout d'abord en forme normale, on construit le problème dual et on utilise la méthode du simplexe pour déterminer une solution $\bar{x}_0$ du problème dual. On en déduit alors que $Z_{min} = \bar{Z}(\bar{x}_0)$. Néanmoins, on ne connaît pas encore de solution x_0 (tab. B_2).

Par contre, en observant la méthode du simplexe de plus près, on voit qu'il est possible de déterminer $\bar{x}_0$ en même temps que $\bar{x}_0$. En effet, les coefficients associés aux variables secondaires dans la fonction objectif de la dernière ligne du schéma de calcul correspondent au vecteur $- x_0$. On le vérifie par exemple dans le tab. B_3 à l'aide du schéma de calcul B de la p. 480 où $- x_0$ est égal à $(- 600, - 100)$.

Abréviations

abs.	absolu(e)
aff.	affine
antisym.	antisymétrique
appl(ic).	application
arch.	archimédien
assoc.	associativité
bij.	bijectif(ve)
biuniv.	biunivoque(ment)
car.	caractéristique
card.	cardinal
cart.	cartésien(ne)
c.-à-d.	c'est-à-dire
cf.	confer
c.n.s.	condition nécessaire et suffisante
coef(f).	coefficient
comm.	commutatif(ve)
comp.	composante
cond. néc.	condition nécessaire
const.	constant(e)
cont.	continu(e)
convce	convergence
conv.	convergent(e)
cor.	corollaire
coord.	coordonnée
déf.	défini(e), définition
dém.	démonstration
dét.	déterminant
dév.	développement
diff.	différentiel(le)
dim.	dimension
dir.	direction
dist.	distance
dr.	droite
é.d.p.	équation(s) aux dérivées partielles
él(ém).	élément
end.	endomorphisme
ens.	ensemble
éq(u).	équation
éq. dif(f).	équation différentielle
équ.	équilatéral
esp.	espace
esp. top.	espace topologique
e(sp). v(ect).	espace vectoriel
ex.	exemple
fig.	figure
gén.	général
hom.	homomorphisme
homéo.	homéomorphe(isme)
hyp.	hypothèse
ident.	identification
i.e.	id est
ill.	illustration
ind.	indépendant(e)
inf.	(borne) inférieur(e)
inj.	injectif(ve)
inv.	inverse
l.c.e.	loi de composition externe
l.c.i.	loi de composition interne
lin.	linéaire
lin. dép.	linéairement dépendant(s)
lin. indép.	linéairement indépendant(s)
max.	maximum
min.	minimum
mod.	modulo
mult.	multiplicatif(ve) (cation)
nb.	nombre
orth.	orthogonal(e)
p.	page
part. gén.	partie génératrice
pb.	problème
perp.	perpendiculaire
polyn.	polynomial(e)
pp.	pages
prop.	propriété, proposition, théorème
récip.	réciproquement
rég(ul).	régulier(ère)
rel.	relation
rem.	remarque
rep.	repère, représentant
resp.	respectivement
r.o.n.	repère orthonormé(al)
r.o.n.d.	repère orthonormé(al) direct
s.e.a.	sous-espace affine
s.e.v.	sous-espace vectoriel
simpl.	simplexe
s.l.s.h.	semi-linéaire à symétrie hermitienne
sol.	solution
sq.	et suivante
sqq.	et suivantes
sous-ens.	sous-ensemble
sous-esp.	sous-espace
ssi	si, et seulement si,
strict.	strictement
sup.	(borne) supérieur(e)
supp.	support
surj.	surjectif(ve)
tab.	tableau
th.	théorème
top.	topologie(ique)
tot. ord.	totalement ordonné
val.	valeur
val. abs.	valeur absolue
vec.	espace vectoriel engendré par
vect.	vectoriel

Symboles mathématiques

Logique mathématique

V, F   vrai, faux
$\neg, \wedge, \vee$ non, et, ou
$\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$ implique, si… alors ; ssi
$\forall x$ quel que soit x, pour tout x
$\forall x \in E$ quel que soit x élément de E
$\exists x$ il existe x
$=, \neq$ égal à, identique à ; différent de, non égal à
$:=, :\Leftrightarrow$ égal (resp. équivalent) par déf. à

Ensembles

Ens (X) X est un ensemble
$\in, \notin$ appartient à, (resp.) n'appartient pas à
$\subseteq, \subset$ inclus dans (= compris, resp. non =)
$\supseteq, \supset$ contenant (= compris, resp. non =)
$\varnothing$ ens. vide
$\mathfrak{P}(E) :=$ ens. des parties de E
$\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ ens. des x ayant la propriété $\mathcal{P}$
$A \setminus B$ $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
$C_E A$ $E \setminus A$ pour $A \subseteq E$
$\bar{A}$ complémentaire de A
$A \cap B, A \cup B$ A intersection, resp. union B
$\bigcap_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} A_i$ intersection, resp. union de tous les A_i
$\bar{\cap}, \underline{\cup}$ l.c.i. d'un treillis

Relations et structures

(x_1, x_2) couple, paire ordonnée
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-uplet
$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ produit cartésien d'ensembles
$\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} E_i, \prod_{i=1}^{n} E_i$ produit cartésien d'ensembles
E^n produit cartésien ($\forall i\ E_i = E$)
$x_1 \Re x_2$ $:\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \Re \subseteq E_1 \times E_2$
$\perp$ relation d'orthogonalité
$[\![x]\!]$ classe d'équivalence de x
$E / \Re$ ens. quotient
$x (S \circ R) z$ $:\Leftrightarrow \exists y (x S y \wedge y R z)$
$x R^{-1} y$ $:\Leftrightarrow y R x$, relat. réciproque
$f : E \to F$ application de E dans F
$x \mapsto f(x)$ image de x par f
$f[A]$ image de l'ens. A par f
$1_E, Id_E$ applic. identique de E sur E
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour $f((x_1, x_2, \ldots, x_n))$
$f_{/A}$ ou $f \mid A$ restriction de f à l'ens. A
$i : x \mapsto x$ injection canonique de $A \subseteq E$ dans E
f^{-1} appl. inverse de f bijective
$f^{-1}[A], f^{-1}(P)$ image réciproque de l'ens. A, resp. du point P
$g \circ f$ applic. composée
$\sim$ équipotent à
card (E) nombres d'éléments, puissance de E
$\aleph_0$, $\mathfrak{c}$ card $(\mathbb{N})$, card $(\mathbb{R})$
$\top, \perp$ l.c.i., l.c.e.
$(E, \top)$ ens. muni d'une l.c.i. $\top$
ord G card. de G groupe fini
a^{-1} inverse de a pour une l.c.i.
$(E, \Omega, \perp)$ ens. E muni d'une l.c.e. $\perp$ selon Ω
$\leq, \leqslant ; \geq, \geqslant$ inférieur ou égal à ; supérieur ou égal à
$<, \prec ; >, \succ$ strict. inférieur à ; strict. supérieur à
max (E), min (E) plus grand, resp. plus petit él. de E
sup (E), inf (E) borne sup., resp. inf. de E
ord   ordinal d'un ens. bien ordonné
$\mathfrak{V}(x)$ ens. des voisinages de x
$B(m, \varepsilon)$ boule ouverte, centre m, rayon ε

Construction des nombres

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$ ens. des entiers ≥ 0 ; > 0
$\mathbb{Z}$ anneau des entiers relatifs
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_-$ ens. des entiers ≥ 0 ($\mathbb{N}$) ; ≤ 0 (ou $\leqslant 0$)
$\mathbb{Z}_+^*, \mathbb{Z}_-^*$ ens. des entiers > 0 ; < 0
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ corps des nombres rationnels, réels, complexes
$\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}^{*+}$ ens. des réels ≥ 0 (ou $\geqslant 0$) ; > 0
$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}^{*-}$; $\mathbb{R}^*$ ens. des réels < 0 ; $\neq 0$
$\mathbb{Q}_+^*$ ou $\mathbb{Q}^{*+}$ ens. des rationnels > 0
$\mathbb{Q}_-^*$ ou $\mathbb{Q}^{*-}$; $\mathbb{Q}^*$ ens. des rationnels < 0 ; $\neq 0$
i $\sqrt{-1}$ d'argument $\pi / 2$

e $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
$[a, b]$; $[a, b[$ $\{x \mid a \leq x \leq b\}$; $\{x \mid a \leq x < b\}$
$]a, b]$; $]a, b[$ $\{x \mid a < x \leq b\}$; $\{x \mid a < x < b\}$
opp b opposé de b, $-b$
$|b|$ valeur absolue, module
(a_n) suite $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$
E (x) part. ent. du réel x, entier $n \in]x-1, x]$
arg z argument de z
Arg z argument principal de z, $\in [0, 2\pi[$
Re z, Im z partie réelle, resp. imaginaire de z
ln z $\ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,|z| + 2\mathrm{i} k \pi$
$n!$ factorielle de n
$\binom{n}{k}$ $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Algèbre

$(G, \top)$ ens. avec l.c.i.
$[G : U]$ nombre de classes à droite (resp. à gauche)
$\begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} \end{pmatrix}$ permutation de $a_1 \ldots a_n$
G / N gr. quotient de G par N sous-gr. normal
ker f noyau du morphisme f
$\cong$ isomorphe à
Aut (E, E) ou Aut (E) ens. des automorph. de E pour sa structure
$R[X]$ anneau des polynômes à coef. dans l'anneau R
$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ou $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ anneau des classes de congruence mod n
(a) idéal Ra dans R anneau comm. unitaire
$\underset{i=1\ldots n}{\times} M_i$ ou $\prod_{i=1\ldots n} M_i$ somme directe des Ω-modules M_i
dim (V / K) dim. de l'e.v. V par rapport au corps K
$(\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ . & . & . \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$ matrice n lignes, m colonnes
$\mathfrak{L}(V, V')$ esp. vect. des applic. lin. de V dans V'
$M_{n,p}$ e.v. des matrices à n lignes, p colonnes
$(\delta_{ik})_n$ matrice unité (n, n)
sign ; sgn   signature ; signe
$\det(\alpha_{ik}) := \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ . & . & . \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$ dét. de (α_{ik})
com (A) matrice des cofacteurs
$GL_n(K)$ gr. mult. des matrices (n, n) de dét. $\neq 0$
$(\alpha_{ik})^{-1}$; ${}^t(\alpha_{ik})$ inverse, resp. transposée de (α_{ik})
$S[\alpha]$ adjonction de $\alpha \in A$ au sous-anneau S de A
deg $P(X)$ degré de $P(X)$
$A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ anneau des polynômes à n indéterminées
$\sum_{i=1}^{n} a_i$ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
$\sum_{i \in I} a_i$ somme de tous les a_i
$\prod_{i=1}^{n} a_i$ $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$
$\prod_{i \in I} a_i$ produit de tous les a_i
$\sum_{i=1}^{n}$ $x_1 \ldots \not{x}_i \ldots x_n$ x_i exclu du $i^{\text{ième}}$ terme de la somme
$(E : K)$ deg. de l'extension E du corps comm. K
$K(B)$ surcorps de K engendré par $K \cup B$

$K(\alpha)$ *cf.* supra avec $B = \{\alpha\}$
$K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})(\alpha_n)$
φ fonction d'EULER
$Id_L, 1_L$ applic. identique de L
1_A élément neutre de l.c.i.
G_L^E groupe de GALOIS des L-automorph. de E
S_n gr. des permutations d'un ens. de card. n

Théorie des nombres

$a \mid b \, ; a \nmid b$ a divise b ; $\neg\, a \mid b$
$a \sim b$ a est associé à b
$a \mid_A b$ $\frac{b}{a} \in A$, sous-anneau du corps K
$\mathfrak{i}, \mathfrak{a}, \mathfrak{u} \ldots$ idéaux
$\mathfrak{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ idéal engendré par $i_1, i_2, \ldots, i_n$
$b_1 \equiv b_2 \, (\mathfrak{a})$ $b_1 - b_2 \in (\mathfrak{a})$
$A/(a)$ anneau quotient par l'idéal principal (a)
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/(p)$ anneau des classes de congruence mod p
$\left(\frac{a}{p}\right)$ symbole de LEGENDRE
$|x|_\infty \, ; |x|_p$ valeur absolue ordinaire ; p-adique
$\mathbb{Q}_p$ corps des nombres p-adiques
ζ (zêta) fonction $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$
$\pi(x)$ nb. des q nombres premiers tels que $1 < q \leq x$
F_k nombre de FERMAT

Géométrie

(A, a, α) drapeau : point $A \in$ axe $a \subset$ plan orienté α
I ; $\perp$ incident à ; orthogonal à
σ_g réflexion par rapport à la droite g
I_d applic. identité
dr (A, B) droite (A, B)
$\sphericalangle\, s_1, s_2$ angle des demi-droites s_1 et s_2
$M_1 \cong M_2$ M_1 et M_2 directement congrus
$M_1 \equiv M_2$ M_1 et M_2 congrus (sens large)
1 grad $:= \frac{\pi}{200}$ radians
$[P, P']$ segment PP'
$d \,||\, d'$ d et d' sont parallèles
AB distance AB
$\overline{AB}$ mesure algébrique du bipoint (A, B)
ΔABC triangle ABC
sin ; cos fonctions sinus ; cosinus
tan ; cotan tangente ; cotangente
sec ; cosec 1/cos ; 1/sin
ch ; sh cosinus, sinus hyperboliques
th ; coth tangente, cotangente hyperboliques
(A, B, C, D) birapport des points A, B, C, D

Géométrie analytique

(A, B) bipoint (A, B)
$\overrightarrow{AB}$ $[\![(A, B)]\!]$, vecteur libre du bipoint (A, B)
$V' \oplus V''$ somme directe de s.e.v.
$b = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ base vectorielle
(O, b) ou $(O \, ; \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ repère affine
$|\vec{a}|$ ou a norme euclidienne du vecteur $\vec{a}$
a° vecteur unitaire $\vec{a}/a$
$\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b}$ mesure d'angle géométrique
$< \vec{a}, \vec{b} >$ ou $\vec{a} \cdot \vec{b}$ produit scalaire
$\vec{a}_b$ projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$
$\vec{a} \times \vec{b}$ produit vectoriel
$< \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} >$ ou $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ produit mixte

Topologie

$\mathring{A}$ ou A° intérieur de l'ens. A
$\overline{A}$; ∂A fermeture, frontière de A
$(E, \mathfrak{G})$ E muni de la top. $\mathfrak{G}$
$(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$ $\mathbb{R}^n$ muni de sa top. naturelle déf. par d_E
$d_E(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1\ldots n} (x_i - y_i)^2}$
d_E distance euclidienne
$V(\mathfrak{B})$ top. engendrée par la base de top. $\mathfrak{B}$
$D(\mathfrak{S})$ base de la top. engendrée par $\mathfrak{S}$
$\mathbb{S}^{n-1}$ sphère de $\mathbb{R}^n$, sous-esp. de $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{R}^n)$
$\mathfrak{U}(x)$ filtre des voisinages de x
$\mathfrak{B}(x)$ base de $\mathfrak{U}(x)$

Topologie algébrique

$I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$
$\Pi_n(E)$ groupe fondamental d'ordre n de E
$|K|$ union des simpl. du complexe simplicial K
$K^{(r)}$ squelette de dim. r du complexe simplicial K
$Ob(\mathfrak{C})$ classe des objets d'une catégorie $\mathfrak{C}$
$Mo(\mathfrak{C})$ classe des morphismes
$Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ classe des morphismes de A vers B, objets de $\mathfrak{C}$

Bases de l'analyse réelle

$(K \, ; +, \cdot, \leq)$ K corps commutatif tot. ord.
$|a|$ valeur absolue
$d_E(a, b)$ $|b - a|$, distance sur $\mathbb{R}$
$\mathfrak{R}$ topologie sur $\mathbb{R}$ pour d_E
$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ la suite (a_n) converge vers a
$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ ou $-\infty$ (a_n) est *fortement divergente*
$\overline{\lim}\, a_n \, ; \underline{\lim}\, a_n$ limite supérieure, inférieure de (a_n)
$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ série finie $a_1 + a_2 + \ldots a_n$
$\Sigma\, a_n$ série de terme général a_n
$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ somme de la série $\Sigma\, a_n$
$\Pi\, a_n$ produit infini de facteur général a_n
$\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ limite non nulle de $\Pi\, a_n$
D_f ens. de déf. de f
$\lim_{x \to a} f(x)$ limite de f en a
$1_{\mathbb{R}}$ applic. identité de $\mathbb{R}$
$f + g, fg, f^n, \frac{f}{g}$ opérations sur les fonctions
f^0 fonction constante égale à 1
$g \circ f$ composée d'applications
$\Sigma\, a_\nu (1_{\mathbb{R}})^\nu$ fonction polynôme ou série entière
$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (1_{\mathbb{R}})^\nu$ de deg. n si $a_n \neq 0$
$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (1_{\mathbb{R}})^\nu$ série entière

Calcul différentiel

$\Gamma \, ; \zeta$ fonction Gamma ; fonction zêta
m_a $m_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
$f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$ fonctions dérivées de f
$\frac{\mathrm{d} f(x)}{\mathrm{d} x}, \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}$ dérivée première
$\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d} x^n}, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d} x^n}$ dérivée d'ordre n
$U_\varepsilon(a) := \{x \,/\, |x - a| < \varepsilon\}$
$\mathrm{d} f_a (x - a)$ $(x - a) f'(a)$
$\mathrm{d} f_a$ $f'(a)\, \mathrm{d} x$
exp fonction exponentielle
e ; ln exp 1 ; $\exp^{-1}$
a^x ou $\exp_a x$ $\mathrm{e}^{x \ln a}$, exp. de base a
$\log_a$ $(\exp_a)^{-1}$, log de base a
$y = \operatorname{Arcsin} x \; :\Leftrightarrow x = \sin y$ et $|y| \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arcsin x \; :\Leftrightarrow x = \sin y$
$y = \operatorname{Arccos} x \; :\Leftrightarrow x = \cos y$ et $0 \leq y \leq \pi$
$y = \arccos x \; :\Leftrightarrow x = \cos y$
$y = \operatorname{Arctan} x \; :\Leftrightarrow x = \tan y$ et $|y| < \frac{\pi}{2}$
$y = \arctan x \; :\Leftrightarrow x = \tan y$
$y = \operatorname{Arccotan} x \; :\Leftrightarrow x = \operatorname{cotan} y$ et $0 < y < \pi$
$y = \operatorname{arccotan} x \; :\Leftrightarrow x = \operatorname{cotan} y$
C constante d'EULER
$\|f\|_\infty$ norme de la convergence uniforme
$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)^2| \, \mathrm{d} x}$, norme L^2
$\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m$ – fonction fonction f telle que $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f[D_f] \subseteq \mathbb{R}^m$
$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m$ – fonction définie par ses composantes
$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m$ – fonction définie par ses composantes
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ fonction dérivée partielle première par rapport à x_i
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ sa valeur en $\vec{a}$
$\frac{\partial}{\partial x_i}$ opérateur $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ fonctions dérivées partielles secondes
$\mathrm{d} f_{\vec{a}}$ différentielle de f en $\vec{a}$
$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$ ou $\operatorname{grad} f$ gradient de $\vec{f}$, ou f
$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \vec{\nabla}$ vecteur nabla
$\operatorname{div} \vec{f}$ ou $\operatorname{div} f$ divergence de $\vec{f}$, ou f
$\overrightarrow{\operatorname{rot}} f$ ou $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{f}$, $\operatorname{rot} f$ rotationnel de f, ou $\vec{f}$
$\Delta \Psi$ laplacien de Ψ
$\frac{\mathrm{d} \vec{f}}{\mathrm{d} \vec{x}}$ ou $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}$ matrice jacobienne
$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ jacobien, $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$

Calcul intégral

$D = (a_0, \ldots, a_n)$ subdivision de $[a, b]$ $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$
$\bar{\int}_a^b \, ; \underline{\int}_a^b$ intégrale supérieure ; inférieure
$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d} x$ intégrale de f sur $[a, b]$
$[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$
I_a fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\, \mathrm{d} t$
$\int f(x)\, \mathrm{d} x$ intégrale indéfinie
$\left[\int f(x)\, \mathrm{d} x\right]_{x = \varphi(t)}$ changement de variable
$\left[\int (f \circ \varphi)\, \varphi'(t)\, \mathrm{d} t\right]_{t = \varphi^{-1}(x)}$ retour à $\int f(x)\, \mathrm{d} x$
t_n, l_n polynôme de TCHEBYCHEV (resp. de LEGENDRE)
$S(f, D, X)$ somme de RIEMANN
$\int_k < f(x), \mathrm{d} x >$ l'intégrale curviligne de f le long de l'arc paramétré $\boldsymbol{k}$
$\oint_k < f(x), \mathrm{d} x >$ comme ci-dessus, $\boldsymbol{k}$ fermé
$S(\boldsymbol{k}, f, D, X)$ somme de RIEMANN d'une intégrale curviligne
$\iint_a f(x_1, x_2)\, \mathrm{d} x_1\, \mathrm{d} x_2$ intégrale double, $D \subset \mathbb{R}^2$
$\int_a < f, \boldsymbol{n}^+ > \mathrm{d} S$ intégrale de surface
m^*, m_* mesure de JORDAN, resp. extérieure, intérieure
I_J mesure aréolaire de JORDAN
μ, μ^*, μ_* mesure de LEBESGUE ; resp. extérieure, intérieure
$(R) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d} x$ intégrale de RIEMANN
$(L) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d} x$ intégrale de LEBESGUE

Analyse fonctionnelle

$\| \; \| \, ; \| \; \|_2$ norme ; norme euclidienne
$\|f\|_\infty$ norme de la convergence uniforme sur $C^0[a, b]$
$< , >$ produit scalaire hermitien
$C^0[a, b]$ espace des fonctions cont. sur $[a, b]$
$C^n[a, b]$ espace des fonctions déf. p. 366
$L^p[a, b]$ espace des fonctions f telles que $\int_a^b |f(x)|^p\, \mathrm{d} x < \infty$
$\|f\|_n$ norme sur $C^n[a, b]$
$\|f\|_p$ norme sur $L^p[a, b]$
$L^\infty[a, b]$ esp. des fonctions essentiellement bornées
$\|f\|_\infty$ norme sur $L^\infty[a, b]$
D opérateur de différentiation
$\frac{\delta \boldsymbol{F}}{\delta \vec{x}}(\vec{a}), \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{a})$ diff. de FRECHET, resp. de GATEAUX de $\boldsymbol{F}$ en $\vec{a}$

Équations différentielles

$F_A, \boldsymbol{F}_A$ solutions correspondant aux conditions initiales A
I_x intervalle de déf. d'une sol. déf. en x
$F_h \, ; F_{nh}$ sol. de l'éq. homogène ; non homogène
F_p sol. particulière
$W(F_1, \ldots, F_p)$ déterminant wronskien
$\mathfrak{I}(x)$ matrice fondamentale

$\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ algèbre des matrices (n, n) à coef. réels

Géométrie différentielle

$\boldsymbol{k}(t) = \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}$ représentation paramétrique d'une courbe de $\mathbb{R}^2$

$\boldsymbol{k}(t) = \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ k_3(t) \end{pmatrix}$ resp. de $\mathbb{R}^3$

$(I, \boldsymbol{k})$; $[\![(I, \boldsymbol{k})]\!]$ arc paramétré ; géométrique
s abscisse curviligne
C^r classe des fonctions ayant une dérivée d'ordre r continue
$\dot{\boldsymbol{k}}(s)$, $\ddot{\boldsymbol{k}}(s)$ dérivées de $s \mapsto \boldsymbol{k}(s)$
$\dot{\boldsymbol{k}}(s)$ ou $\boldsymbol{t}(s)$ vecteur unitaire de la tang. orientée
$\boldsymbol{n}(s)$; $\boldsymbol{b}(s)$ vecteur normal principal ; binormal
$\chi(s)$ courbure, $\chi(s) = |\ddot{\boldsymbol{k}}(s)|$
$\tau(s)$ torsion
$\ddot{\boldsymbol{k}}(s)$ vecteur courbure $\chi(s)\, \boldsymbol{n}(s)$
$V(t, q)$ Vec $(k'(t), \ldots, k^{(q)}(t))$

$\boldsymbol{a}(u, v) = \begin{pmatrix} a_1(u,v) \\ a_2(u,v) \\ a_3(u,v) \end{pmatrix}$ représentation paramétrique d'une nappe de $\mathbb{R}^3$

$h^+(u, v)$ vect. unit. de la normale orientée
$E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2$ 1re forme quadratique fond.
$L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2$ 2e forme quadratique fond.
$g := EG - F^2$
$b := LN - M^2$
$\chi_n(s)$; $\chi_g(s)$ courbure normale ; géodésique
χ_1, χ_2 courbures principales
H ; K courbure moyenne ; totale
$x^i b_i$ $\sum_{i=1}^{n} x^i b_i$
V^*, V^{**} dual, resp. bidual de V
$\tilde{x}$ $\tilde{x} \in V^{**} \wedge \forall y' \in V^* : \tilde{x}(y') = y'(\tilde{x})$
$\boldsymbol{a}_{u^k} := \dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^k}$
(U, φ) carte locale
$g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}$ resp. E, F, F, G
Γ^k_{ij} symboles de Christoffel

Théorie des fonctions

$\widehat{\mathbb{C}}$ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, plan complexe compactifié par un point
$\hat{d}(z_1, z_2)$ distance cordale
$\hat{d}(\infty, z) := \dfrac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}$
$\widehat{\mathbb{C}}$-$\mathbb{C}$-fonction $D_f \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ et $f : D_f \to \mathbb{C}$
$\mathbb{C}$-$\widehat{\mathbb{C}}$-fonction $D_f \subseteq \mathbb{C}$ et $f : D_f \to \widehat{\mathbb{C}}$
$\widehat{\mathbb{C}}$-$\widehat{\mathbb{C}}$-fonction $D_f \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ et $f : D_f \to \widehat{\mathbb{C}}$
i $\sqrt{-1}$ d'Argument $\pi/2$
res f résidu de f
$\wp$ fonction elliptique « pé » (p. 448 sq.)
σ fonction « sigma » (p. 446)
$\sum^*_{\nu\mu}$ somme pour $(\nu, \mu) \neq (0, 0)$

$\tau : \mathbb{C}^n \to (\mathbb{R}^+)^n$ $\tau(z_1, \ldots, z_n) = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$
(P, H) figure de Hartog

Analyse combinatoire

$p(n)$ nb. de permutations d'un ens. de n él.
$p(n_1, \ldots, n_k)$ nombre de permutations avec $n_1, \ldots, n_k$ répétitions
$a(n, k)$; $a^*(n, k)$ nb. d'arrangements sans, resp. avec répétition de n objets pris k à k
$c(n, k)$; $c^*(n, k)$ nb. de combinaisons sans, resp. avec répétition de n objets pris k à k

Calcul de probabilités et statistiques

$P(A)$ probabilité de l'événement A
$P(B|A)$ probabilité conditionnelle
$F(A)$; $f(A)$ fréquence absolue, resp. relative de A
$E(X)$, μ espérance mathématique, valeur moyenne de X
$V(X)$, σ^2 variance de X
$\sigma(X)$ écart-type
$X = a$ événement $\{\omega \mid X(\omega) = a\}$
$X \leq a$ événement $\{\omega \mid X(\omega) \leq a\}$
$b_{n,p}(k)$ $P(X = k)$ pour une loi binomiale n, p
$B_{n,p}$ fonct. de répartition pour une loi binomiale n, p
ψ_μ, Ψ_μ répartition et fonction de répartition pour une loi de Poisson
φ, Φ pour une loi normale centrée, densité et fonction de répartition
$\varphi_{\mu,\sigma}$, $\Phi_{\mu,\sigma}$ mêmes notions pour une répartition normale généralisée

Optimisation linéaire

$Z(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})$, avec $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ et $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ notation symbolique d'un problème d'optimisation
$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$: $\forall i \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$
$\boldsymbol{c}$ coef. de la fonction objectif $\sum_j c_j x_j$

Ensembles fractals, géométrie fractale

m_α α-mesure extérieure de Hausdorff
$\mathfrak{I}_c$ ens. de Julia rempli associé à c

Valeurs propres, sous-espaces propres

$\underset{i \in I}{+} E_i$, $\underset{i \in I}{\oplus} E_i$ somme, somme directe des s.e.v. E_i
$L(E)$ ou $\mathfrak{L}(E)$ algèbre des endomorph. de l'e.v. E
P ; S ens. des valeurs propres ; spectre
F_λ sous-esp. propre associé à λ
$C(\lambda)$ polynôme caractéristique
C_k sous-esp. caractéristique de λ_k

Formes hermitiennes, espaces préhilbertiens

${}^t\overline{M}$ transconjuguée de M
$A^\perp$ s.e.v. des vecteurs orth. aux vect. de A
C_h cône isotrope de la forme hermitienne h
$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$ produit scalaire hermitien
$\|\vec{u}\|$ $\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$
l^* adjoint de l'endomorphisme l
l^2 $\mathbb{C}$-e.v. des suites dans $\mathbb{C}$ infinies tq $\sum_1^\infty |\overline{x_k}\, y_k| < \infty$

Série de Fourier

ε_n application $t \mapsto e^{int}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

c_n coef. de Fourier d'ordre $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha + 2\pi} e^{-nit} f(t)\, \mathrm{d}t$$

$\sum c_n \varepsilon_n$ série de Fourier
$\|\vec{u}\|_B$ norme de $\vec{u} \in B$, esp. vect. normé

Transformation de Fourier

$\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ $\mathbb{C}$-esp. vect. des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ intégrables, telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p\, \mathrm{d}t < \infty$
$N_p(f)$ norme de f continue $\in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$
C' $\mathbb{C}$-esp. vect. des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, tendant vers 0 quand $|x| \to \infty$
$\hat{f}$ ou $\mathfrak{I}(f)$ transformée de Fourier de f
E $\mathbb{C}$-esp. vect. des fonctions l de classe C^∞ telles que $\forall (k, q) \in \mathbb{N}^2 \lim_{x \to \infty} x^k\, l^{(q)} = 0$
$f * g$ produit de convolution

Distributions

$\mathfrak{D}(\Omega)$ $\mathbb{C}$-e.v. des fonctions test déf. sur l'ouvert Ω
$|\alpha|$ $\sum_{i=1,\ldots,n} |\alpha_i|$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indice
D^α opérateur $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}$
$\mathfrak{D}'(\Omega)$ e.v. des distributions sur Ω
H fonction de Heaviside
vp distribution valeur principale de Cauchy
δ ; δ_a distribution de Dirac ; resp. en a
$u * v$ produit de convolution des distr. u et v
E pour un opérateur différentiel A, sol. élémentaire i.e. telle que $A(E) = \delta$

Algèbre extérieure

S_n groupe des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$
σ permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ ou de E^n associée
ε_σ signature de $\sigma \in S_n$
α opérateur d'antisymétrisation
F^E e.v. des applic. de l'ens. E dans l'e.v. F
$L_p(E, F)$ e.v. des applic. p-lin. E^p dans l'e.v. F
$L_p(E)$ e.v. des formes p-lin. déf. sur l'e.v. E^p
$f \otimes g$ produit des formes p-lin. f, g
$f \wedge g$ produit ext. de formes multilin. alternées
$A_p(E)$ e.v. des formes p-lin. alternées sur E^p
$\tilde{x}$ $\tilde{x} \in E^{**} \wedge \forall y' \in E^*\ \tilde{x}(y') = y'(x)$
$\wedge E$ algèbre extérieure de E
$\overset{p}{\wedge} E$ s.e.v. de $\wedge E$ engendré par les p-vecteurs
$\boldsymbol{b}_H$ $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$, $H = \{i_1, \ldots, i_p\}$ avec $1 \leq i_1 <, \ldots, < i_p \leq n$, base $b = (e_i)_{i=1,\ldots,n}$
$I(H, K)$ $:= 0$ si $H \cap K = \varnothing$, sinon $(-1)^{\mathrm{Card}\,\{(i,j) | (i,j) \in H \times K \wedge i > j\}}$
$\overline{H}$ complémentaire de H
$\hat{f}$ homomorphisme d'algèbre de $\wedge E$ dans $\wedge F$ prolongeant $f \in L_1(E, F)$

Formes différentielles

$\Lambda_p^{(k)}(\Omega)$ e.v. des p-formes diff. de classe k déf. sur l'ouvert Ω
$\Phi^*(\omega)$ changement de variable Φ effectué sur une forme diff.
d opérateur de différentiation extérieure
$J(\Phi)$ dét. jacobien de Φ
ω_φ traduction d'une forme diff. ω dans φ
supp (ω) support de la forme diff. ω
$\int_\psi \omega$ intégrale d'une forme diff. ω selon Ψ

Opérateurs compacts

B boule unité fermée d'un e.v. normé
$\mathfrak{L}_c(E)$ sous-algèbre des opérateurs continus de E
$\|f\|$ $:= \sup \{\|f(x)\| / x \in B\}$, norme sur $\mathfrak{L}_c(E)$
$\mathfrak{L}_k(E)$ sous-algèbre des opérateurs compacts
$\mathfrak{L}_r(E)$ sous-algèbre des opérateurs de rang fini
f^* adjoint de f

Groupes de Lie

$\mathrm{M}(n, K)$ e.v. sur le corps K des matrices (n, n) à coef. dans K
$\mathrm{GL}(n, K)$ groupe multiplicatif des matrices (n, n) inversibles
$\mathrm{SL}(n, K)$ $\{f / f \in \mathrm{GL}(n, K) \wedge \det f = 1\}$
$\mathrm{O}(n, K)$ groupe mult. des matrices orthogonales (n, n) à coef. dans K
$\mathrm{SO}(n, K)$ groupe des matrices de $\mathrm{O}(n, K)$ de dét. égal à 1
$\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ groupe unitaire d'ordre n de $\mathbb{C}$
$\mathrm{SU}(n, \mathbb{C})$ $\mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$
$[X, Y]$ multiplication dans une algèbre de Lie

Compléments de géométrie différentielle

C^ω classe des fonctions (resp. des variétés) analytiques
$T_P(V)$ espace tangent à la variété V au point P
Φ_*, Φ^* applic. lin. tangente (resp. cotangente)
$T(V)$ $\bigcup_{P \in V} T_P(V)$
$\Gamma(V)$ esp. vect. des champs de vecteurs sur V
$[X, Y]$ crochet des champs de vecteurs X, Y
D opérateur de dérivation covariante
Γ^k_{ij} symboles de Christoffel
∇_i dérivée covariante d'une forme diff.
$\partial_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ dérivées partielles par rapport aux variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$
R_{ijkl} composantes du tenseur de courbure
$T(X, Y)$ torsion de connexion

Équations aux dérivées partielles

$\sigma_\xi(A, x)$ symbole principal
Δu laplacien de u
$H_1(\Omega)$ espace de Sobolev

Composition S.C.C.M. - Paris XIIe
Édition 02
Dépôt édit. 5283-11/1997
ISBN 2253130133
31/3013/5



Cet atlas souhaite montrer l'évolution de la science arborescente qu'est aujourd'hui la mathématique. Henri Poincaré fut, dit-on, le dernier mathématicien à posséder tout ce qu'elle représentait à son époque. De nos jours, les rameaux en sont si nombreux que nul ne peut, faute de temps, prétendre tous les connaître.

Or, l'ensemble des constructions mathématiques actuelles fournit, outre des objets qui paraissent purement abstraits, des théories indispensables à l'activité humaine de cette fin de siècle : langage mathématique de l'ordinateur, ou tout simplement économie mathématique.

L'*Atlas des mathématiques* propose, à côté des classiques, quelques pages sur la géométrie fractale qui trouve sa place en physique, sur les algèbres de Lie, qui se tournent vers la chimie, enfin sur le cadre mathématique moderne dans lequel évolue la géométrie différentielle, source théorique de tant de phénomènes devenus courants dans la pratique.

Les chapitres abordés dans ce livre sont de difficulté inégale. Si certains se révèlent aisément accessibles, d'autres demandent un effort de réflexion et de patience. Mais ne peut-on pas dire que la persévérance permet d'observer la planète mathématique en voyant apparaître de plus en plus de détails, les couleurs de l'atlas en étant ici les illustrations ?

Aperçu du contenu de l'ouvrage :

- La logique mathématique ; la difficulté de la notion d'ensemble.
- Les concepts fondamentaux : relations et structures.
- Le développement de l'algèbre : en avance sur son temps, la théorie de Galois.
- Un vieux problème : les géométries ; celles qui ne sont pas euclidiennes.
- La topologie, base de l'analyse moderne ; son penchant vers l'algèbre, la topologie algébrique.
- L'analyse réelle, qui se développe depuis plus de trois siècles ; de l'intégrale de Riemann à celle de Lebesgue, les équations différentielles et le problème fondamental des conditions aux limites.
- Surfaces et variétés ; les surfaces feuilletées de Riemann.
- La théorie des fonctions (sous-entendu d'une variable complexe).
- Une question d'avenir : le calcul des probabilités.

31/3013/5

9 782253 130130

149 F